

Notas para Curso de Posgrado de Mesoescala

Universidad de la República, Facultad de Ingeniería

2 0 2 5

Material preparado por Gabriel Cazes Boezio

ACELERACIÓN en SISTEMAS RELATIVOS

Si referimos el movimiento a un sistema inercial, en el cual vale la ley de Newton, dado por la terna $\mathbf{O}\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$, y también en un sistema móvil respecto a este, dado por la terna $\mathbf{O}'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ (ver Fig.1), la aceleración de una partícula $\mathbf{P}$ en el sistema inercial, a la que llamamos aceleración absoluta, puede calcularse en función de la aceleración en el sistema móvil, a la cual llamamos aceleración relativa, mediante el teorema de G. Coriolis,

$$\vec{a}_A = \vec{a}_R + \vec{a}_T + \vec{a}_C$$

Las aceleraciones absoluta $\vec{a}_A$ y relativa $\vec{a}_R$ son las aceleraciones de la partícula $\mathbf{P}$ percibidas por observadores solidarios con el sistema inercial y el sistema móvil, respectivamente.

La aceleración de transporte $\vec{a}_T$, es la aceleración de un punto solidario al sistema móvil, visto desde el sistema inercial, que en el instante en que aplicamos este teorema, coincide en posición con la partícula $\mathbf{P}$.

La aceleración de Coriolis se calcula como

$$\vec{a}_C = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_R,$$

donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular de la terna $\mathbf{O}'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ vista desde $\mathbf{O}\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$, y $\vec{v}_R$ es la velocidad relativa de $\mathbf{P}$ (es decir, vista desde el sistema móvil).

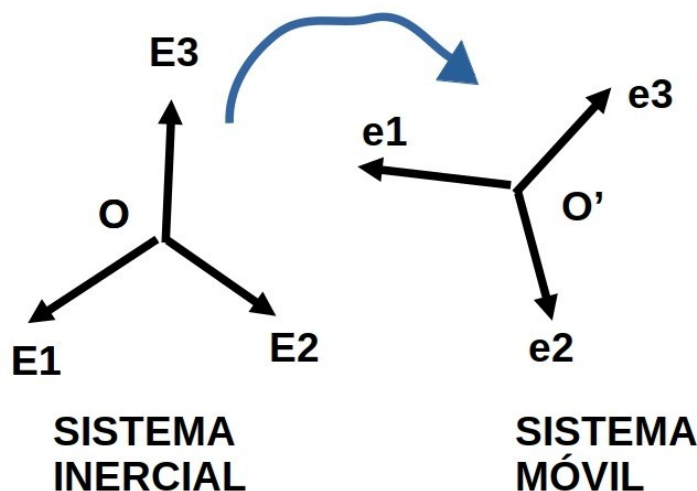


Figura 1: Sistema inercial y sistema móvil

APLICACIÓN A LOS MOVIMIENTOS ATMOSFÉRICOS DE GRAN ESCALA

ACELERACIÓN DE CORIOLIS

Supondremos que la tierra gira con velocidad angular $\Omega \vec{K}$ respecto a un sistema inercial; $\vec{K}$ es el versor colineal al eje de rotación, orientado desde el Polo Sur al Polo Norte, y $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia angular de la rotación terrestre. T es el período de rotación terrestre (86400s).

En un punto dado, esta velocidad angular puede descomponerse proyectarse según el versor vertical local $\vec{k}$ (dirección radial), y el versor meridional $\vec{e}_\theta$ (orientado de norte a sur);

$$\Omega \vec{K} = \Omega \sin \theta \vec{k} + \Omega \cos \theta \vec{e}_\theta$$

siendo θ la latitud (ver Fig. 2).

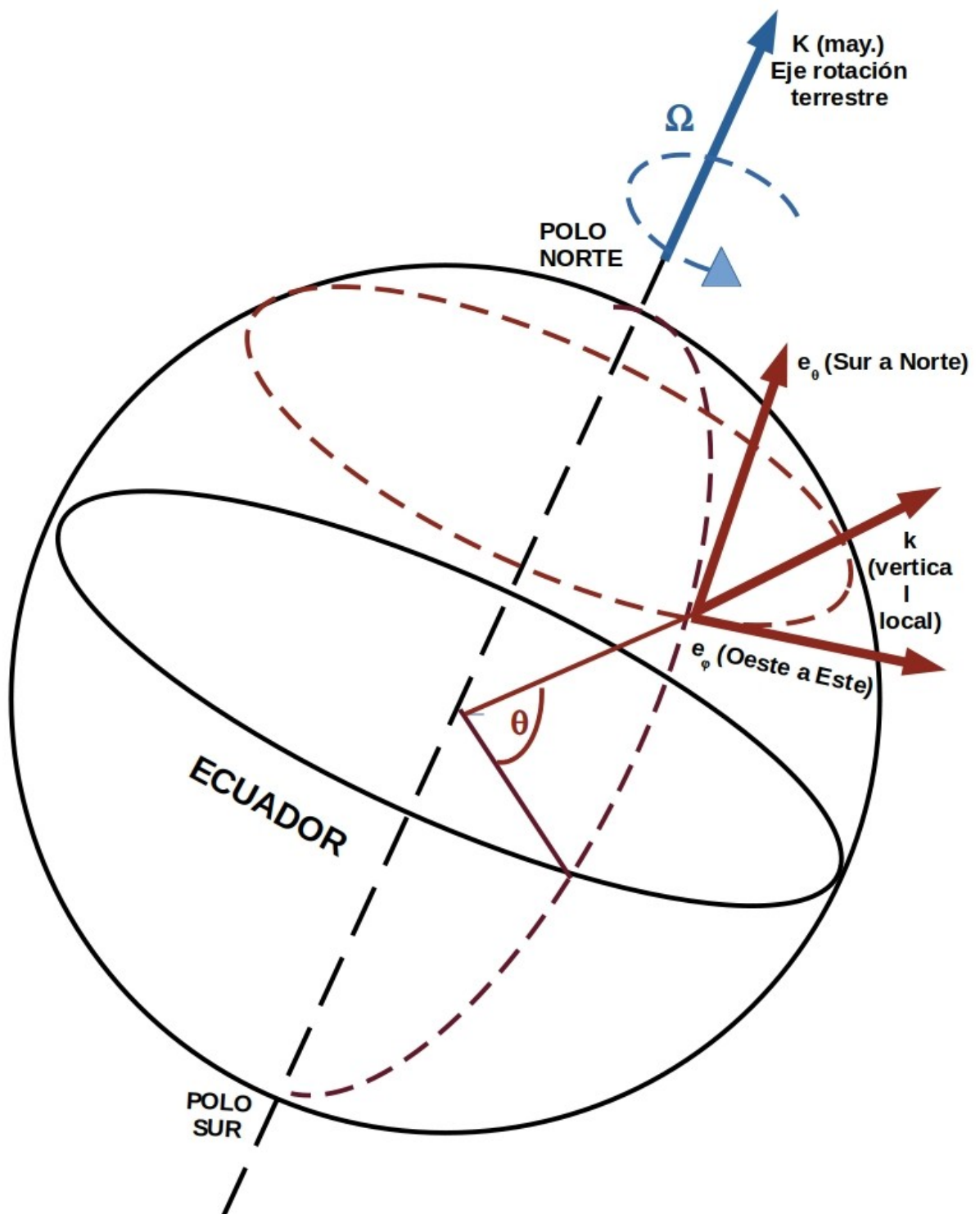
Los movimientos de gran escala son cuasi horizontales. En este caso, importa calcular la aceleración de Coriolis asociada a la componente de $\Omega \vec{K}$ según la vertical del lugar; puesto que multiplicada vectorialmente con la velocidad horizontal, produce una aceleración también horizontal: si la velocidad relativa es

$$\vec{v} = v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_\theta \vec{e}_\theta$$

la componente horizontal de la aceleración de Coriolis resulta:

$$a_{CH} = 2 \Omega \sin \theta \vec{k} \times \vec{v}$$

En cuanto a la componente según $\vec{e}_\theta$ de $\Omega \vec{K}$, la misma se asocia a una aceleración de coriolis de componente vertical, que de hecho es despreciable frente a $\mathbf{g}$ (cuatro órdenes de magnitud menor).



Gigura 2. Eje de rotación de la tierra y versores referidos

ACELERACIÓN DE TRANSPORTE

la aceleración de transporte de la rotación terrestre es

$$\vec{a}_T = \Omega^2 \cdot R_{\text{tierra}} \cos(\theta) \mathbf{e}_\rho ,$$

donde $\mathbf{e}_\rho$ es el versor radial de coordenadas cilíndricas, con eje en el eje de rotación de la tierra. (ver Fig. 3). La $\vec{a}_T$ puede descomponerse según los versores $\vec{e}_\theta$ y $\vec{k}$. El vector resultante es coplanar con la aceleración de gravedad, y de módulo mucho menor al mismo (al menos tres ordenes de magnitud menor). Se considera entonces que la fuerza de masa vertical de la gravedad incluye este efecto. Esto implica también desviar ligeramente las direcciones verticales y horizontales a las que referimos aquí; dicha desviación es de muy poca significación como para cambiar el ángulo de latitud que se utiliza en los cálculos de proyecciones verticales y horizontales de fuerzas (ver Necco 1980).

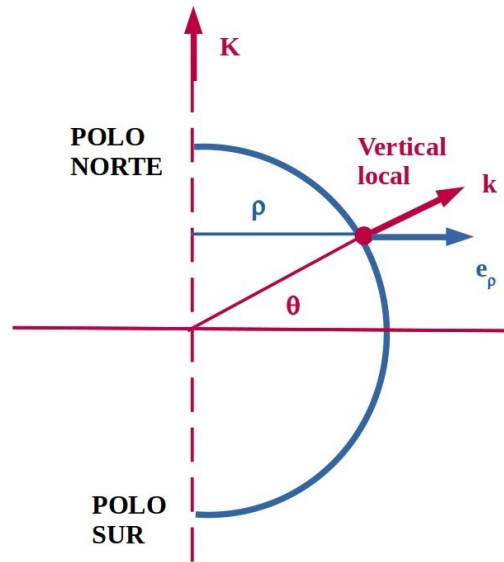


Figura 3. Versor $\mathbf{e}_\rho$ considerado en el cálculo de la aceleración de transporte.

NÚMERO DE ROSSBY Y ESCALAS DE LOS MOVIMIENTOS DE ATMÓSFERA.

La importancia relativa de la aceleración de Coriolis puede evaluarse en base a la variable adimensional de Rossby: si $\mathbf{U}$ es una velocidad representativa de un proceso, y $\mathbf{L}$ una longitud también representativa,

$$Ro \equiv \frac{U}{fL} ,$$

donde $f \equiv 2\Omega \sin \theta$ es la componente de la velocidad angular respecto a la vertical del lugar.

Bajos valores de $\mathbf{Ro}$ implican que la aceleración de Coriolis prevalece frente a la aceleración relativa, mientras que elevados valores de $\mathbf{Ro}$ implican que la misma es irrelevante.

Para valores de **R_o** del orden de **0.1** (típicos de movimientos del orden de 1000km y mas) se tiene la **escala sinóptica**, y para valores un orden de magnitud inferiores a estos, la **escala planetaria** (movimimentos del orden de 6000km y mas). Corresponden estas escalas en conjunto a la **Macroescala**. Para valores entre **1** y **100**, se tiene la **Mesoescala**, y para valores superiores, la micro escala. Para valores de **R_o** del orden de la unidad, la aceleración de **Coriolis** es importante pero no prevalece. Para valores del orden de **10** y superiores, se vuelve despreciable.

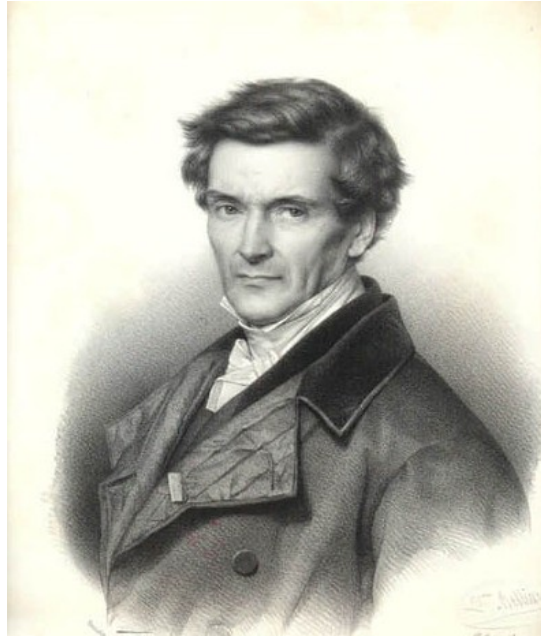


Figura 4. Retrato de Gaspard Gustave Coriolis (1792-1843) y Calle G. Coriolis de Paris

ECUACIONES BÁSICAS EN ESCALA SINÓPTICA ($R_0 \ll 1$)

Las ecuaciones de cantidad de movimiento según la horizontal local son:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_H p - 2\Omega \sin(\theta) \vec{k} \times \vec{v}$$

donde $\vec{k}$ es la vertical del lugar, y $\vec{v}$ la velocidad horizontal relativa a la tierra. El operador ∇_H representa la componente del gradiente según un plano localmente horizontal. Consideramos a la coordenada z de elevación como coordenada vertical. De este modo el cálculo de ∇_H implica realizar solo derivadas de coordenadas horizontales, y dejar z constante. Ω es la frecuencia angular de la rotación de la tierra, y θ es la latitud del lugar. El segundo término a la derecha de la igualdad es la componente horizontal de la aceleración de Coriolis, solo debe considerarse en caso de números de Rossby no muy elevados. Notar que $\Omega \sin(\theta) \vec{k}$ es la componente de la velocidad de rotación de la tierra según la vertical del lugar.

Los movimientos de escala sinóptica o mayores son cuasi bidimensionales, por lo que la velocidad vertical es pequeña. Sin embargo juega roles muy importantes en diversos procesos, y no la depreciamos. Si se desprecia, en estas escalas, la aceleración vertical frente a g , con lo que la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección vertical se reduce a la relación hidrostática (diferencial),

$$dp = -\rho g dz \quad (\text{Manteniendo el tiempo } t \text{ y las coordenadas horizontales } x \text{ e } y \text{ constantes.})$$

Notar que a coordenadas horizontales e instante fijos, se tiene una relación biunívoca entre la presión y la elevación z (si bien es monótona decreciente, es decir, no es directa). Como consecuencia, es posible tomar p como coordenada vertical (p disminuiría al aumentar la altura). Se demuestra entonces (Necco 1980)

$$\frac{1}{\rho} \nabla_H p = g \nabla_p z$$

donde el operador ∇_p representa el gradiente horizontal, es decir, considera solo derivadas parciales respecto a las coordenadas horizontales, pero además dejando p constante, en lugar de z . De este modo la ecuación de cantidad de movimiento horizontal queda:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla_p g z - 2\Omega \sin(\theta) \vec{k} \times \vec{v}$$

Notar que $1/\rho$ fue sustituida por la constante g .

Por otra parte el rol de la velocidad vertical lo juega ahora $\omega \equiv \frac{dp}{dt}$

Se demuestra que la ecuación de balance de masa resulta:

$$\nabla_p \cdot \vec{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

Finalmente, el primer principio de la termodinámica se puede establecer como

$$c_p \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho} \omega + \dot{Q} \quad \text{o bien} \quad c_p \frac{dT}{dt} = \frac{RT}{p} \omega + \dot{Q}$$

siendo $\dot{Q}$ el calentamiento neto por unidad de tiempo y de masa. El primer término a la derecha representa el aumento de temperatura por compresión adiabática. R es la constante del aire en la ecuación de estado de un gas ideal.

RESUMEN

En suma: considerando a la presión como coordenada vertical, se tiene el siguiente sistema completo:

1) La velocidad horizontal se puede pronosticar mediante las ecuaciones horizontales de c

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla_p gz - 2\Omega \sin(\theta) \vec{k} \times \vec{v}$$

2) El cálculo de $\nabla_p gz$ requiere conocer el campo de z en función de las coordenadas horizontales, el tiempo, y p, lo que puede lograrse mediante la integración de la relación diferencial

$$dz = -\frac{1}{\rho g} dp \quad (\text{para cada } t \text{ y cada coordenadas horizontales } x \text{ e } y)$$

3) la densidad r puede obtenerse de la ecuación de estado del gas ideal:

$$p = \rho R_{\text{aire}} T ;$$

con $R_{\text{aire}} = 286 \text{ Julios} / K / kg$.

4) La temperatura puede pronosticarse mediante el primer principio;

$$c_p \frac{dT}{dt} = \frac{RT}{p} \omega + \dot{Q}$$

5) El primer principio, y la contribución de los transportes verticales a las derivadas totales requieren el conocimiento de $\omega \equiv dp/dt$; que puede diagnosticarse a partir del balance de masa o de la “ecuación omega” explicada en Necco (1980).

6) El cálculo de $\dot{Q}$ requiere considerar efectos radiativos, flujos de calor de la superficie, y efectos de la condensación del vapor de agua (nubes), todo lo cual requiere de parametrizaciones de flujos de radiación de origen solar y terrestre, de microfísica de nubes, de procesos de capa límite atmosférica, y de convección.

CASO LÍMITE: BALANCE GEOSTRÓFICO

En caso de que la aceleración relativa se desprece frente a la aceleración de Coriolis, se tendrá la relación geostrófica,

$$g \nabla_p z = -2\Omega \sin(\theta) \vec{k} \times \vec{v}$$

de lo que se deduce

$$\vec{v} = \frac{g}{2\Omega \sin(\theta)} \vec{k} \times \nabla_p z ; \text{ también se expresa como } \vec{v} = \frac{g}{f} \vec{k} \times \nabla_p z , \text{ con } f \equiv 2\Omega \sin(\theta)$$

Notar que esta relación permite el diagnóstico del campo de velocidades, pero ya no el pronóstico. Además implica aceleración relativa nula. Por otra parte, si no se toma en cuenta la variación geográfica del parámetro f , se tiene un flujo horizontal con función corriente, y por ende no divergente. Esto impediría el movimiento vertical. Estas deficiencias se llaman paradoja geostrófica. De hecho, el campo de velocidades en flujos de bajos números de Rossby es aproximadamente geostrófico, pero con apartamientos del geostrofismo pequeños pero que habilitan la existencia de aceleración relativa, movimiento no divergente (aunque cuasi no divergente) y movimiento vertical.

Por otra parte, tanto las tangentes a las curvas de z constante como el vector velocidad horizontal son perpendiculares a $\nabla_p z$; por lo cual son paralelas entre si: de esto se deduce que las curvas $z = \text{cte}$ son líneas de flujo de la velocidad geostrófica (ver Fig. 5).

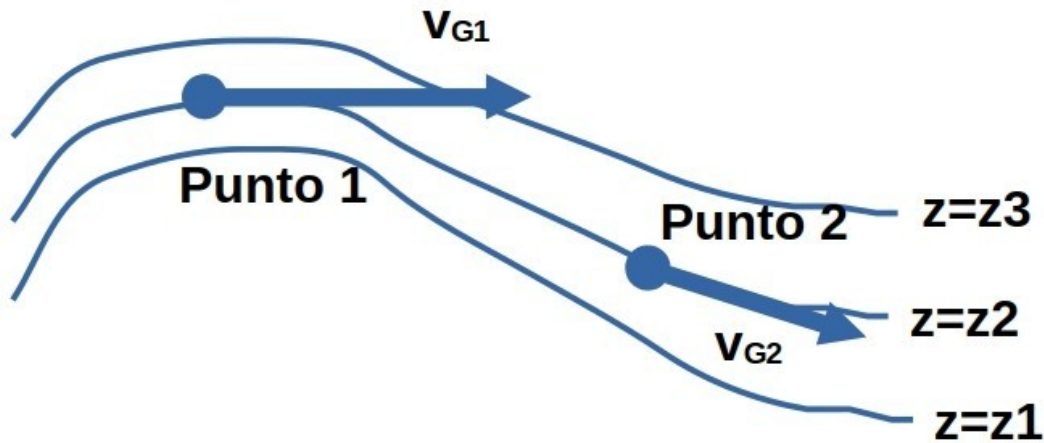


Figura 5. Líneas de $z = \text{cte}$ a un nivel de presión dado y el viento geostrófico

CORTANTE VERTICAL DEL VIENTO GEOSTRÓFICO: EL VIENTO TÉRMICO

Si derivamos la relación geostrófica respecto a la coordenada p , obtenemos

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{g}{f} \vec{k} \times \nabla_p z \right] = \frac{g}{f} \vec{k} \times \frac{\partial}{\partial p} [\nabla_p z]$$

considerando que p es la coordenada vertical, y el operador ∇_p considera derivadas respecto a las coordenadas horizontales, con p constante, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial p}[\nabla_p z] = \nabla_p \frac{\partial z}{\partial p}$$

y considerando la relación hidrostática, $dp = -\rho g dz$ se tiene

$$\nabla_p \frac{\partial z}{\partial p} = -\nabla_p \frac{1}{\rho g} = -\frac{1}{g} \nabla_p \frac{RT}{p} = -\frac{R}{gp} \nabla_p T,$$

con lo que se concluye

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial p} = -\frac{R}{pf} \vec{k} \times \nabla_p T.$$

Considerando que $\partial \vec{v} / \partial z$ es opuesta a $\partial \vec{v} / \partial p$ (¿porqué?), se tiene que el cortante de la velocidad que se produce con la ganancia de altura z se orienta según el gradiente de T rotado ciclónicamente (de modo antihorario en el hemisferio Norte y horario en el hemisferio Sur).

Por otra parte, las curvas $T = \text{cte}$ serán líneas de flujo de $\partial \vec{v} / \partial p$ o $\partial \vec{v} / \partial x$ (ver Fig. 6).

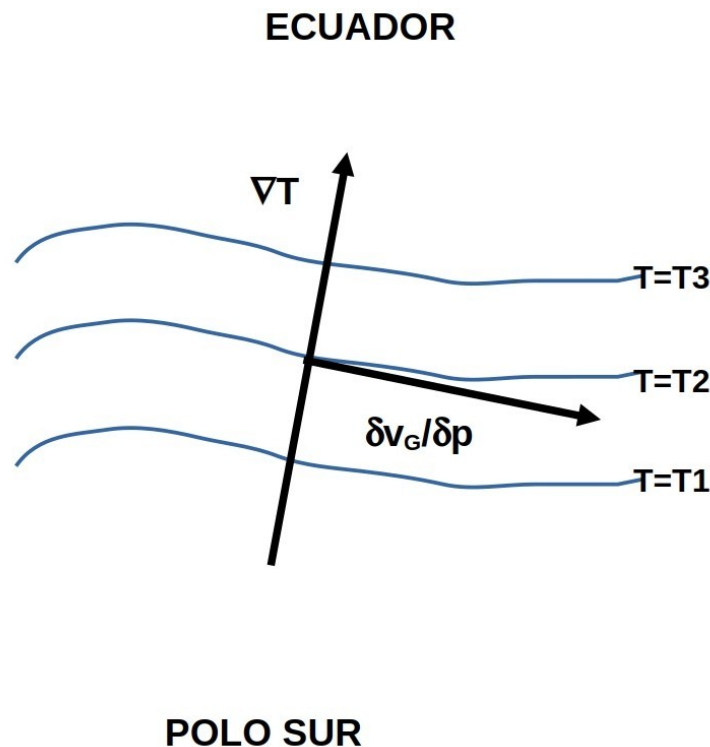


Figura 6. Líneas de T cte a determinado nivel de presión, gradiente de temperaturas y cortante del viento geostrófico (caso Hemisferio Sur)

La Fig. 8 muestra los promedios climáticos desde 1991 hasta 2020 para los meses de enero y julio, del viento de oeste a este, llamado viento zonal, en el nivel de 200hPa. Este nivel es equivalente a un nivel entre 10000m (en latitudes altas) y 12000m (en latitudes bajas) de altura sobre el nivel del

mar, Se encuentran fuertes vientos de oeste a este entre las latitudes tropicales y las latitudes altas. Estos vientos son mas fuertes en el Hemisferio de invierno. Estos vientos se deben a la acumulación de cortante vertical asociada a los gradientes Sur-Norte de temperatura, y se asocian a los procesos de inestabilidad baroclínica que discutiremos a continuación. Veremos que los procesos de inestabilidad baroclínica contribuyen a regular los contrastes térmicos que les dieron origen.

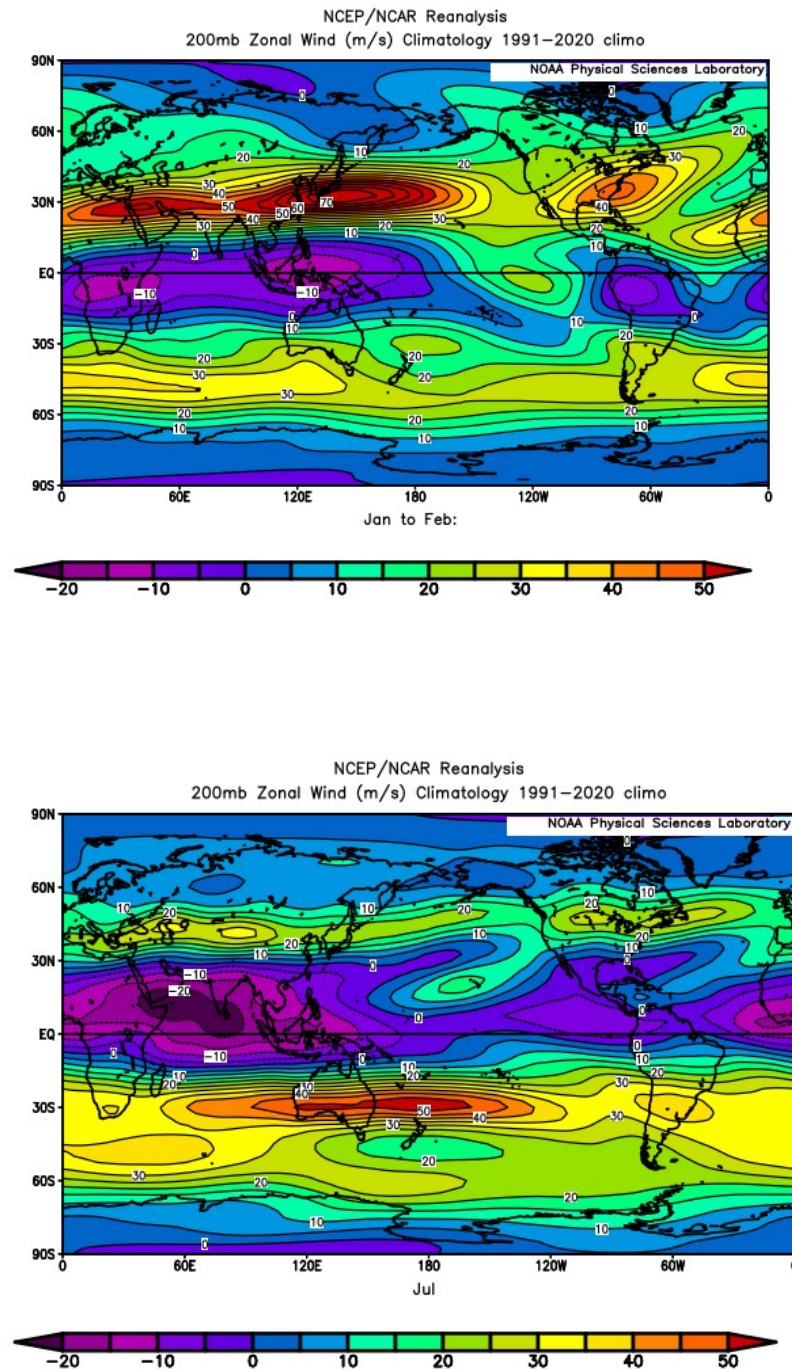


Fig. 7. Viento zonal en 200hPa para los meses de Enero (panel superior) y Julio (panel inferior), promediados entre 1991 y 2020. Fuente: Physical Sciences Laboratory de NOAA; EEUU, hecho disponible en: <https://psl.noaa.gov/cgi-bin/data/composites/printpage.pl>

VIENTO TÉRMICO E INESTABILIDAD BAROCLÍNICA

El fuerte gradiente térmico entre latitudes tropicales y polares, al rotar ciclónicamente, genera fuertes cortantes de oeste a este en ambos hemisferios,. La acumulación de estos cortantes en altura genera fuertes corrientes de oeste a este en la alta tropósfera entre 5000 y 12000 metros de altura.

Es especialmente interesante que este cortante se asocia con una inestabilidad que genera los centros de baja y alta presión propios de la variabilidad atmosférica sinóptica en latitudes sub tropicales y extra tropicales.

En latitudes no tropicales, la ondulaciones Norte-Sur delas corrientes en choro, generan alternancias de vorticidad ciclónica (horaria en el Hemisferio Sur, y antihoraria en el Hemisferio Norte) con vorticidad anticiclónica. Esto, unido a la intensidad de la circulación de oeste a este debida al viento térmico, genera fuertes transportes de vorticidad.

Para comprender un poco mejor, podemos escribir la ecuación de vorticidad absoluta cuasi geostrófica:

La vorticidad según la vertical del lugar del movimiento absoluto, ξ_A puede aproximarse por la vorticidad del viento relativo a la tierra, que es aproximadamente igual al viento geostrófico, mas la vorticidad el movimiento planetario según la vertical del lugar, que será igual al parámetro de Coriolis; de modo que

$$\xi_A = \xi_R + \xi_T \quad ; \text{ siendo } \xi_R = \vec{k} \cdot \nabla \wedge \vec{v}_G \quad \text{y} \quad \xi_T = f = 2 \Omega \sin(\theta)$$

La ecuación de vorticidad “cuasigeostrófica” es:

$$\frac{\partial \xi_R}{\partial t} + \vec{v}_g \cdot \nabla_p \xi_G + \vec{v}_G \cdot \nabla_p f = -(f + \xi_G) \nabla_p \cdot \vec{v}$$

Esta ecuación es consistente con el teorema de Kelvin aplicado al movimiento absoluto: el rotor debe aumentar o disminuir dentro de una curva materialmente arrastrada de modo de compensar las contracciones o dilataciones de la misma, explicadas por la divergencia. Por otra parte, debe notarse que aunque para el cálculo de muchos términos se considera la aproximación geostrófica, se acepta que hay divergencia no nula; lo que incluye contemplar un movimiento a geostrófico, aunque este sea de menor orden (esta es una ecuación “cuasigeostrófica”).

Si “v” es le viento meridional (según e_θ), y si se considera que f solo tiene gradiente meridional; definiendo β de modo que

$$\nabla_p f = \beta \vec{e}_\theta \quad ,$$

y si ademas suponemos $f + \xi_G \approx f$, llegamos a

$$\frac{\partial \xi_R}{\partial t} + \vec{v}_g \cdot \nabla_p \xi_G + v \cdot \beta = -f \cdot \nabla_p \cdot \vec{v}$$

El término $\vec{v}_g \cdot \nabla_p \xi_G$ es el transporte de vorticidad del movimiento relativo.

El término $v \cdot \beta$ es el transporte de vorticidad planetaria.

El término $-f \cdot \nabla_p \cdot \vec{v}$ es la contribución de la divergencia a la tendencia de vorticidad.

Argumentos basados en la ecuación omega, discutidos en Necco (1980) y Holton (2012), establecen que debe haber un balance entre estos tres términos, siendo la tendencia (derivada local) de menor orden.

En el esquema de la Fig, 8, se muestra una ondulación en las corrientes en chorro (es decir, en niveles altos de la tropósfera), en el Hemisferio Sur. La ondulación pasa de vorticidad negativa (ciclónica) a positiva (anticiclónica). Esto implica un término $\vec{v}_g \cdot \nabla_p \xi_G$ fuertemente positivo en la zona intermedia entre los máximos locales de vorticidad ciclónica y anticiclónica. Pero dado que b es siempre positivo, y que entre los máximos locales de vorticidad ciclónica y anticiclónica la velocidad meridional resulta hacia el Sur, negativa, el efecto beta, $\vec{v} \cdot \beta$ es de signo opuesto.

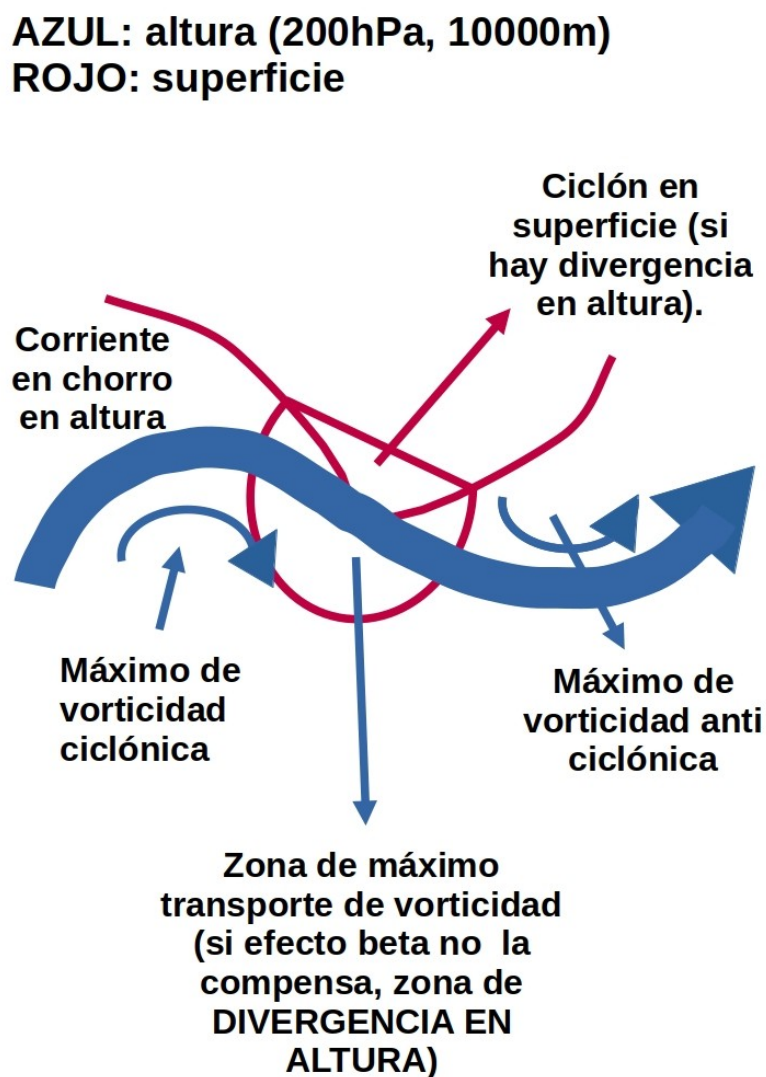


Figura 8. Onda de las corrientes en chorro en el Hemisferio Sur

Para ondas de longitud entre 2000 y 4000 km; el efecto beta $\vec{v} \cdot \beta$ NO COMPENSA el transporte relativo $\vec{v}_g \cdot \nabla_p \xi_G$, lo que genera un término $-f \cdot \nabla_p \cdot \vec{v}$ positivo. Como en el Hemisferio Sur f es negativo; esto implica que la divergencia sera positiva en este rango de longitudes de onda. Como nos encontramos en altura, la divergencia de asociara a movimiento vertical ascendente desde la superficie, lo que a su vez se asocia a la formación de un centro ciclónico en superficie, ubicado entre los máximos ciclónicos y anticiclónicos de altura.

El resultado son la formación de frentes, los intercambios de masa entre latitudes altas y bajas y se conoce como **INESTABILIDAD BAROCLÍNICA**. Regula el contraste térmico entre latitudes altas y bajas, genera la mayor parte de las precipitaciones en latitudes no tropicales, y cambios locales de temperatura de superficie en escalas de algunos días.

La estructura vertical de centros ciclónicos en superficie desplazados un cuarto de longitud de onda al este respecto a los centros de altura es propia de la formación de ciclones baroclínicos o dinámicos.

Dos comentarios:

- En el Hemisferio Norte, el pasaje en altura de vorticidad ciclónica a anticiclónica implica transportes de vorticidad de signo opuesto al hemisferio Sur. El efecto beta entre vorticidades ciclónicas y anticiclónicas es igualmente de signo opuesto, pero también lo es el factor f que afecta a la divergencia: el diagnostico de divergencia en altura produce el mismo resultado que el de la discusión precedente.

- En ondas de longitud superior a los 6000 km, el efecto beta prevalece sobre el transporte de vorticidad relativa, por lo que para estas longitudes no se produce inestabilidad baroclínica. Se tendrá una dinámica de Ondas de Rossby.

La inestabilidad baroclínica es el proceso mas importante de la escala sinóptica, y la onda de Rossby es el proceso mas importante de la escala planetaria.

PROCESOS TERMODINÁMICOS RELEVANTES A LA MESO ESCALA

INESTABILIDAD VERTICAL

La inestabilidad vertical debida a la flotación neta de una parcela de aire, se produce cuando al elevarse esta resulta menos densa que su entorno. En primer lugar estudiaremos un criterio de inestabilidad “absoluta”, es decir, inestabilidad a desplazamientos verticales de las parcelas de aire aun infinitesimales.

Suponiendo que la elevación es adiabática, y que la parcela adquiere la presión del medio al elevarse, combinando la ecuación del primer principio con la relación hidrostática, se tiene que la parcela conserva la magnitud $s \equiv c_p T + gz$.

en efecto, en caso de un proceso adiabático el primer principio permitiría plantear:

$$c_p \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho} \omega = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt},$$

o bien la relación diferencial $c_p dT = \frac{1}{\rho} dp$

considerando la relación hidrostática, $dp = -\rho g dz$, llegamos a

$$c_p dT + g dz = 0$$

Como se expresó en el ejercicio propuesto antes, esto es equivalente a expresar

$$d\theta = 0, \text{ con } \theta \equiv (p_0/p)^{R/c_p} T$$

Consideraremos un ambiente con perfiles verticales de T y s , $\bar{T}(z)$ y $\bar{s}(z)$, conocidos: la parcela, al elevarse, perturba el valor ambiental. El ambiente será estable o inestable según s ambiental crezca o decrezca con la altura. Por ejemplo, si $\bar{s}(z)$ crece con la altura, la parcela que se eleva viene con un valor de s inferior al del ambiente que la rodea. Como este está a la misma cota z , la parcela deberá tener menor temperatura que la del ambiente; y al tener también la misma presión, tendrá superior densidad y tenderá a caer.

El decrecimiento con la altura de $\bar{s}(z)$ es importante en niveles muy próximos a un suelo mas caliente que el aire sobre el. En este caso, la inestabilidad vertical térmica es la principal fuente de turbulencia para la capa límite atmosférica.

Caso saturado

La condición adiabática puede ser razonable para pequeños ascensos de aire seco. En el caso de aire con vapor de agua, un ascenso de aire adiabático, con la consiguiente disminución de temperatura, podría implicar la condensación de vapor de agua, al llegar su presión parcial a condiciones de condensación (aire saturado). Se tendrá entonces una importante realización de calor de cambio de fase. Para mantener una propiedad que se conserve en ascensos adiabáticos, excepto en lo referente al calor de cambio de fase que se libera al condensar vapor, se define la energía estática húmeda,

$$h \equiv c_p T + gz + Lq$$

La condensación disminuye q , pero aumenta $c_p T$ en una cantidad igual al calor de cambio de fase realizado. De este modo, para el aire saturado, el criterio de inestabilidad a desplazamientos verticales aun infinitesimales es que $h(z)$ sea decreciente con la altura (caso inestable) o creciente con la altura (estable).

Inestabilidad térmica respecto a grandes desplazamientos verticales.

En determinadas condiciones, el perfil vertical total en un punto dado del globo es inestable si se tienen desplazamientos verticales desde niveles próximos a la superficie terrestre suficientemente grandes.

Conviene definir, en cada nivel de una columna vertical de la atmósfera, la energía estática húmeda de saturación, definida como

$$h^* \equiv c_p T + gz + Lq_{sat} ,$$

donde $h^* \equiv c_p T + gz + Lq_{sat}$ es la humedad de saturación a la presión y temperatura a la que se encuentra el aire. Notar que esta no es la humedad que efectivamente podría tener el aire.

La condición de estabilidad o inestabilidad condicional es que el valor de h próximo a la superficie terrestre supere el valor de $h^*(z)$ en algún nivel z_1 , y que en algún nivel inferior a este z_1 , la expansión adiabática de la parcela le permita llegar a la saturación (se supone que la parcela conserva su contenido de agua específico durante el ascenso). A continuación elaboramos el razonamiento.

Supongamos que una parcela próxima al suelo, relativamente húmeda pero no saturada, asciende y se satura. Si no se mezcla con aire del entorno, y el proceso es adiabático excepto por la realización de calor latente, mantendrá el valor de h original, h_{orig} . En determinado nivel la parcela tendrá una energía estática húmeda superior a la energía estática húmeda del ambiente al mismo nivel. Se tendrá

$$h_{orig} > h^*$$

$$c_p T_{parcela} + gz + Lq_{parcela} > c_p T_{ambiente} + gz + Lq_{sat}(T_{ambiente}, p) ,$$

$$c_p T_{parcela} + Lq_{parcela} > c_p T_{ambiente} + Lq_{sat}(T_{ambiente}, p)$$

Supongamos que además la parcela saturó. Se tendrá entonces que $T_{parcela} > T_{ambiente}$, pues a igualdad de presiones, la humedad de saturación es creciente con la temperatura. (de ser la temperatura de la parcela menor que la del ambiente, tanto $q_{parcela}$ como $T_{parcela}$ serían inferiores a las respectivas variables del ambiente; y sería absurda la suposición $h_{orig} > h^*$).

Si $T_{parcela} > T_{ambiente}$, y la presión de la parcela es la misma que la del medio ambiente, la parcela es mas liviana y deberá continuar subiendo.

De modo que el desplazamiento hacia arriba continúa por flotación neta (inestabilidad) a condición de que la parcela llegue a subir a un nivel en el que h_{orig} "cruce" la línea $h^*(z)$ ("nivel de convección libre", o "free convection level", FCL), y que la misma esté saturada (que halla subido su "lifting condensation level", (LCL), nivel en el que la expansión adiabática la lleva a una presión y temperatura y en la que la humedad original es la de saturación). Cuando al ascender vuelve a

cruzar la línea $h^*(z)$, deja de darse la condición $h_{orig} > h^*$, este es el “nivel de no flotación”, (NBL).

El razonamiento es algo simplificado en el sentido de que la parcela sí podría mezclar algo de aire en su ascenso.

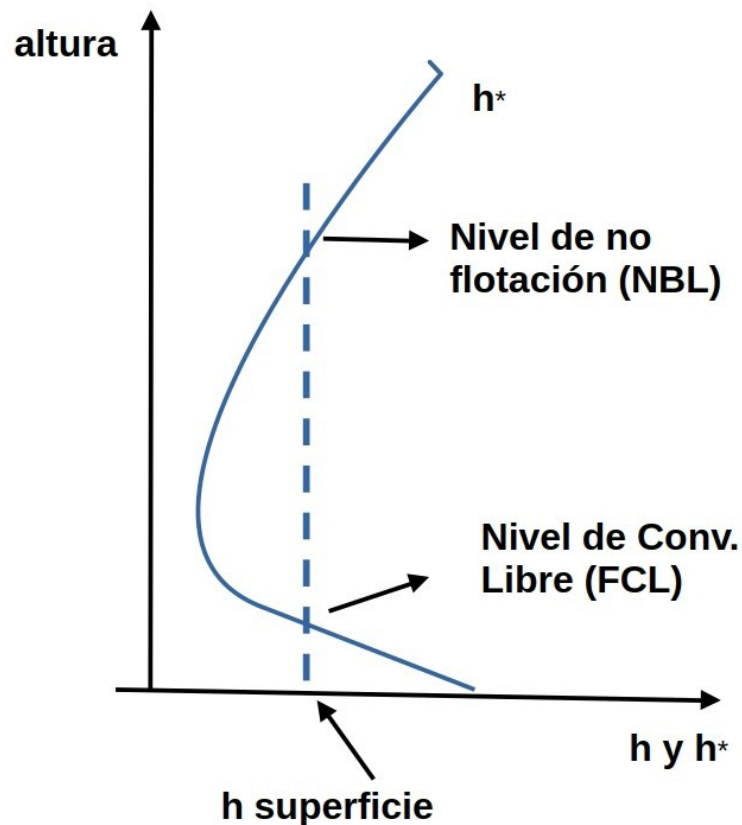


Figura 9: ejemplo de situación condicionalmente inestable. Se asume que el nivel de condensación está entre la superficie terrestre y al nivel de convección libre.

Energía Convectiva Potencial disponible (CAPE).

La aceleración vertical de una parcela que flota, es:

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}$$

suponemos que la parcela adquiere la presión del ambiente. Su densidad es por otra parte la densidad del ambiente mas una perturbación,

$$\rho = \bar{\rho} + \rho'$$

Por otra parte, el ascenso de la partícula no es un movimiento de gran escala hidrostático, pero suponemos que el estado básico si es hidrostático;

$$-\bar{\rho}g - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0$$

Se tiene entonces

$$(\bar{\rho} + \rho') \frac{dw}{dt} = -\bar{\rho}g - \rho'g - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\rho'g ;$$

dividiendo entre

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) \frac{dw}{dt} = -\frac{\rho'}{\bar{\rho}}g$$

y considerando $1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx 1$

se llega a una relación para el calculo de la velocidad vertical,

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{\rho'}{\bar{\rho}}g$$

el segundo término es la diferencia entre el peso de la partícula y la presión hidrostática del ambiente; y se denomina “flotación neta” o “buoyancy”.

Asimienta que la parcela y el ambiente están a la misma presión, la ecuación del estado del gas ideal permite probar:

$$-\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{\rho_{parcela} - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{T_{parcela} - \bar{T}(z)}{\bar{T}(z)} ,$$

con lo cual la flotación neta se puede expresar como:

$$b \equiv \frac{T_{parcela} - \bar{T}(z)}{\bar{T}(z)} g ,$$

y la velocidad vertical obedece a la relación

$$\frac{dw}{dt} = \frac{T_{parcela} - \bar{T}(z)}{\bar{T}(z)} g$$

la integración vertical de esta ecuación entre el nivel de convección libre y el de no flotación (los niveles de flotación neta positiva), permite demostrar:

$$\frac{w_{max}}{2} = \int_{FCL}^{NBL} \frac{T_{parcela} - \bar{T}(z)}{\bar{T}(z)} g dz$$

la expresión a la derecha se denomina energía potencial disponible debido a la convección (CAPE).

El valor de la velocidad máxima obtenido de esta relación se correlaciona con la real, si bien lo sobre estima debido a :

- en su ascenso la parcela toma masa del ambiente y sus propiedades se mezclan con las de este, disminuyendo la diferencia $T_{parcela} - \bar{T}(z)$ que resulta del valor correspondiente, en cada altura, a una expansión adiabática de la parcela desde su nivel original de la parcela hasta el nivel z .
- el agua líquida producto de la condensación contribuye con algo de flotación negativa.
- Se tiene fricción.

De todos modos la CAPE y la elevación del NBL son claros indicadores de probables tormentas de mesoescala convectivas. Las tormentas convectivas marinas tropicales tienen valores de CAPE 1 orden de $500 \text{ m}^2/\text{s}^2$; en zonas continentales húmedas y de gran potencial convectivo, como el medio este norteamericano o la Cuenca del Río de la Plata, pueden llegar a valores mayores. Valores de CAPE de 4 cifras y elevaciones del NBL hasta cerca del tope de la tropósfera **deben poner en estado de alerta máxima a un servicio meteorológico.**

Ejemplo de celdas convectivas (Holton 2012).

La condición antedicha se puede asociar con eventos extremos de viento, generalmente un ubicaciones puntuales, debido a procesos asociados a superceldas convectivas como frentes de ráfagas, downbursts o tornados. A continuación damos una descripción elemental de los procesos superceldas convectivas, siguiendo a Holton (2012)

El autor propone como ecuación de cantidad de movimiento aproximadamente

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + b \vec{k}$$

donde b es la flotación neta y $\vec{k}$ es la vertical del lugar.

Utilizando la relación

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}$$

el vector vorticidad es $\vec{\omega} \equiv \nabla \times \vec{v}$. Combinado las relaciones anteriores se llega a

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \vec{v} \times \vec{\omega} + b \vec{k}$$

tomando el rotor de esta ecuación se llega a la ecuación de vorticidad

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) + \nabla \times (b \vec{k})$$

Notar que el segundo término a la derecha de la igualdad, rotor de la flotación, orientada como vector según la vertical, solo produce vorticidad horizontal.

Multiplicando esta ecuación por el versor $\vec{k}$, llegamos a una ecuación para la componente vertical de la vorticidad, $\xi \equiv \vec{k} \cdot \vec{\omega}$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \vec{k} \cdot \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega})$$

Holton linealiza esta ecuación en torno a un estado básico, constituido por un flujo horizontal con cortante vertical, $\vec{v} = \bar{u}(z)\vec{e}_1$, y concluye que la principal contribución a la derivada total de la perturbación de la vorticidad vertical es

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} = \frac{\partial w'}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \text{transporte de } \xi' \text{ debido a } \bar{u}$$

El primer sumando a la derecha de la igualdad representa la inclinación de la vorticidad horizontal del flujo básico, debido a variaciones horizontales de la velocidad vertical (“tilting”).

En caso de tener una corriente convectiva ascensional, llamada updraft, se tiene $\partial w' / \partial y > 0$ a un lado del updraft, y $\partial w' / \partial y < 0$ al otro. Eso hace tiltings opuestos de la vorticidad horizontal del flujo básico, generando vórtices de vorticidad vertical, opuestos, a izquierda y derecha del updrafts. La rotación de estos vórtices puede ser intensa, y los constituye en centrifugadores ubicados a alturas medias de la tropósfera. De este modo, estos centrifugadores generan dos updrafts adyacentes al original. Los mismos generan corrientes descendentes en sus regiones adyacentes. Las mismas, combinadas con la fricción del agua que precipita sobre el updraft original, hace que este se transforme en un fuerte downdraft, cerrando dos celdas intensas juntos con los nuevos updrafts adyacentes. El proceso puede repetirse con estos, generando varias celdas.

El proceso es muy eficaz dando vuelta capas altas de aire relativamente frío y capas bajas de aire relativamente cálido y húmedo (recordemos que estamos en una situación de inestabilidad vertical). Las velocidades de estos updrafts y downdrafts pueden ser muy intensas, del orden de 10m/s. Un downdraft muy intenso puede constituir un “down burst”; al llegar al suelo, este aire, mucho mas frío que el del ambiente a esa altura dobla horizontalmente en presencia del suelo, y se concentra en algunos cientos de metros sobre el mismo, generando vientos de varias decenas de m/s.

Paralelamente a esto, la proximidad entre updrafts y downdrafts genera fuertes gradientes horizontales de buoyancy, lo que puede generar intensos vórtices horizontales concentrados, que pueden llegar a ser tornados. El posible tilting de los mismos puede hacer que los mismos lleguen a tierra.

No es posible pronosticar con gran antelación los lugares precisos donde estos procesos tan concentrados ocurran, o si en efecto ocurrirán. Sí es posible pronosticar con muchas horas de anticipación condiciones que los hagan especialmente probables en un área de algunas decenas de miles de kilómetros cuadrados. Un radar dopler puede detectar tornados a distancias de hasta unos 100km, lo que permite realizar predicciones de unos 10 minutos de plazo y dar comunicaciones de urgencia por celular a la población de la región amenazada. La detección de descargas atmosféricas detecta también las superceldas violentas, y en base a las mismas es posible emitir avisos de urgencia con una anticipación algo superior, de 15 minutos.

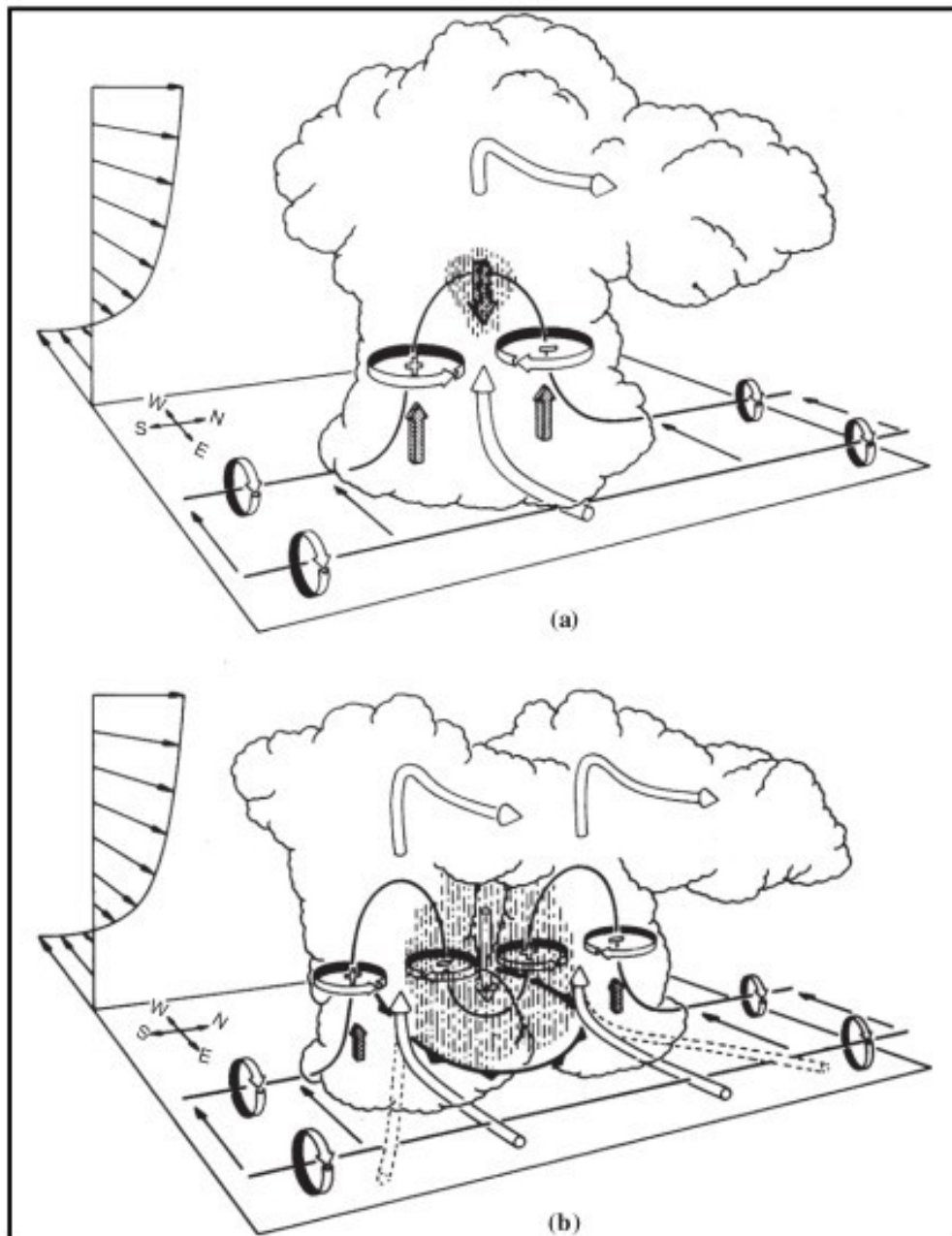


FIGURE 9.12 Development of rotation and splitting in a supercell storm with westerly mean wind shear (shown by storm relative wind arrows in the upper left corner of each panel). Cylindrical arrows show the direction of cloud relative air flow. Heavy solid lines show vortex lines with a sense of rotation shown by circular arrows. Plus and minus signs indicate cyclonic and anticyclonic rotation caused by vortex tube tilting. Shaded arrows represent updraft and downdraft growth. Vertical dashed lines denote regions of precipitation. (a) In the initial stage, the environmental shear vorticity is tilted and stretched into the vertical as it is swept into the updraft. (b) In the splitting stage, downdraft forms between the new updraft cells. The arced line with triangles in the lower middle of (b) at the surface indicates downdraft outflow at the surface. (After Klemp, 1987. Used with permission from *Annual Reviews*.)

Figura 10. esquema de una supercelda de acuerdo a Holton (2012).

Referencias

2012, Holton J. R., Hakim G. J., An Introduction to Dynamic Meteorology, Elsevier, Academic Press, 532 pp.

1980, Necco G. V., Curso de Cinemática y Dinámica de la Atmósfera,. Eudeba, 287 pp



James R. Holton (1938-2004).