1.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \qquad x, y \in \mathbb{C}^2$$

$$\langle x, y \rangle = x^t \cdot A \cdot \overline{y}$$

Vamos a chequear que es un p.i.

Af:

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$$

dem:

$$\langle y, x \rangle \underset{\text{por def}}{=} y^t \cdot A \cdot \overline{x}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$y^t \cdot A \cdot \overline{x} = (y_1, y_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{pmatrix}$$

$$= \left(y_1 - i \cdot y_2 \,,\; i y_1 + 2 y_2 \right) \cdot \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{pmatrix}$$

$$= (y_1 - i y_2)\cdot\overline{x_1} + (i y_1 + 2y_2)\cdot\overline{x_2}$$

$$= y_1\cdot\overline{x_1} - i y_2\overline{x_1} + i y_1\overline{x_2} + 2y_2\overline{x_2}$$

$$\overline{x^t\cdot A\cdot\overline{y}} = \overline{(x_1, x_2)\cdot\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overline{y_1}\\ \overline{y_2}\end{pmatrix}}$$

$$= \overline{(x_1 - i x_2,\ i x_1 + 2x_2)\cdot\begin{pmatrix}\overline{y_1}\\ \overline{y_2}\end{pmatrix}}$$

$$= \overline{\overline{y_1}(x_1 - i x_2) + \overline{y_2}(i x_1 + 2x_2)}$$

$$= y_1\cdot\overline{x_1} - y_1\overline{i x_2} + y_2\cdot\overline{i x_1} + y_2\overline{2x_2}$$

Tenemos que chequear que:

$$- i y_2\overline{x_1} + i y_1\overline{x_2} = -y_1\overline{x_2}\,\overline{i} + y_2\cdot\overline{i}\,\overline{x_1}$$

$$= y_1\overline{x_2}\, i - y_2\overline{x_1}\cdot i$$

$\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ producto interno

$\{e_1, \_\_, e_n\}$ base canónica

$v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \qquad w = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \sum^{n} a_i e_i \, , \sum^{n} b_j e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle a_i e_i, b_j e_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i \cdot b_j \langle e_i, e_j \rangle$$

definimos $M = (m_{ij})_{i,j}$ como

$$m_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$$

"Matricialmente" queda:

$$\boxed{\langle v, w \rangle = v^t \cdot M \cdot w}$$

El mismo razonamiento muestra que para una base cualquiera $\{v_1, \ldots, v_n\} = B$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\langle u, w \rangle = (\mathrm{coord}_B\, u)^t \cdot M \cdot \mathrm{coord}_B\, w$$

$$M = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

Obs: M es simétrica

es decir, $m_{ij} = m_{ji} \quad \forall i, j$

o equivalentemente

$$M = M^t.$$

BASES ORTONORMALES & MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT.

Def: Dado $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ un producto interno, dos vectores $v, w \in V$ son ortogonales si: $\langle v, w \rangle = 0$.

Def: Una base de V es ortonormal si todos sus elementos son dos a dos ortogonales y además todos tienen norma 1.

<u>Ejemplo</u>: La base canónica para el producto usual en $\mathbb{R}^n$:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \|e_i\|^2 = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Dado un prod. interno en un e.v. V ¿existe alguna base ortonormal?

En dimensión finita, el método de Gram-Schmidt construye una.

Sea V un e.v. de dim finita con prod. interno $\langle , \rangle$.

Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V.

A partir de B vamos a construir otra base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ que es ortonormal para $\langle , \rangle$.

<u>definimos</u> :

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1$$

$$y_1 = u_1 / \|u_1\|$$

$$y_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

<u>Af</u> : $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$

dem:

$$\langle u_2, u_1 \rangle = \left\langle v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1, u_1 \right\rangle$$

$$= \langle v_2, u_1 \rangle - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\cancel{\langle u_1, u_1\rangle}} \cancel{\langle u_1, u_1\rangle}$$

$$= \langle v_2, u_1 \rangle - \langle v_2, u_1 \rangle = 0$$

$\blacksquare$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} . u_2 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1$$

Af: $\langle u_3, u_1 \rangle = 0$ $\quad$ y

$\langle u_3, u_2 \rangle = 0$

<u>dem</u>:

$$\langle u_3, u_1\rangle = \left\langle v_3 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} . u_2 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 \ , \ u_1 \right\rangle$$

$$= \langle v_3, u_1\rangle - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} . \cancel{\langle u_2, u_1\rangle} - \frac{\langle v_3, u_1\rangle \cancel{\langle u_1, u_1\rangle}}{\cancel{\langle u_1, u_1\rangle}}$$

$$= \langle v_3, u_1\rangle - 0 - \langle v_3, u_1\rangle = 0$$

$\langle u_3, u_2\rangle = 0$ es análogo ∎

El término general es:

para cada $k = 1, \ldots, n$

$$u_k = v_k - \frac{\langle v_k, u_{k-1}\rangle}{\langle u_{k-1}, u_{k-1}\rangle} u_{k-1} - \cdots - \frac{\langle v_k, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1$$

$$= v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_j\rangle}{\langle u_j, u_j\rangle} u_j$$

Para cada k, $y_k := \dfrac{u_k}{\|u_k\|}$

y $\{y_1, \dots, y_n\}$ es una base ortonormal.

$\blacksquare$

Ejercicio 9:

$S = [(1,1,0,0), (1,1,1,1), (-1,0,2,1)]$

$S \subseteq \mathbb{R}^4$ con el prod. interno usual.

Dar una base ortonormal de S.

$u_1 = (1,1,0,0)$

$$u_2 = (1,1,1,1) - \frac{\langle (1,1,1,1), (1,1,0,0) \rangle}{\langle (1,1,0,0), (1,1,0,0) \rangle} \cdot (1,1,0,0)$$

2

2

$= (1,1,1,1) - (1,1,0,0)$

$$= (0,0,1,1)$$

$$u_3 = (-1,0,2,1) - \frac{(-1)}{2}(1,1,0,0) - \frac{3}{2}(0,0,1,1)$$

$$\langle (-1,0,2,1), (1,1,0,0) \rangle = -1$$

$$\langle (1,1,0,0), (1,1,0,0) \rangle = 2$$

$$\langle (-1,0,2,1), (0,0,1,1) \rangle = 3$$

$$\langle (0,0,1,1), (0,0,1,1) \rangle = 2$$

$$u_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2-\frac{3}{2}, 1-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \left(-1/2, 1/2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Para terminar escribir

$$y_k = \frac{u_k}{\|u_k\|} \quad k=1,2,3.$$