# Práctico 9: Desarrollo de Taylor.

## Ejercicio de repaso

Calcular el límite cuando $x \to 0$:

- $\frac{1-cos(x)}{x^2}$
- $\frac{(e^x-1)sen(x)-x^2}{x^3}$
- $\frac{sen(x^2)-x^2}{x^6}$
- $\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

## Taylor en varias variables

1. Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas como $g(x) = e^x$ y $h(x) = sen(x)$.

   *a*) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $g$ y $h$ en $x = 0$.

   *b*) Considere ahora $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = g(x)h(y)$

   *c*) Calcular $df$ y $df^2$ de $f$ en $(0,0)$ y escribir el desarrollo de Taylor de orden 2 de $f$ en $(0,0)$.

   Observar que $T_2 f$ en $(0,0)$ puede obtenerse multiplicando los polinomios de Taylor de orden 2 de $g$ y $h$, y luego removiendo los terminos de orden mayor a 2. Este procedimiento es válido para cualquier orden, cualquier par de funciones $g$ y $h$, y pueden utilizarlo para realizar cálculos de manera más eficiente.

2. Sea $f(x,y) = e^{(sen(x)+y)}$ y $g(x,y) = sen(x) + y$

   *a*) Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de $g$ en $(0,0)$.

   *b*) Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de $f$ en $(0,0)$.

   Observar que $T_3(f)$ puede obtenerse componiendo $T_3 h \circ T_3 g$ donde $h(x) = e^x$, y luego removiendo los terminos de orden mayor a 3. Este procedimiento es válido para cualquier orden, cualquier par de funciones $f$ y $g$, y pueden utilizarlo para realizar cálculos de manera más eficiente.

3. Calcular los siguientes límites:

   *a*) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - \sin(x)\sin(y)}{x^2 + y^2}$

   *b*) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y(y+1)} - (1 + y + \frac{y^2}{2})}{x^2 + y^2}$

4. Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

   $$\text{(a) } f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x^2+1}\right) \quad \text{(b) } f(x,y) = e^x \cos y \quad \text{(c) } f(x,y) = \log(xy+1)$$

5. Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x,y,z) = \frac{yz}{x}$ en el punto $(1,0,0)$.

6. Desarrollar $xyz^2$ en potencias de $x$, $y-1$ y $z+1$.

7. Calcular el polinomio de Taylor de grado $n$ de las siguientes funciones:

*a*) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$, en el origen.

*b*) $f(x,y) = \sin(y)\cos(x)$, en el origen.

*c*) $f(x,y) = \frac{1}{xy}$, en el punto (1,1).

*d*) $f(x,y) = \frac{x}{y}$, en el punto (1,1)

8. El polinomio de Taylor de grado 3 de $f(x,y) = \sin(x+y^2) + e^{x^2}$ en un entorno de $(0,0)$ es:

   *a*) $1 + x + x^2 + y^2 + x^3$.

   *b*) $x + x^2 + y^2 + x^3$.

   *c*) $1 + x + x^2 + y^2 + x^3/3$.

   *d*) $1 + x + x^2 + y^2 - x^3/6$.

   *e*) $x + x^2 + y^2 - x^3/3$.

9. El polinomio de Taylor de grado 3 de $f(x,y) = \log(1 + x + 3y)$ en un entorno de $(0,0)$ es:

   *a*) $x + 3y - (1/2)(x+3y)^2 + (1/3)(x+3y)^3$.

   *b*) $x + 3y + (1/2)(x+3y)^2 + (1/3)(x+3y)^3$.

   *c*) $x + 3y + (1/2)(x+3y)^2 + (1/6)(x+3y)^3$.

   *d*) $x + 3y - (1/2)(x+3y)^2 + (1/6)(x+3y)^3$.

   *e*) $1 + x + 3y + (1/2)(x+3y)^2 + (1/3)(x+3y)^3$.

## Ejercicios opcionales

1. *a*) Calcular con un error menor que $3,2 \times 10^{-5}$ el valor de $\arctan(0,8)$.

   *b*) Calcular con un error menor que $10^{-4}$ el valor de $\sqrt{5}$.

2. ¿Cuál es el menor número de términos que hay que tomar en el desarrollo de Taylor de $e^x$ en $x = 0$, para obtener un polinomio que aproxime, con un error menor que $10^{-4}$, a $e^x$ en el intervalo $[-1,1]$?

3. Estimar el error de reemplazar $\frac{\cos(x)}{\cos(y)}$ por $1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ para $|x|, |y| \leq \frac{\pi}{6}$