

Notas para Curso de Posgrado de Mesoescala

Universidad de la República, Facultad de Ingeniería

2 0 2 3

Material preparado por Gabriel Cazes Boezio

ACELERACIÓN DE CORIOLIS

La velocidad angular de la tierra es $\Omega \vec{K}$, \vec{K} es el versor colineal al eje de rotación, orientado desde el polo sur al polo norte, y $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia angular de la rotación terrestre. T es el período de rotación terrestre (86400s).

En un punto dado, la misma puede descomponerse proyectarse según el versor vertical local \vec{k} (dirección radial), y el versor meridional \vec{e}_θ (orientado de norte a sur);

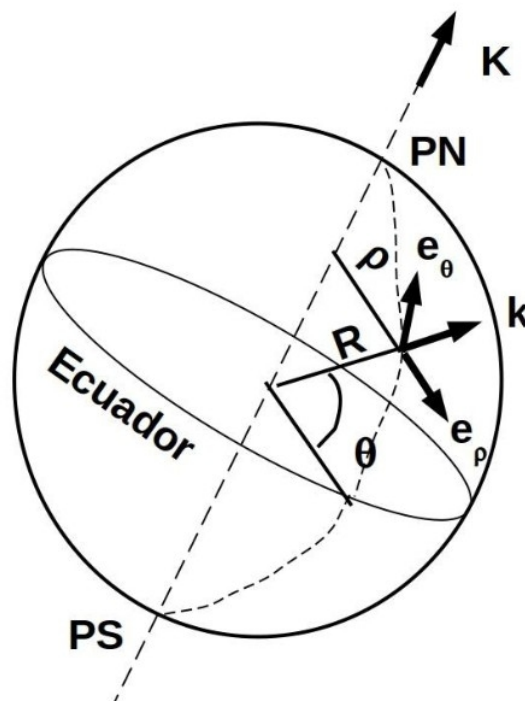
$$\Omega \vec{K} = \Omega \sin \theta \vec{k} + \Omega \cos \theta \vec{e}_\theta$$

siendo θ la latitud.

Notamos que en caso de movimientos relativos cuasi bidimensionales, la aceleración de Coriolis asociada a la componente horizontal de la velocidad relativa, $\vec{v} = v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_\theta \vec{e}_\theta$ tiene una componente horizontal asociada con la componente de $\Omega \vec{K}$ según la vertical del lugar,

$$a_{CH} = 2 \Omega \sin \theta \vec{k} \times \vec{v}$$

mientras que la componente según \vec{e}_θ de $\Omega \vec{K}$ da una aceleración de componente vertical que de hecho es despreciable frente a g (cuatro órdenes de magnitud menor).



Aceleración de Transporte

la aceleración de transporte de la rotación terrestre es

$$\vec{a}_T = \Omega^2 \cdot R_{\text{tierra}} \cos(\theta) \vec{e}_\rho ,$$

donde \vec{e}_ρ es el versor radial de coordenadas cilíndricas, con eje en el eje de rotación de la tierra.

la misma puede descomponerse según los versores \vec{e}_θ y \vec{k} . El vector resultante es coplanar con la aceleración de gravedad, y de módulo mucho menor al mismo (al menos tres ordenes de magnitud menor). Se considera entonces que la fuerza de masa vertical de la gravedad incluye este efecto. Esto implica también desviar ligeramente las direcciones verticales y horizontales a las que referimos aquí; dicha desviación es de muy poca significación como para cambiar el ángulo de latitud que se utiliza en los cálculos de proyecciones verticales y horizontales de fuerzas (ver Necco 1980).

NÚMERO DE ROSSBY Y ESCALAS DE LOS MOVIMIENTOS DE ATMÓSFERA.

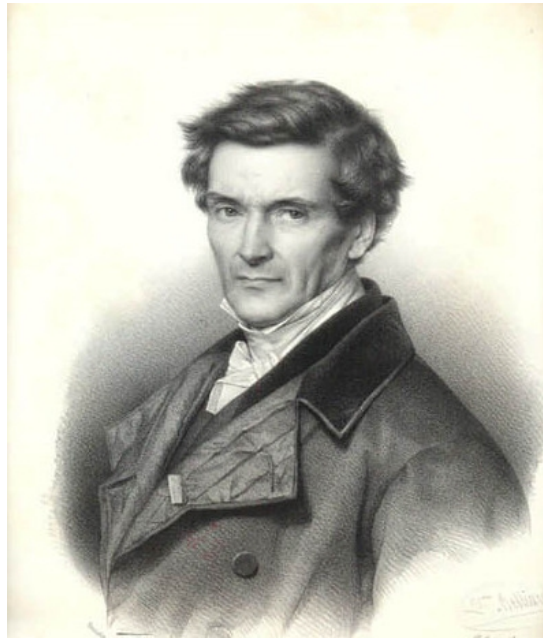
La importancia relativa de la aceleración de Coriolis puede evaluarse en base a la variable adimensionada de Rossby: si \mathbf{U} es una velocidad representativa de un proceso, y \mathbf{L} una longitud también representativa,

$$Ro \equiv \frac{U}{fL} ,$$

donde $f \equiv 2\Omega \sin \theta$ es la componente de la velocidad angular respecto a la vertical del lugar.

Bajos valores de \mathbf{Ro} implican que la aceleración de Coriolis prevalece frente a la aceleración relativa, mientras que elevados valores de \mathbf{Ro} implican que [la misma es irrelevante](#).

Para valores de \mathbf{Ro} del orden de **0.1**, se tiene la **escala sinóptica**, y para valores un orden de magnitud inferiores a estos, la **escala planetaria**. Corresponden estas escalas en conjunto a la **Macroescala**. Para valores entre **1** y **100**, se tiene la **Mesoescala**, y para valores superiores, la micro escala. Para valores de \mathbf{Ro} del orden de la unidad, la aceleración de **Coriolis** es importante pero no prevalece. Para valores del orden de **10** y superiores, se vuelve despreciable.



Gaspard Gustave Coriolis (1792-1843)

9



Rue G. G. Coriolis, Paris.

ECUACIONES BÁSICAS EN ESCALA SINÓPTICA ($R_0 \ll 1$)

Las ecuaciones de cantidad de movimiento según la horizontal local son:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_H p - 2\Omega \sin(\theta) \vec{k} \times \vec{v}$$

donde \vec{k} es la vertical del lugar, y \vec{v} la velocidad horizontal relativa a la tierra. El operador ∇_H representa la componente del gradiente según un plano localmente horizontal, consideramos a la coordenada z de elevación como coordenada vertical. De este modo el cálculo de ∇_H implica realizar derivadas de coordenadas horizontales dejando z constante. Ω es la frecuencia angular de la rotación de la tierra, y f es la latitud del lugar. El segundo término a la derecha de la igualdad es la componente horizontal de la aceleración de Coriolis, **solo debe considerarse en caso de números de Rossby no muy elevados**. Notar que $\Omega \sin(\phi) \vec{k}$ es la componente de la velocidad de rotación de la tierra según la vertical del lugar.

Los movimientos de escala sinóptica o mayores son cuasi bidimensionales, por lo que la velocidad vertical es pequeña. Sin embargo juega roles muy importantes en diversos procesos, y no la depreciamos. Si se desprecia, en estas escalas, la aceleración vertical frente a g , con lo que la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección vertical se reduce a la relación hidrostática (diferencial),

Notar que a coordenadas horizontales e instante fijos, se tiene una relación biunívoca entre la presión y la elevación z (si bien es monótona decreciente, es decir, no es directa). Como consecuencia, es posible tomar p como coordenada vertical (p disminuiría al aumentar la altura). Se demuestra entonces (Necco 1980)

$$\frac{1}{\rho} \nabla_H p = g \nabla_p z$$

donde el operador ∇_p representa el gradiente considerando variaciones de las coordenadas horizontales, pero dejando p constante en lugar de $1/\rho$. De este modo la ecuación de cantidad de movimiento horizontal queda:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla_p gz - 2\Omega \sin(\theta) \vec{k} \times \vec{v}$$

Notar que $1/\rho$ fue sustituida por la constante g .

Por otra parte el rol de la velocidad vertical lo juega ahora $\omega \equiv \frac{dp}{dt}$

Se demuestra que la ecuación de balance de masa resulta:

$$\nabla_p \cdot \vec{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

Finalmente, el primer principio de la termodinámica se puede establecer como

$$c_p \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho} \omega + \dot{Q} \quad \text{o bien} \quad c_p \frac{dT}{dt} = \frac{RT}{p} \omega + \dot{Q}$$

siendo \dot{Q} el calentamiento neto por unidad de tiempo y de masa. El primer término a la derecha representa el aumento de temperatura por compresión adiabática. R es la constante del aire en la ecuación de estado de un gas ideal.

Ejercicio: a) mostrar que en una compresión adiabática, se conserva $\theta \equiv (p_0/p)^{R/c_p} T$, p_0 es una presión de referencia constante. b) Si se cumple la relación hidrostática, demostrar que la conservación de θ equivale a la conservación de $s \equiv c_{pT} + gz$

Las ecuaciones, junto a la ecuación de estado, constituyen un sistema completo de pronóstico para v , T y r .

CASO LÍMITE: BALANCE GEOSTRÓFICO

En caso de que la aceleración relativa se desprece frente a la aceleración de Coriolis, se tendrá la relación geostrófica,

$$g \nabla_p z = -2\Omega \sin(\theta) \vec{k} \times \vec{v}$$

de lo que se deduce

$$\vec{v} = \frac{g}{2\Omega \sin(\theta)} \vec{k} \times \nabla_p z ; \text{ también se expresa como } \vec{v} = \frac{g}{f} \vec{k} \times \nabla_p z , \text{ con } f \equiv 2\Omega \sin(\theta)$$

Notar que esta relación permite el diagnóstico del campo de velocidades, pero ya no el pronóstico. Además implica aceleración relativa nula. Por otra parte, si no se toma en cuenta la variación geográfica del parámetro f , se tiene un flujo horizontal con función corriente, y por ende no divergente. Esto impediría el movimiento vertical. Estas deficiencias se llaman paradoja geostrófica. De hecho, el campo de velocidades en flujos de bajos números de Rossby es aproximadamente geostrófico, pero con apartamientos del geostrofismo pequeños pero que habilitan la existencia de aceleración relativa, movimiento no divergente (aunque cuasi no divergente) y movimiento vertical.

Si derivamos la relación geostrófica respecto a la coordenada p , obtenemos

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{g}{f} \vec{k} \times \nabla_p z \right] = \frac{g}{f} \vec{k} \times \frac{\partial}{\partial p} [\nabla_p z]$$

considerando que p es la coordenada vertical, y el operador ∇_p considera derivadas respecto a las coordenadas horizontales, con p constante, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial p} [\nabla_p z] = \nabla_p \frac{\partial z}{\partial p}$$

y considerando la relación hidrostática, $dp = -\rho g dz$ se tiene

$$\nabla_p \frac{\partial z}{\partial p} = -\nabla_p \frac{1}{\rho g} = -\frac{1}{g} \nabla_p \frac{RT}{p} = -\frac{R}{gp} \nabla_p T ,$$

con lo que se concluye

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial p} = -\frac{R}{pf} \vec{k} \times \nabla_p T .$$

Considerando que $\partial \vec{v} / \partial z$ es opuesta a $\partial \vec{v} / \partial p$ (¿porqué?), se tiene que el cortante de la velocidad que se produce con la ganancia de altura z se orienta según el gradiente de T rotado ciclónicamente (de modo antihorario en el hemisferio Norte y horario en el hemisferio Sur).

INESTABILIDAD VERTICAL

La inestabilidad vertical debida a la flotación neta de una parcela de aire, se produce cuando al elevarse esta resulta menos densa que su entorno.

Suponiendo que la elevación es adiabática, y que la parcela adquiere la presión del medio al elevarse, combinando la ecuación del primer principio con la relación hidrostática, se tiene que la parcela conserva la magnitud $s \equiv c_p T + gz$.

en efecto, en caso de un proceso adiabático el primer principio permitiría plantear:

$$c_p \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho} \omega = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt},$$

o bien la relación diferencial $c_p dT = \frac{1}{\rho} dp$

considerando la relación hidrostática, $dp = -\rho g dz$, llegamos a

$$c_p dT + g dz = 0$$

Como se expresó en el ejercicio propuesto antes, esto es equivalente a expresar

$$d\theta = 0, \text{ con } \theta \equiv (p_0/p)^{R/c_p} T$$

Consideraremos un ambiente con perfiles verticales de T y s , $\bar{T}(z)$ y $\bar{s}(z)$, conocidos: la parcela, al elevarse, perturba el valor ambiental. El ambiente será estable o inestable según s ambiental crezca o decrezca con la altura. Por ejemplo, si $\bar{s}(z)$ crece con la altura, la parcela que se eleva viene con un valor de s inferior al del ambiente que la rodea. Como este está a la misma cota z , la parcela deberá tener menor temperatura que la del ambiente; y al tener también la misma presión, tendrá superior densidad y tenderá a caer.

Inestabilidad condicional.

La condición adiabática puede ser razonable para pequeños ascensos de aire seco. En el caso de aire con vapor de agua, un ascenso de aire adiabático, con la consiguiente disminución de temperatura, podría implicar la condensación de vapor de agua, al llegar su presión parcial a condiciones de condensación (aire saturado). Se tendrá entonces una importante realización de calor de cambio de fase. Para mantener una propiedad que se conserve en ascensos adiabáticos, excepto en lo referente al calor de cambio de fase que se libera al condensar vapor, se define la energía estática húmeda,

$$h \equiv c_p T + gz + Lq$$

La condensación disminuye q , pero aumenta $c_p T$ en una cantidad igual al calor de cambio de fase realizado.

Ahora bien, conviene definir, en cada nivel de una columna vertical de la atmósfera, la energía estática húmeda de saturación, definida como

$$h^* \equiv c_p T + gz + Lq_{sat},$$

donde $h^* \equiv c_p T + gz + Lq_{sat}$ es la humedad de saturación a la presión y temperatura a la que se encuentra el aire. Notar que esta no es la humedad que efectivamente podría tener el aire.

La condición de estabilidad o inestabilidad condicional es:

$$\frac{\partial h^*}{\partial z} < 0 \rightarrow \text{inestable} ; \quad \frac{\partial h^*}{\partial z} > 0 \rightarrow \text{estable}$$

Analicemos el caso $\partial h^*/\partial z < 0$. Supongamos que una parcela próxima al suelo, relativamente húmeda pero no saturada, asciende y se satura. Si no se mezcla con aire del entorno, y el proceso es adiabático excepto por la realización de calor latente, mantendrá el valor de h original, h_{orig} . En determinado nivel la parcela tendrá una energía estática húmeda superior a la energía estática húmeda del ambiente al mismo nivel. Se tendrá

$$h_{orig} > h^*$$

$$c_p T_{parcela} + gz + Lq_{parcela} > c_p T_{ambiente} + gz + q_{sat}(T_{ambiente}, p) ,$$

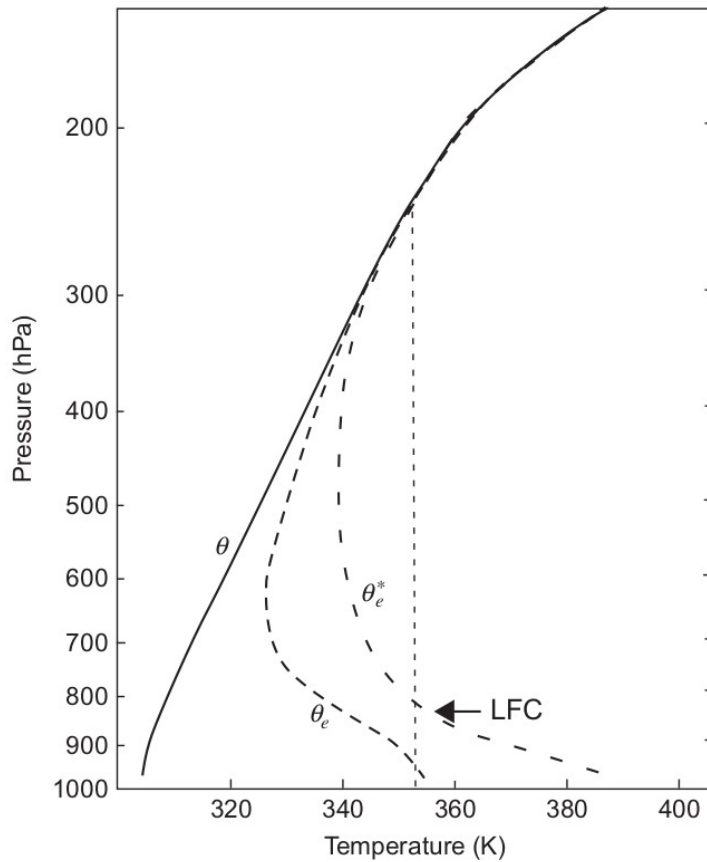
$$c_p T_{parcela} + Lq_{parcela} > c_p T_{ambiente} + q_{sat}(T_{ambiente}, p)$$

Supongamos que además la parcela saturó. Se tendrá entonces que $T_{parcela} > T_{ambiente}$, pues a igualdad de presiones, la humedad de saturación es creciente con la temperatura. (de ser la temperatura de la parcela menor que la del ambiente, tanto $q_{parcela}$ como $T_{parcela}$ serían inferiores a las respectivas variables del ambiente; y sería absurda la suposición $h_{orig} > h^*$).

Si $T_{parcela} > T_{ambiente}$, y la presión de la parcela es la misma que la del medio ambiente, la parcela es mas liviana y deberá continuar subiendo.

De modo que el desplazamiento hacia arriba continúa por flotación neta (inestabilidad) a condición de que la parcela llegue a subir a un nivel en el que h_{orig} "cruce" la línea $h^*(z)$ ("nivel de convección libre", o "free convection level", FCL), y que la misma esté saturada (que halla subido su "lifting condensation level", (LCL), nivel en el que la expansión adiabática la lleva a una presión y temperatura y en la que la humedad original es la de saturación). Cuando al ascender vuelve a cruzar la línea $h^*(z)$, deja de darse la condición $h_{orig} > h^*$, este es el "nivel de no flotación", (NBL).

El razonamiento es algo simplificado en el sentido de que la parcela sí podría mezclar algo de aire en su ascenso.



La aceleración vertical de una parcela que flota, es:

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}$$

suponemos que la parcela adquiere la presión del ambiente. Su densidad es por otra parte la densidad del ambiente mas una perturbación,

$$\rho = \bar{\rho} + \rho'$$

Por otra parte, el ascenso de la partícula no es un movimiento de gran escala hidrostático, pero suponemos que el estado básico si es hidrostático;

$$-\bar{\rho}g - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0$$

Se tiene entonces

$$(\bar{\rho} + \rho') \frac{dw}{dt} = -\bar{\rho}g - \rho'g - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\rho'g ;$$

dividiendo entre

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) \frac{dw}{dt} = -\frac{\rho'}{\bar{\rho}} g$$

y considerando $1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx 1$

se llega a una relación para el cálculo de la velocidad vertical,

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{\rho'}{\bar{\rho}} g$$

el segundo término es la diferencia entre el peso de la partícula y la presión hidrostática del ambiente; y se denomina “flotación neta” o “buoyancy”.

Asimismo que la parcela y el ambiente están a la misma presión, la ecuación del estado del gas ideal permite probar:

$$-\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{\rho_{parcela} - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{T_{parcela} - \bar{T}(z)}{\bar{T}(z)},$$

con lo cual la flotación neta se puede expresar como:

$$b \equiv \frac{T_{parcela} - \bar{T}(z)}{\bar{T}(z)} g,$$

y la velocidad vertical obedece a la relación

$$\frac{dw}{dt} = \frac{T_{parcela} - \bar{T}(z)}{\bar{T}(z)} g$$

la integración vertical de esta ecuación entre el nivel de convección libre y el de no flotación (los niveles de flotación neta positiva), permite demostrar:

$$\frac{w_{max}}{2} = \int_{FCL}^{NBL} \frac{T_{parcela} - \bar{T}(z)}{\bar{T}(z)} g dz$$

la expresión a la derecha se denomina energía potencial disponible debido a la convección (CAPE).

El valor de la velocidad máxima obtenido de esta relación se correlaciona con la real, si bien lo sobre estima debido a :

- en su ascenso la parcela toma masa del ambiente y sus propiedades se mezclan con las de este, disminuyendo la diferencia $T_{parcela} - \bar{T}(z)$ que resulta del valor correspondiente, en cada altura, a una expansión adiabática de la parcela desde su nivel original de la parcela hasta el nivel z.
- el agua líquida producto de la condensación contribuye con algo de flotación negativa.
- Se tiene fricción.

De todos modos la CAPE y la elevación del NBL son claros indicadores de probables tormentas de mesoescala convectivas. Las tormentas convectivas marinas tropicales tienen valores de CAPE 1 orden de 500m²/s²; en zonas continentales húmedas y de gran potencial convectivo, como el medio

este norteamericano o la Cuenca del Río de la Plata, pueden llegar a valores mayores. Valores de CAPE de 4 cifras y elevaciones del NBL hasta cerca del tope de la tropósfera **deben poner en estado de alerta máxima a un servicio meteorológico.**

La condición antedicha se puede asociar con eventos extremos de viento, generalmente un ubicaciones puntuales, debido a procesos asociados a superceldas convectivas como frentes de ráfagas, downbursts o tornados. A continuación damos una descripción elemental de los procesos superceldas convectivas, siguiendo a Holton (2012)

El autor propone como ecuación de cantidad de movimiento aproximadamente

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + b \vec{k}$$

donde b es la flotación neta y \vec{k} es la vertical del lugar.

Utilizando la relación

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}$$

el vector vorticidad es $\vec{\omega} \equiv \nabla \times \vec{v}$. Combinado las relaciones anteriores se llega a

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \vec{v} \times \vec{\omega} + b \vec{k}$$

tomando el rotor de esta ecuación se llega a la ecuación de vorticidad

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) + \nabla \times (b \vec{k})$$

Notar que el segundo término a la derecha de la igualdad, rotor de la flotación, orientada como vector según la vertical, solo produce vorticidad horizontal.

Multiplicando esta ecuación por el versor \vec{k} , llegamos a una ecuación para la componente vertical de la vorticidad, $\xi \equiv \vec{k} \cdot \vec{\omega}$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \vec{k} \cdot \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega})$$

Holton linealiza esta ecuación en torno a un estado básico, constituido por un flujo horizontal con cortante vertical, $\vec{v} = \bar{u}(z) \vec{e}_1$, y concluye que la principal contribución a la derivada total de la perturbación de la vorticidad vertical es

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} = \frac{\partial w'}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \text{transporte de } \xi' \text{ debido a } \bar{u}$$

El primer sumando a la derecha de la igualdad representa la inclinación de la vorticidad horizontal del flujo básico, debido a variaciones horizontales de la velocidad vertical (“tilting”).

En caso de tener una corriente convectiva ascendente, llamada updraft, se tiene $\partial w'/\partial y > 0$ a un lado del updraft, y $\partial w'/\partial y < 0$ al otro. Eso hace tiltings opuestos de la vorticidad horizontal del flujo básico, generando vórtices de vorticidad vertical, opuestos, a izquierda y derecha del updraft. La rotación de estos vórtices puede ser intensa, y los constituye en centrifugadores ubicados a alturas medias de la tropósfera. De este modo, estos centrifugadores generan dos updrafts adyacentes al original. Los mismos generan corrientes descendentes en sus regiones adyacentes. Las mismas, combinadas con la fricción del agua que precipita sobre el updraft original, hace que este se transforme en un fuerte downdraft, cerrando dos celdas intensas juntos con los nuevos updrafts adyacentes. El proceso puede repetirse con estos, generando varias celdas.

El proceso es muy eficaz dando vuelta capas altas de aire relativamente frío y capas bajas de aire relativamente cálido y húmedo (recordemos que estamos en una situación de inestabilidad vertical). Las velocidades de estos updrafts y downdrafts pueden ser muy intensas, del orden de 10m/s. Un downdraft muy intenso puede constituir un “down burst”, y al llegar al suelo, este aire, mucho más frío que el del ambiente a esa altura. Esto hace que la corriente descendente doble horizontalmente en presencia del suelo, y se concentre en algunos cientos de metros sobre el mismo, generando vientos de varias decenas de m/s.

Paralelamente a esto, la proximidad entre updrafts y downdrafts genera fuertes gradientes horizontales de buoyancy, lo que puede generar intensos vórtices horizontales concentrados, que pueden llegar a ser tornados. El posible tilting de los mismos puede hacer que los mismos lleguen a tierra.

No es posible pronosticar con gran antelación los lugares precisos donde estos procesos tan concentrados ocurran, o si en efecto ocurrirán. Sí es posible pronosticar con muchas horas de anticipación condiciones que los hagan especialmente probables en un área de algunas decenas de miles de kilómetros cuadrados. Un radar doppler puede detectar tornados a distancias de hasta unos 100km, lo que permite realizar predicciones de unos 10 minutos de plazo y dar comunicaciones de urgencia por celular a la población de la región amenazada. La detección de descargas atmosféricas detecta también las superceldas violentas, y en base a las mismas es posible emitir avisos de urgencia con una anticipación algo superior, de 15 minutos.

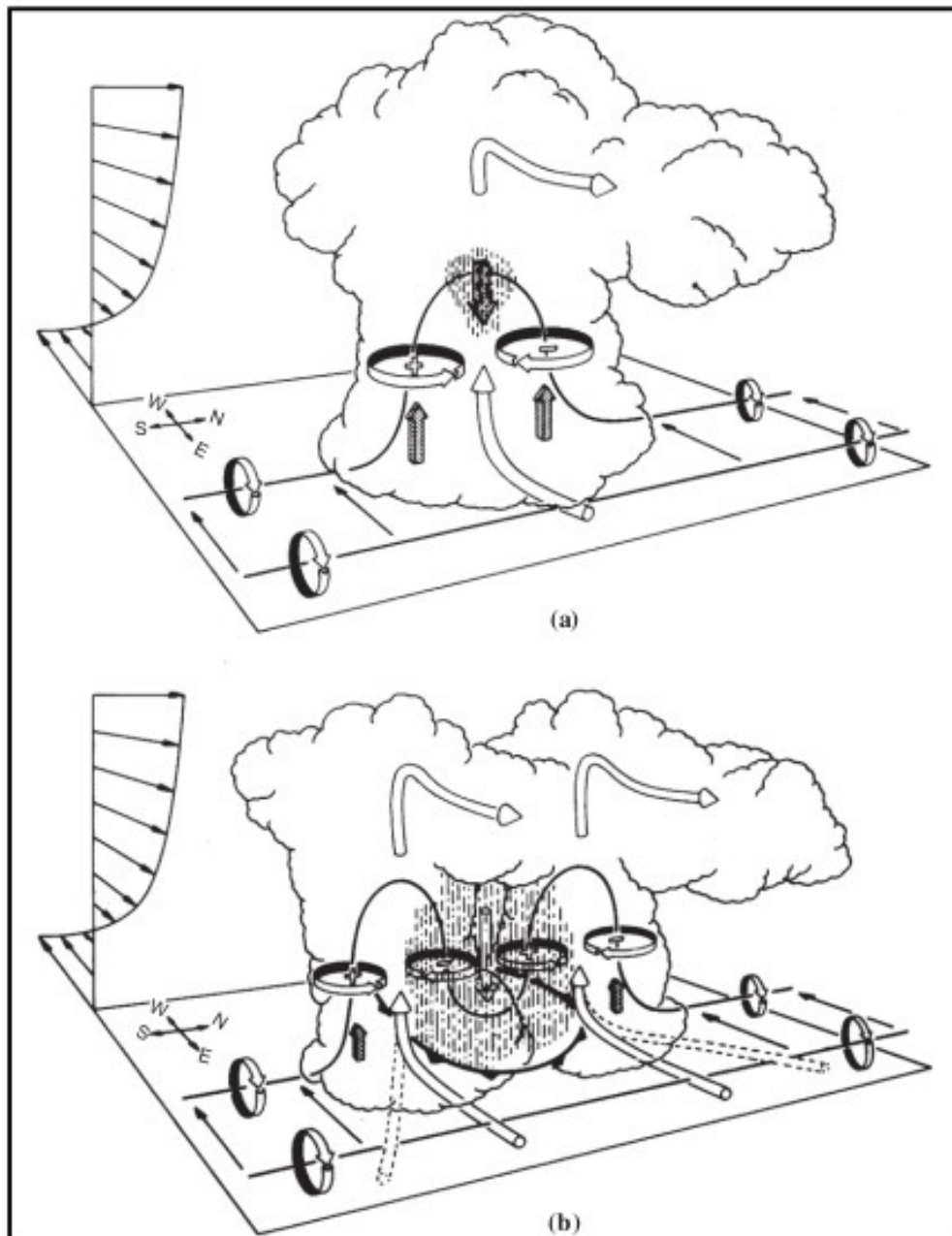


FIGURE 9.12 Development of rotation and splitting in a supercell storm with westerly mean wind shear (shown by storm relative wind arrows in the upper left corner of each panel). Cylindrical arrows show the direction of cloud relative air flow. Heavy solid lines show vortex lines with a sense of rotation shown by circular arrows. Plus and minus signs indicate cyclonic and anticyclonic rotation caused by vortex tube tilting. Shaded arrows represent updraft and downdraft growth. Vertical dashed lines denote regions of precipitation. (a) In the initial stage, the environmental shear vorticity is tilted and stretched into the vertical as it is swept into the updraft. (b) In the splitting stage, downdraft forms between the new updraft cells. The arced line with triangles in the lower middle of (b) at the surface indicates downdraft outflow at the surface. (After Klemp, 1987. Used with permission from *Annual Reviews*.)

Referencias

2012, Holton J. R., Hakim G. J., An Introduction to Dynamic Meteorology, Elsevier, Academic Press, 532 pp.

1980, Necco G. V., Curso de Cinemática y Dinámica de la Atmósfera,. Eudeba, 287 pp



James R. Holton (1938-2004).