

## Práctico 8: Derivadas parciales y diferenciabilidad.

1. Calcular las derivadas parciales de cada una de las siguientes funciones  $f = f(x, y)$ , especificando en cuáles puntos las derivadas existen.

$$\begin{array}{cccc} ax^\alpha + by^\beta & \frac{3x}{y} + \frac{4y}{x} & x^2y^{3/2} & \arctan(xy) \\ \log\left(x + \frac{y}{x^2}\right) & e^y \sin(x) & \max\{|x|, |y|\} & \max\{x^2, y^3\} \end{array}$$

2. Calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden de las siguientes funciones  $f = f(x, y)$ .

$$(a) xy \quad (b) \log(xy) \quad (c) \sin(x^2 + y^2)$$

3. Verificar que la función  $u(x, t) = e^{-a^2k^2t} \sin(kx)$  satisface la ecuación del calor:  $u_t = a^2u_{xx}$ .

4. Estudiar la continuidad de cada función y la existencia de las derivadas direccionales respectivas.

$$\begin{array}{ll} (a) f(x, y) = \begin{cases} (xy)/(\sqrt{x^2 + y^2}) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & (c) f(x, y) = \begin{cases} x^3/y & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \\ (b) f(x, y) = \begin{cases} (e^{xy} - 1)/x & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases} & (e) f(x, y) = \begin{cases} x^3 & \text{si } y \geq 1 \\ x^3y^2 & \text{si } y < 1 \end{cases} \\ (d) f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ a & \text{si } xy = 0 \end{cases} & \end{array}$$

5. Consideremos  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probar que existen todas las derivadas direccionales de  $f$  en  $(0, 0)$ , pero sin embargo  $f$  no es continua en  $(0, 0)$ . En otras palabras derivar respecto a cualquier dirección no garantiza la continuidad en el punto.

6. Representar gráficamente la siguiente función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  bosquejando las curvas de nivel.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq x^2 \text{ o } 2x^2 \leq y \\ |x| & \text{si } x^2 < y < 2x^2 \end{cases}$$

Demostrar que  $f$  es continua y que existen todas las derivadas direccionales en  $(0, 0)$  y que, sin embargo,  $f$  no es diferenciable en dicho punto.

7. Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x} + e^{xy} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de  $f$  en los puntos  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$ , hallando, si existen, las derivadas parciales.

8. ¿Existe alguna función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  tal que  $f_x(x, y) = e^{x+y}$  y  $f_y(x, y) = \cos(xy)$ ?

9. Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0$$

- a) Probar que existen derivadas parciales en todos los puntos y calcularlas.  
 b) Probar que  $f$  es diferenciable.  
 c) Probar que  $f$  no es de clase  $C^1$ .
10. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  definida como  $f(x, y) = x^3 y$ . Sean  $a = (0, 0)$  y  $b = (1, 2)$ . Hallar  $\xi$  en el segmento  $[a, b]$  tal que  $f(b) - f(a) = df(\xi)(b - a)$ .
11. Sean  $f : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ , donde  $f$  es diferenciable y  $g$  esta definida por  $g(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$ . Calcular  $\frac{\partial f \circ g}{\partial \rho}$  y  $\frac{\partial f \circ g}{\partial \theta}$
12. Se sabe que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  verifica  $f_x(0, 0) = 2$ ,  $f_y(0, 0) = -1$  y que  $f$  es diferenciable en el origen. Calcular  $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$  para  $v = (h, k)$  no nulo.
13. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que se sabe lo siguiente:
- $f(x, 1) = x^3 + x^2, \forall x \neq 0$
  - $f(0, y) = y^2 - 2y + 1, \forall y \in \mathbb{R}$
  - $f(x, 1 - x) = x, \forall x \neq 0$
- a) Indique en qué puntos es posible hallar la derivada parcial respecto a  $x$  o respecto a  $y$ . En qué puntos es posible hallar el gradiente?  
 b) Calcular la derivada direccional en  $(0, 1)$  respecto a  $v = (1, -1)$   
 c) Indique en qué puntos se puede decir algo sobre la diferenciabilidad de  $f$ .
14. Se sabe que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  verifica  $f(x, x) = x$ , que  $f(0, y) = 0$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  y que  $f$  es diferenciable en el origen. Calcular  $f_x(0, 0)$ .
15. Calcular la matriz Jacobiana en el punto  $a$  y el diferencial  $df(a)(\Delta x, \Delta y)$  de las siguientes funciones:
- a)  $f(x, y) = e^{x+y} + 2 \sin(2x - y), a = (0, 0)$   
 b)  $f(x, y, z) = (e^{z+x+y}, x + y + 2z), a = (0, 1, 2)$   
 c)  $f(x, y) = (e^{x+y}, \sin(2x - y), \log(1 + y^2)), a = (\pi, \pi)$   
 d)  $f : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^q$ , en  $a \in \mathbb{R}^p$  fijo cualquiera; siendo  $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$ , donde  $A$  es una matriz  $q \times p$  y  $\mathbf{x}$  se escribe como una matriz columna  $p \times 1$ .  
 e)  $f(x, y) = \langle g(x, y), h(x, y) \rangle$  donde  $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  son funciones de clase  $C^1$
16. Hallar, en cada caso, las matrices jacobianas de  $f, g, f \circ g$  y  $g \circ f$ .
- a)  $f(u, v) = \left( \frac{12}{\log(u^2 + v^2)}, \arctan(u/v) \right), g(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ .  
 b)  $f(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv), g(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$ .  
 c)  $f(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v), g(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$ .
17. En cada caso hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función en el punto  $P$ .
- $3x^2 + 4y^2, P = (0, 1)$
  - $2 \cos(x - y) + 3 \sin(x), P = (\pi, \pi/2)$
  - $2xy + e^{yx}, P = (1, 1)$
18. Demostrar que todos los planos tangentes a la gráfica de la función  $f(x, y) = y h(y/x)$ , en donde  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable, tienen un punto en común.

## Ejercicios propuestos en evaluaciones

1. Segundo parcial, primer semestre 2022 - De la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se conoce que:

- $f$  es diferenciable en  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .
- $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, t\right) = t^2 + 2t$
- $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$  con  $\vec{v} = (1, -2)$

Si  $g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , calcular  $\frac{\partial(f \circ g)}{\partial \theta}\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ .

2. Segundo parcial, segundo semestre 2021 - Sea  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función tal que  $g(1, 1) = (1, 0)$  y

$$J_g(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  está dada por  $f(x, y) = \frac{x^2 - y}{y^2 + 1}$ , indicar cuánto vale  $\frac{\partial f \circ g}{\partial x}(1, 1)$ .

3. Segundo parcial, primer semestre 2021 - Sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función diferenciable con  $\alpha(0) = (0, 0)$ , y  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la función dada por  $f(x, y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$ . Sabiendo que  $(f \circ \alpha)'(0) = (2, 0)$ , calcular el jacobiano de  $\alpha$  en 0.

4. Segundo parcial, primer semestre 2019 - Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} y - x, & \text{si } y \geq x \\ \frac{2x^3 y}{x^2 + y^2} + y - x, & \text{si } y < x \end{cases}$$

a) Calcular  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $(0, 0)$ .

b) Mostrar que la función  $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ .

c) Hallar el plano tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(0, 0)$ .

5. Examen, febrero 2022 - Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x, y) = |x + e^{y^2}|$ . Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones sobre  $f$  es verdadera o falsa.

a)  $f$  es continua en  $(0, 0)$ .

b)  $f$  no es continua en  $(-1, 0)$ .

c)  $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$  y su gradiente en ese punto es  $(1, 0)$ .

d) Existe la derivada parcial de  $f$  respecto a  $x$  en  $(-1, 0)$  y vale 1.

e) Existe la derivada parcial de  $f$  respecto a  $y$  en  $(-1, 0)$  y vale 0.

## Ejercicios opcionales

1. Calcular en un punto genérico los planos tangentes a:

- La Esfera
- El Cono
- El Cilindro
- El Paraboloides

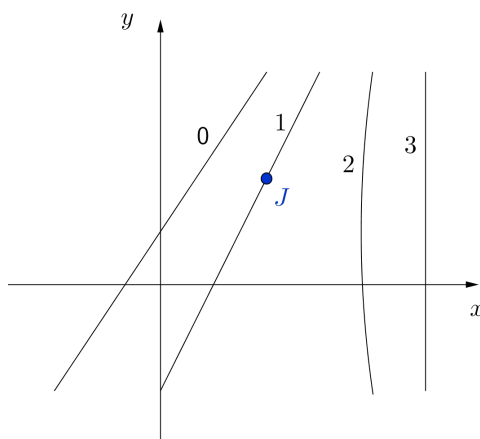
2. La ecuación de Van der Waals para  $n$  moles de un gas está dada por:

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

donde  $R$  es la constante universal del gas y  $a$  y  $b$  son constantes positivas características de un gas en particular.

Calcular  $\frac{\partial T}{\partial V}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial P}$

3. Se muestran las curvas de nivel para una función  $f$ . Determine si las derivadas parciales tienen signo negativo o positivo en el punto  $J$ , asumiendo que no se anulan.



4. Demuestre que las siguientes funciones verifican la ecuación de la onda  $u_{tt} = au_{xx}$

- $u = \sin(kx)\cos(akt)$
- $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$
- $u = \frac{t}{a^2 t^2 - x^2}$

5. a) Sea  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una transformación lineal. Hallar  $\partial_i T$  para  $i = 1, \dots, n$ .

b) Sea  $A$  una matriz simétrica  $n \times n$  y  $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por  $Q(x) = x^t A x$ , esto es,  $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ , si  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ . Hallar  $\partial_i Q$  para  $i = 1, \dots, n$ .

c) Sea  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una transformación lineal y  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $f(x) = \langle x, T(x) \rangle$ . Hallar la derivada direccional  $\partial f / \partial u$  para todo versor  $u \in \mathbb{R}^n$ .