Solución Práctico 8 - Derivadas parciales y diferenciabilidad

Definiciones:
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$.

- *Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, llamamos **derivada parcial** de f según x_i en p al siguiente límite:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1, \ldots, p_i + t, \ldots, p_n) - f(p_1, \ldots, p_n)}{t}$$

- *Dado $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, llamamos **derivada direccional** de f en p respecto a la dirección v al siguiente límite:*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1 + tv_1, \ldots, p_n + tv_n) - f(p_1, \ldots, p_n)}{t}$$

- *Decimos que f es **diferenciable** en p si existe una transformación lineal $d_p f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(p + v) - f(p) - d_p f(v)}{||v||} = 0$$

- *Si f es diferenciable en p, definimos el **gradiente** de f en p como el siguiente vector:*

$$\nabla f(p) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p))$$

Para funciones a $\mathbb{R}^m$ los conceptos se traducen a definiciones similares. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. Podemos escribir $f = (f_1, \ldots, f_m)$ de tal forma que $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Entonces:

- *Decimos que f es **diferenciable** en p existe una transformación lineal $d_p f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(p + v) - f(p) - d_p f(v)}{||v||} = (0, \ldots, 0)$$

- *Si f diferenciable en p, definimos la **matriz Jacobiana** de f en p como la siguiente matriz:*

$$J_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(p) \\ \vdots \\ \nabla f_n(p) \end{pmatrix}$$

Proposiciones:

- *Si una función f a valores en $\mathbb{R}$ es diferenciable en el punto p, entonces es continua en p y existen todas las derivadas direccionales en dicho punto. Más aún, $d_p f(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle$*

- *Si una función f a valores en $\mathbb{R}^m$ es diferenciable en p, entonces es continua en el punto p y $d_p f(v) = J_f(p)v$*

- *Si f es una función a valores en $\mathbb{R}$, sus derivadas parciales existen en un entorno de p y son continuas en el punto p, entonces f es diferenciable en p.*

- *Si $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, g diferenciable en p y f diferenciable en $g(p)$, entonces $f \circ g$ es diferenciable en a y su diferencial cumple $d_a(f \circ g) = d_{g(a)} f \circ d_a g$. En particular, la matriz Jacobiana es*
$$J_{f \circ g}(a) = J_f(g(a)) J_g(a)$$

- *Si las derivadas parciales cruzadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$ existen en un entorno de p y son continuas en p, entonces coinciden en p.*

Observaciones:

- *Las derivadas parciales son casos particulares de derivadas direccionales. Una derivada parcial según x_i no es más que la derivada direccional respecto a la dirección del vector canónico e_i.*

- *Podemos interpretar (y caracterizar) al diferencial de f en p como la transformación lineal que mejor aproxima el cambio infinitesimal de f en un entorno de p.*

- *En el caso particular de funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciables, el gráfico de $d_p f$ es un plano que, trasladado hasta $(p, f(p))$, es tangente al gráfico de f. Esto es análogo a funciones continuas definidas en $\mathbb{R}$, cuyas derivadas en un punto pueden ser interpretadas como las pendientes de las rectas tangentes al gráfico de la función en dicho punto.*

- *Una matriz Jacobiana no es más que la matriz asociada a la transformación lineal $d_p f$ en la base canónica.*

- *La existencia de derivadas parciales o derivadas direccionales en un punto no aseguran la diferenciabilidad ni tampoco la continuidad en dicho punto. Esto se verá en este práctico.*

Ejercicio 1

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a\alpha x^{\alpha-1}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = b\beta y^{\beta-1}$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3}{y} - \frac{4y}{x^2}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{3x}{y^2} + \frac{4}{x}$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^{3/2}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3}{2}x^2y^{1/2}$

d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+(xy)^2}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{1+(xy)^2}$

e) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1-y/2x^3}{x+y/x^2}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1/x^2}{x+y/x^2}$

f) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y cos(x)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^y sen(x)$

g) Para $x \neq y$ tenemos $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > |y| \\ -1 & \text{si } -x > |y| \\ 0 & \text{si } |x| < |y| \end{cases}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > |x| \\ -1 & \text{si } -y > |x| \\ 0 & \text{si } |y| < |x| \end{cases}$

h) Para $x^2 \neq y^3$ tenemos $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x & \text{si } x^2 > y^3 \\ 0 & \text{si } x^2 < y^3 \end{cases}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^2 > y^3 \\ 3y^2 & \text{si } x^2 < y^3 \end{cases}$

Para $(0,0)$ se tiene $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Ejercicio 2

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = \frac{-1}{x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = \frac{-1}{y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\cos(x^2+y^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\cos(x^2+y^2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\operatorname{sen}(x^2+y^2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\operatorname{sen}(x^2+y^2)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -4xy\operatorname{sen}(x^2+y^2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$

Ejercicio 3

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a^2k^2e^{-a^2k^2t}\operatorname{sen}(kx), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2e^{-a^2k^2t}\operatorname{sen}(kx)$$

Ejercicio 4

a) La función f es continua si y sólo si $a = 0$. Las derivadas direccionales existen en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ para cualquier dirección. En el punto $(0,0)$ (suponiendo $a = 0$) las únicas derivadas direccionales que existen son según $(\lambda, 0)$ o según $(0, \lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

b) La función f es continua en todo el plano. Las derivadas direccionales también existen en todo el plano, para cualquier dirección.

c) La función f es continua salvo en el conjunto $\{(x,y) : \ y = 0\}$.

Las derivadas direccionales existen en donde f es continua para cualquier dirección.

En la región $\{(x,y) : \ y = 0, x \neq 0\}$ sólo existen derivadas direcc. según $(\lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

En el punto $(0,0)$ existen todas las derivadas direccionales.

d) La función f es continua si y sólo si $a = 0$.
En la región $\{(x, y) : \; xy \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$ existen todas las derivadas direccionales.
En la región $\{(x, y) : \; x = 0, \; y \neq 0\}$ existen sólo las derivadas direcc. según $(0, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
En la región $\{(x, y) : \; x \neq 0, \; y = 0\}$ existen sólo las derivadas direcc. según $(\lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

e) La función f es continua en todo el plano.
En la región $\{(x, y) : y \neq 1\} \cup \{(0, 1)\}$ existen todas las derivadas direccionales.
En la región $\{(x, y) : y = 1, \; x \neq 0\}$ sólo existen las derivadas direcc. según $(\lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Veamos en detalle el ejercicio **4c)**
La función a estudiar es $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin(1/x) \cos(1/y) & \text{si } xy \neq 0 \\ a & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

- f es continua en todo el plano sii $a = 0$:
  Es claro que f es continua en la región $xy = 0$. Luego, observando que si $x \to 0$ o $y \to 0$, como las funciones sen y cos son acotadas, en cualquiera de estos casos se tiene
  $$xy \sin(1/x) \cos(1/y) \to 0$$
  A partir de aquí suponemos $a = 0$.

- Las derivadas direccionales existen (en todas direcciones) en la región $xy \neq 0$:
  Se tiene que
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos(1/y) \big(\sin(1/x) - \frac{1}{x} \cos(1/x) \big)$$
  $$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \operatorname{sen}(1/x) \big(\cos(1/y) + \frac{1}{y} \operatorname{sen}(1/y) \big)$$
  Ambas derivadas parciales son continuas en la región $xy \neq 0$. Por lo tanto f es diferenciable en esta región y existen todas las derivadas direccionales.

- Si $xy = 0$ no existen todas las derivadas direccionales: Si $v = (v_1, v_2)$, y $xy = 0$
  $$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv_1, y + tv_2) - f(x, y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(x + tv_1)(y + tv_2) \sin\left(\frac{1}{x+tv_1}\right) \cos\left(\frac{1}{y+tv_2}\right)}{t}$$
  Si $xy = 0$ hay tres posibilidades: i) $x = y = 0$, ii) $x = 0, y \neq 0$ o iii) $x \neq 0, y = 0$

  i) Si $x = y = 0$, para cualquier v se tiene
  $$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) = \lim_{t \to 0} t v_1 v_2 \sin\left(\frac{1}{tv_1}\right) \cos\left(\frac{1}{tv_2}\right) = 0$$
  ii) Si $x = 0, y \neq 0$ obtenemos
  $$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) = \lim_{t \to 0} v_1 (y + tv_2) \sin\left(\frac{1}{tv_1}\right) \cos\left(\frac{1}{y + tv_2}\right)$$
  Dicho limite existe si y sólo si $v_1 = 0$. En caso de existir vale 0
  iii) Si $x \neq 0, y = 0$ obtenemos
  $$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) = \lim_{t \to 0} (x + tv_1) v_2 \sin\left(\frac{1}{x + tv_1}\right) \cos\left(\frac{1}{tv_2}\right)$$
  Dicho limite existe si y sólo si $v_2 = 0$. En caso de existir vale 0

  Concluímos que en $(0, 0)$ existen todas las derivadas direccionales, pero en los puntos con $xy \neq 0$ y alguna de las coordenadas distintas de cero, solo existen derivadas direccionales en la dirección tal que la función sigue valiendo 0.

Ejercicio 5

Consideramos la función $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Claramente la función no es continua en $(0,0)$ pues tiene puntos arbitrariamente cerca de $(0,0)$ que valen 1 y 0. Por ejemplo, basta con acercarse a $(0,0)$ por la curva $y = x^2/2$ y por la curva $y = 0$. Sin embargo, veremos que existen (y son nulas) todas las derivadas direccionales:

Sea $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Consideramos la recta (tv_1, tv_2) en $\mathbb{R}^2$ que pasa por $(0,0)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $v_2 \geq 0$.

Observamos que si $t > 0$, $v_2 \neq 0$, $v_1 \neq 0$ y $t < \frac{v_2}{v_1^2}$ entonces $tv_2 > t^2 v_1^2$ y por lo tanto $f(tv_1, tv_2) = 0$

Por otro lado, si $t < 0$, $v_2 = 0$ o $v_1 = 0$, necesariamente $f(tv_1, tv_2) = 0$. Lo que nos permite concluír:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = 0$$

Es decir, existen todas las derivadas direccionales en el punto $(0,0)$

Ejercicio 6

Consideramos la función $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq x^2, \text{ o } 2x^2 \leq y \\ |x| & \text{si } x^2 < y < 2x^2 \end{cases}$

- Claramente la función es continua en $(0,0)$:

  Dado $\epsilon > 0$, $||(x,y)|| \leq \epsilon \Rightarrow |f(x,y)| < \epsilon$

- Existen todas las derivadas parciales en $(0,0)$:

  Basta con probar de manera similar al ejercicio anterior, que dado $v = (v_1, v_2)$, si $|t| < \delta$ para cierto $\delta > 0$ entonces $f(tv_1, tv_2) = 0$. Podemos suponer de nuevo que $v_2 \geq 0$ (pues todas las direcciones están contempladas).

  Si $v_1, v_2 \neq 0$, $t > 0$, y tomamos $t < \delta = \frac{v_2}{2v_1^2}$ tenemos que $2t^2 v_1^2 < tv_2$ y por lo tanto $f(tv_1, tv_2) = 0$

  Si $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ o $t < 0$ trivialmente $f(tv_1, tv_2) = 0$. Aquí podemos tomar cualquier δ.

  Concluímos que existe $\delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$, $f(tv_1, tv_2) = 0$, lo que implica $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$

- f no es diferenciable en $(0,0)$:

  Razonando por absurdo, de ser f diferenciable en $(0,0)$, necesariamente su diferencial sería $D_{(0,0)} f(v_1, v_2) = T(v_1, v_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) v_2 = 0v_1 + 0v_2 = 0$

  Es decir, se debería cumplir que el siguiente límite existe y es 0:

$$\lim_{(v_1,v_2) \to 0} \frac{f(v_1, v_2) - f(0,0) - D_{(0,0)} f(v_1, v_2)}{||(v_1, v_2)||} = \lim_{(v_1,v_2) \to 0} \frac{f(v_1, v_2)}{||(v_1, v_2)||} = 0$$

  Sin embargo esto no se cumple, pues basta acercarse al $(0,0)$ por la curva $y = \frac{3}{2}x^2$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t, \frac{3}{2}t^2)}{\sqrt{t^2 + \frac{9}{4}t^2}} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{|t|\sqrt{1 + \frac{9}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{4}}} \neq 0$$

Ejercicio 7

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}(\frac{1}{x}) + e^{xy} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Estudiaremos continuidad, existencia de derivadas direccionales y diferenciabilidad en los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.

- f es continua en $(0,0)$ y $(1,0)$, pero no lo es en $(0,1)$:

  La continuidad en $(1,0)$ es inmediata. La continuidad en $(0,0)$ se deduce del hecho que (x^2+y^2) tiende a 0 cuando $(x,y) \to 0$ y que la función $\operatorname{sen}(1/x)$ es acotada.

  Para ver que f no es continua en $(0,1)$ basta acercarse por una recta horizontal:

$$\lim_{t\to 0} f(t,1) = \lim_{t\to 0} t^2 \operatorname{sen}(1/t) + \operatorname{sen}(1/t) + e^t = \lim_{t\to 0} \operatorname{sen}(1/t) + 1$$
$$\Longrightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$$

- Existen todas las derivadas direccionales en $(1,0)$ y $(0,0)$, y solo las derivadas direccionales según $(0,\lambda)$ en $(0,1)$:

  Si $x \neq 0$ tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\operatorname{sen}(1/x) - \frac{(x^2+y^2)}{x^2}\cos(1/x) + ye^{xy}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\operatorname{sen}(1/x) + xe^{xy}$$

  Como las derivadas parciales son continuas en la región $x \neq 0$, necesariamente f es diferenciable en esta región. Esto implica que existen todas las derivadas direccionales en la región $x \neq 0$ y están dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), (v_1,v_2)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)v_2$$

  Si $x = 0$:
$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, y+tv_2) - f(0,y)}{t}$$

  Observamos que si $v_1 = 0$ entonces $f(0, y+tv_2) = 1 = f(0,y)$, por lo tanto $\forall y, \forall v_2$ se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial(0,v_2)}(0,y) = 0$$

  Suponiendo que $v_1 \neq 0$, la expresión de la derivada parcial es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial v}(0,y) &= \lim_{t\to 0} \frac{(t^2v_1^2 + y^2 + 2ytv_2 + t^2v_2^2)\operatorname{sen}(\frac{1}{tv_1}) + e^{tv_1(y+tv_2)} - 1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(t^2v_1^2 + y^2 + 2ytv_2 + t^2v_2^2)\operatorname{sen}(\frac{1}{tv_1}) + tv_1(y+tv_2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} (tv_1^2 + \frac{y^2}{t} + 2yv_2 + tv_2^2)\operatorname{sen}(\frac{1}{tv_1}) + v_1(y+tv_2)
\end{aligned}$$

  Dicho límite existe si y sólo si $y = 0$. En este caso:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} (tv_1^2 + tv_2^2)\operatorname{sen}(\frac{1}{tv_1}) + tv_1v_2 = 0$$

  Concluímos que existen todas las derivadas direccionales en $(0,0)$ y además son nulas. En el punto $(0,1)$ sólo existen derivadas direccionales en dirección $(0,\lambda)$.

- f es diferenciable en $(1,0)$ y $(0,0)$, pero no lo es en $(0,1)$:

  Ya vimos en la parte anterior, como consecuencia de la continuidad de las derivadas parciales en la región $x \neq 0$, que f es diferenciable en $(1,0)$.

  Claramente f no es diferenciable en $(0,1)$ porque alli no existen todas las derivadas direccionales. Veamos que la función sí es diferenciable en $(0,0)$.

  Como $\frac{\partial f}{\partial x} f(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ el candidato a diferencial, en el caso de existir, es la transformación lineal nula. Es decir, queremos probar que el siguiente límite existe y es 0:

  $$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{f(v_1,v_2) - f(0,0) - 0v_1 - 0v_2}{||(v_1,v_2)||}$$

  Observando que

  $$\frac{f(v_1,v_2) - f(0,0)}{||(v_1,v_2)||} = ||(v_1,v_2)|| \operatorname{sen}(1/v_1) + \frac{(e^{v_1 v_2} - 1)}{||(v_1,v_2)||}$$

  Y recordando que $e^u - 1 \sim u$ cuando $u \to 0$, concluímos:

  $$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{f(v_1,v_2) - f(0,0)}{||(v_1,v_2)||} = \lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{v_1 v_2}{||(v_1,v_2)||} = 0$$

  Para justificar el último límite alcanza con pasar a coordenadas polares.

Ejercicio 8

No existe tal función de clase C^2, pues una función de esta clase cumple $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$

Ejercicio 9

Consideramos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Si $(x,y) \neq 0$, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{(x^2+y^2)} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y}{(x^2+y^2)} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

Si $(x,y) = (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} t \sin(1/t^2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} t \sin(1/t^2) = 0$$

b) Como las derivadas parciales son continuas en la región $(x,y) \neq 0$, f es diferenciable en dicha región. Veamos que también es diferenciable en $(0,0)$ y por lo tanto lo será en todo el plano.

El candidato a diferencial, es decir, a la transformación lineal que aproxima a f en $(0,0)$, es la transformación nula (pues sus derivadas parciales lo son). Luego:

$$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{f(v_1,v_2) - f(0,0)}{||(v_1,v_2)||} = \lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \sqrt{(x^2+y^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$$

Por lo tanto f es diferenciable en $(0,0)$

c) Si bien f es diferenciable en todo el plano, sus derivadas parciales no son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, es decir, no es de clase C^1. Alcanza con ver que en alguna dirección la función $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no es continua en $(0,0)$:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) &= \lim_{t\to 0} 2t\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t^2}\right)-\frac{2t}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{-2}{t}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\end{aligned}$$

Este límite no existe, por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no es continua en $(0,0)$.

Ejercicio 10

Consideramos $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x^3y$. Sean $a=(0,0)$, $b=(1,2)$. Buscamos ξ en el segmento $[a,b]$ tal que $D_\xi f(b-a)=f(b)-f(a)$.

El segmento $[a,b]$ son los puntos de la forma $tb+(1-t)a$ con $t\in[0,1]$. Por lo tanto, podemos escribir $\xi=tb+(1-t)a=(t,2t)$.

Las derivadas parciales de f son $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2y$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^3$. Luego

$$\nabla f(\xi)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi),\frac{\partial f}{\partial x}(\xi)\right)=(6t^3,t^3)$$

El valor $f(b)-f(a)$ es $1^3 2+0=2$. Juntando todo obtenemos la siguiente ecuación:

$$2=f(b)-f(a)=D_\xi f(b-a)=\langle\nabla f(\xi),(1,2)\rangle=6t^3+2t^3=8t^3$$

Concluímos que $t=\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}$. Es decir, $\xi=\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3},2\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}\right)$

Ejercicio 11

Consideremos las funciones g_1,g_2 como las funciones coordenadas de g, es decir $g_1(\rho,\theta)=\rho\cos(\theta)$ y $g_2(\rho,\theta)=\rho\operatorname{sen}(\theta)$.

Aplicando la regla de la cadena se tiene entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial f\circ g}{\partial\rho}(\rho,\theta)=&\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos(\theta),\rho\operatorname{sen}(\theta))\frac{\partial g_1}{\partial\rho}(\rho,\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos(\theta),\rho\operatorname{sen}(\theta))\frac{\partial g_2}{\partial\rho}(\rho,\theta)\\ =&f_x(\rho\cos(\theta),\rho\operatorname{sen}(\theta))\cos(\theta)+f_y(\rho\cos(\theta),\rho\operatorname{sen}(\theta))\operatorname{sen}(\theta)\end{aligned}$$

De manera análoga, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f\circ g}{\partial\theta}(\rho,\theta)=&\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos(\theta),\rho\operatorname{sen}(\theta))\frac{\partial g_1}{\partial\theta}(\rho,\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos(\theta),\rho\operatorname{sen}(\theta))\frac{\partial g_2}{\partial\theta}(\rho,\theta)\\ =&-f_x(\rho\cos(\theta),\rho\operatorname{sen}(\theta))\rho\operatorname{sen}(\theta)+f_y(\rho\cos(\theta),\rho\operatorname{sen}(\theta))\rho\cos(\theta)\end{aligned}$$

Ejercicio 12

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\langle\nabla f(0,0),v\rangle=\langle(2,-1),(v_1,v_2)\rangle=2v_1-v_2$$

Ejercicio 13

De la función f definida en el plano se sabe que

- $f(x,1) = x^3 + x^2$ si $x \neq 0$
- $f(0,y) = y^2 - 2y + 1$
- $f(x,1-x) = x$ si $x \neq 0$

a) - $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ sólo se puede calcular en los puntos de la forma $(x,1)$.
   Además $\frac{\partial f}{\partial x}(x,1) = 3x^2 + 2x$
   - $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sólo se puede calcular en los puntos de la forma $(0,y)$.
   Además $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 2y - 2$
   - Por lo tanto el gradiente sólo se puede calcular en $(0,1)$. Se tiene $\nabla f(0,1) = (0,0)$

b) Si $v = (1,-1)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,1-t)-f(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$

c) No podemos afirmar que f sea diferenciable en ningún punto del plano, pues no conocemos cuánto vale f en ningún abierto (y la diferenciabilidad en un punto es una propiedad que depende del valor de f en un entorno abierto del punto).

   Sin embargo, sí podemos afirmar que f no es diferenciable en $(0,1)$, pues se tiene

$$\langle \nabla f(0,1), (1,-1) \rangle = 0 \neq 1 = \frac{\partial f}{\partial (1,-1)}(0,1)$$

Ejercicio 14

De la ecuación $\langle \nabla f(0,0), (1,1) \rangle = \frac{\partial f}{\partial (1,1)}(0,0)$ se deduce $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$

Ejercicio 15

a) $J_f(0,0) = \nabla f(0,0) = (5,-1)$

b) $J_f(0,1,2) = \begin{pmatrix} e^3 & e^3 & e^3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $J_f(\pi,-\pi) = \begin{pmatrix} e^{2\pi} & e^{2\pi} \\ -2 & -1 \\ 0 & \frac{2\pi}{1+\pi^2} \end{pmatrix}$

d) $\forall a \in \mathbb{R}^p$, $J_f(a) = A$

e) Si $h(x,y) = (h_1(x,y), h_2(x,y))$ y $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$ se tiene

$$J_f(x,y) = \Big(h_1(x,y), h_2(x,y), g_1(x,y), g_2(x,y)\Big) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 16

Este ejercicio es mecánico. Hay que calcular derivadas parciales y ordenarlas en matrices (matrices Jacobianas). Para calcular la matriz Jacobiana de una composición $f \circ g$ hay dos caminos: Una forma es calcular la matriz Jacobiana de la expresión que se consigue al componer f y g. Otra forma es multiplicar las matrices Jacobianas de f y g, pues $J_{f\circ g}(a) = J_f(g(a))J_g(a)$

Ejercicio 17

Recordamos que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, el plano tangente al gráfico de f en el punto $(p_1, p_2, f(p))$ está dado por

$$z_p(x,y) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x - p_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y - p_2)$$

a) $z_p(x,y) = 4 + 8(y-1)$

b) $z_p(x,y) = -5(x-\pi) + 2(y - \pi/2)$

c) $z_p(x,y) = 2 + e + (2+2e)(x-1) + (2+e)(y-1)$

Ejercicio 18

Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable (derivable). Definimos $f(x,y) = yh(y/x)$. Veamos que todos los planos tangentes del gráfico de f tienen un punto común: el punto $(0,0,0)$

Tenemos que

$$\nabla f(x,y) = \big(-\frac{y^2}{x^2}h'(y/x),\ h(y/x) + \frac{y}{x}h'(y/x)\big)$$

Si (a_1, a_2) es un punto de $\mathbb{R}^2$ con $a_1 \neq 0$, el plano tangente del gráfico de f correspondiente a este punto es el siguiente:

$$\begin{aligned} z_a(x,y) &= a_2 h(a_2/a_1) + (x - a_1)\Big(-\frac{a_2^2}{a_1^2}h'(a_2/a_1)\Big) + (y - a_2)\Big(h(a_2/a_1) + \frac{a_2}{a_1}h'(a_2/a_1)\Big) \\ &= x\Big(-\frac{a_2^2}{a_1^2}h'(a_2/a_1)\Big) + y\Big(h(a_2/a_1) + \frac{a_2}{a_1}h'(a_2/a_1)\Big) \end{aligned}$$

Observar que independientemente del punto a, $z_a(0,0) = 0$. Esto implica que $\forall a \in \mathbb{R}^2$ con $a_1 \neq 0$, se tiene que $(0,0,z_a(0,0)) = (0,0,0)$ es un punto del plano tangente al grafico de f correspondiente a a. Es decir, $(0,0,0)$ es un punto común a todos los planos tangentes.

Ejercicios opcinales

Ejercicio 19

La idea del siguiente ejercicio es pensar a las superficies que se mencionan, localmente, como el gráfico de una función diferenciable.

Recordamos expresiones que definen las superficies del ejercicio:

- Esfera: $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- Cono: $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = z^2\}$
- Cilindro: $\{(x,y,z) : y^2 + z^2 = 1\}$
- Paraboloide: $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = z\}$

a) Si $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, necesariamente alguna coordenada no es 0. Suponemos $z \neq 0$. Luego $z = \pm f(x,y) = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Si también suponemos $z > 0$, basta con hallar el plano tangente al gráfico de f en el punto $p = (p_1, p_2)$. Por lo tanto, bajo estas suposiciones tenemos

$$z_p(x,y) = \sqrt{1 - p_1^2 - p_2^2} - \frac{p_1}{\sqrt{1 - p_1^2 - p_2^2}}(x - p_1) - \frac{p_2}{\sqrt{1 - p_1^2 - p_2^2}}(y - p_2)$$

Observamos que podemos expresar esto de la siguiente forma: los puntos del plano tangente a (p_1, p_2, p_3) con $p_3 = f(p) = \sqrt{1 - p_1^2 - p_2^2}$ son aquellos tales que

$$\langle (x - p_1, y - p_2, z - p_3), (p_1, p_2, p_3) \rangle = 0$$

Que es lo esperado, es decir, el plano tangente en p es el plano perpendicular al vector (p_1, p_2, p_3) que contiene a (p_1, p_2, p_3).

En el caso $z = 0$, basta considerar una función $x(y, z) = f(y, z)$ o $y(x, z) = f(x, z)$ y repetir el procedimiento.

b) Si $x^2 + y^2 = z^2$ y $z \neq 0$, consideramos $z = \pm f(x, y) = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ (en $z = 0$ no existe un plano tangente). Hallemos el plano tangente del gráfico de f en (p_1, p_2).

Si $z > 0$:

$$z_p(x, y) = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} + \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}(x - p_1) + \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}(y - p_2)$$

Si $(p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2, f(p_1, p_2))$, el plano tangente son los puntos del espacio que cumplen lo siguiente

$$\langle (x - p_1, y - p_2, z - p_3), (p_1, p_2, -p_3) \rangle = 0$$

c) Si $y^2 + z^2 = 1$, consideramos $z = \pm f(x, y) = \pm\sqrt{1 - y^2}$. Hallemos el plano tangente del gráfico de f en (p_1, p_2).

Si $z > 0$:

$$z_p(x, y) = \sqrt{1 - p_2^2} - \frac{p_2}{\sqrt{1 - p_2^2}}(y - p_2)$$

Si $(p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2, f(p_1, p_2))$, el plano tangente son los puntos del espacio que cumplen lo siguiente

$$\langle (x - p_1, y - p_2, z - p_3), (0, p_2, p_3) \rangle = 0$$

d) Si $x^2 + y^2 = z$, consideramos $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Hallemos el plano tangente del gráfico de f en (p_1, p_2).

$$z_p(x, y) = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1(x - p_1) + 2p_2(y - p_2)$$

Si $(p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2, f(p_1, p_2))$, el plano tangente son los puntos del espacio que cumplen lo siguiente

$$\langle (x - p_1, y - p_2, z - p_3), (2p_1, 2p_2, -1) \rangle = 0$$

Ejercicio 20

Despejando la temperatura de la ecuación de Van de Waals obtenemos

$$T(V, P) = \frac{1}{nR}\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb)$$

Por lo tanto, derivando según el volumen obtenemos

$$\frac{\partial T}{\partial V}(V, P) = \frac{1}{nR}\left(\frac{-2n^2 a}{V^3}(V - nb) + P + \frac{n^2 a}{V^2}\right) = \frac{-n^2 aV + 2n^3 ab + PV^3}{nRV^3}$$

Haciendo lo mismo pero según la presión obtenemos

$$\frac{\partial T}{\partial P}(V, P) = \frac{1}{nR}\frac{n^2 a}{V^2}(V - nb) = \frac{n^2 a(V - nb)}{nRV^2}$$

Ejercicio 21

Observando la gráfica, sinos paramos en J y nos movemos paralelo al eje $0\vec{x}$ vemos que la función f es creciente, por lo tanto $f_x(J) > 0$. Análogamente si nos movemos paralelo al eje $0\vec{y}$ vemos que la función f es decreciente, por lo tanto $f_y(J) < 0$.

Ejercicio 22

(a) $u = \operatorname{sen}(kx)\cos(akt)$, por lo tanto tenemos $u_t = -\operatorname{sen}(kx)ak\operatorname{sen}(akt)$ y por consiguiente $u_{tt} = -a^2k^2\operatorname{sen}(kx)\cos(akt)$. Análogamente $u_{xx} = -k^2\operatorname{sen}(kx)\cos(akt)$.

(b) $u = (x-at)^6 + (x+at)^6$, por lo tanto $u_t = -6a(x-at)^5 + 6a(x+at)^5$ y entonces se tiene $u_{tt} = 30a^2(x-at)^4 + 30a^2(x+at)^4$. Análogamente $u_{xx} = 30(x-at)^4 + 30(x+at)^4$

(c) $u = \dfrac{t}{a^2t^2 - x^2}$, por lo tanto tenemos $u_t = -\dfrac{a^2t + x^2}{(a^2t^2-x^2)^2} = -\dfrac{1}{a^2t^2-x^2} - \dfrac{2x^2}{(a^2t^2-x^2)^2}$, se sigue entonces que $u_{tt} = \dfrac{2a^2t}{(a^2t^2-x^2)^2} + \dfrac{8a^2x^2t}{(a^2t^2-x^2)^3}$.

Análogamente $u_{xx} = \dfrac{2t}{(a^2t^2-x^2)^2} + \dfrac{8x^2t}{(a^2t^2-x^2)^3}$

Ejercicio 23

a) Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es lineal, entonces $T(x) = Ax$ para una matriz $A \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Por ejercicio 15d), sabemos que $J_T(x) = \nabla T(x) = Ax$

b) Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $Q(x) = x^TAx$. Buscamos escribir $\frac{\partial Q}{\partial x_i}(x)$

Escribimos A como $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$.

Entonces $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}x_ix_j$. Luego:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x_k}(x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\Big(\frac{\partial x_i}{x_k}(x)x_j + x_i\frac{\partial x_j}{x_k}(x)\Big) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{k,j}x_j + \sum_{i=1}^n a_{i,k}x_i\end{aligned}$$

Para ahorrar subíndices podemos escribir a la derivada parcial como

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k}(x) = \sum_{i=1}^n a_{k,i}x_i + \sum_{i=1}^n a_{i,k}x_i$$

Observar que $\sum_{i=1}^n a_{k,i}x_i$ y $\sum_{i=1}^n a_{i,k}x_i$ son las coordenadas k-ésimas de los vectores Ax y x^TA respectivamente. Esto implica que $\nabla Q(x) = Ax + x^TA$.

Por último, si A es simétrica, $a_{i,j} = a_{j,i}$. Esto implica $x^TA = Ax$, por lo tanto

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k}(x) = 2\sum_{i=1}^n a_{k,i} \quad \text{y} \quad J_Q(x) = \nabla Q(x) = 2Ax$$

c) Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal, entonces existe $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $T(x) = Ax$. Por último, observar que $f(x) = \langle x, T(x)\rangle = x^TAx$. Por lo visto en el inciso b), se tiene que

$$J_f(x) = \nabla f(x) = Ax + x^TA \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \sum_{i=1}^n a_{k,i}x_i + \sum_{i=1}^n a_{i,k}x_i$$