Señales Aleatorias y Modulación
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

9 de octubre de 2020

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

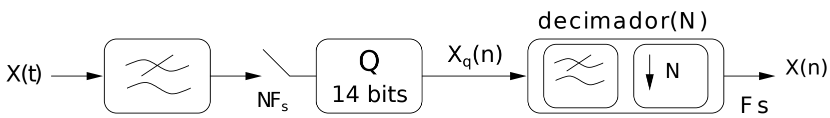
Pregunta [10 pts.]

(a) Se desea transmitir una señal binaria conformada con un pulso rectangular $p(t)$. La señal se transmite por un canal que no distorsiona la forma de los puslos e introduce ruido aditivo, blanco, gaussiano y de media nula. Diseñar el filtro receptor óptimo de forma de maximizar la SNR en recepción.

(b) Definir un proceso estacionario en sentido estricto (SSS) y en sentido amplio (WSS). ¿Bajo qué condiciones un proceso SSS es WSS? ¿Bajo qué condiciones un proceso WSS es SSS?

Problema 1 [20 pts.]

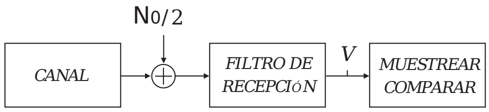
Sea la señal genérica X_t de banda limitada $f_s/2$ y tal que, al utilizar el cuantizador Q de 14 bits de resolución, se cumple el modelo de cuantización como ruido blanco aditivo.



(a) Dar los espectros de señal y ruido en todos los puntos del sistema.

(b) Calcular el valor de N que resulte en el sistema menos complejo posible, y con una relación señal a ruido de cuantización en X_n no menor que si se hubiese usado únicamente un cuantizador de 16 bits luego del muestreo.

La secuencia de 0's y 1's obtenida de cuantizar será transmitida a través de un canal que introduce ruido blanco gaussiano, aditivo, de densidad espectral de potencia $N_0/2$. Para transmitir los 0 y 1 lógicos se mapean a los valores de amplitud 0 y $2A$ respectivamente y se conforman con un pulso $p(t)$ cuadrado, de amplitud 1 y duración T_s. Se asume que los bits son equiprobables e independientes entre sí.
De aquí en adelante supondrémos que **el ruido de cuantización es despreciable**. El receptor se esquematiza en la siguiente figura.



El filtro de recepción es un pasabajos ideal de ancho de banda B. Se supone que **no modifica los pulsos**, su finalidad es limitar el ruido.

(c) Si llamamos V a la señal a la entrada del comparador, hallar y graficar las probabilidades $p_V(v|0)$, probabilidad de la señal V cuando se trasmitió un 0 lógico. Ídem con $p_V(v|1)$ para el 1 lógico.

(d) Dar el umbral de decisión y hallar la probabilidad de error. Expresar la probabilidad de error en función de A, B y $N_0/2$.

Problema 2 [20 pts.]

Se considera un proceso autorregresivo $X(n)$ de orden 1, modelado mediante la siguiente ecuación recursiva:

$$X(n) = wX(n-1) + V(n),$$

donde w una constante y $V(n)$ es ruido blanco, gaussiano, de media nula y varianza σ_V^2.

(a) Representar a $X(n)$ como la salida de un filtro LTI con entrada $V(n)$. Dibujar el diagrama de bloques del sistema y especificar la respuesta en frecuencia del filtro y las condiciones de estabilidad.

(b) Hallar la solución de la ecuación en diferencias si se considera la condición inicial $X(0) = 0$. (Sugerencia: la forma de la solución es $X(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k V(n-k)$, con α un parámetro a determinar).

(c) Hallar la media y la autocorrelación del proceso $X(n)$. ¿$X(n)$ es estacionario en sentido amplio? Justificar.

De aquí en más se considera que se observa al proceso $X(n)$ muy lejos de su condición inicial (i.e. $n \to \infty$):

(d) Determinar si existen condiciones bajo las cuales puede considerase que $X(n)$ es estacionario en sentido amplio. Justificar.

(e) Bajo las condiciones anteriores, hallar la media, la autocorrelación y la densidad espectral de potencia de $X(n)$.

Solución

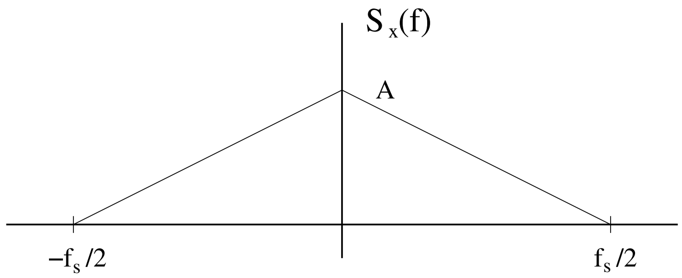
Pregunta

(a)

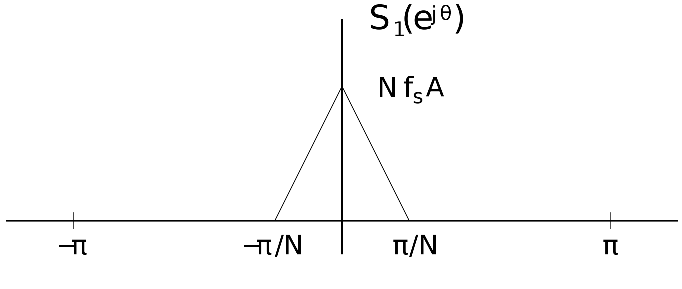
(b)

Problema 1

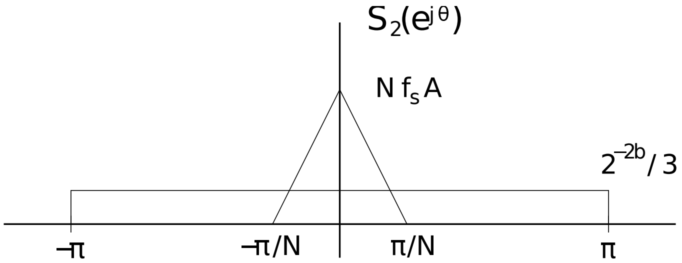
(a) En este ejercicio hay señales y ruido. El ruido debemos trabajarlo como proceso estocástico. No sabemos si la señal es un proceso estocástico o no, pero para poder trabajar a la vez con la señal y con ruido debemos considerarlo como uno. (Tiene poco sentido graficar a la vez transformadas de Fourier de una señal determinada junto a una densidad espectral de potencia.) Por lo tanto todos los espectros que dibujaremos serán densidades espectrales de potencia.
El espectro de la señal lo dibujamos como un triángulo del ancho de banda adecuado para simplificar.



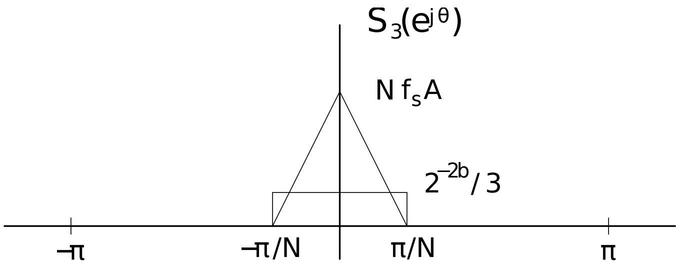
El filtro pasabajos inicial debería tener frecuencia de corte en $f_s/2$ para evitar solapamiento en la señal final del sistema. Como la señal tiene ese ancho de banda no será afectada por este filtro y su espectro será igual.
Luego del muestreo a frecuencia $N\, f_s$ tenemos:



Al cuantizar se suma el ruido de cuantización, de densidad espectral de potencia constante y altura $\frac{\Delta^2}{12} = 2^{-2b}/3$, con $b = 14$.



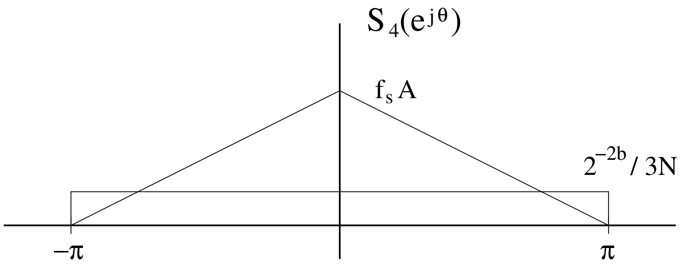
El filtro anterior al decimador debe tener frecuencia de corte $\theta_c = \pi/N$ para evitar el solapamiento y ganacia 1. Luego del filtro y antes del decimador tenemos:



Si un proceso $u[n]$ entra a un decimador de parámetro N, obenemos el proceso $v[n] = u[n\,N]$. Su autocorrelación es

$$R_v[n_1, n_2] = E\{v[n_1]v[n_2]\} = E\{u[n_1\,N]u[n_2\,N]\} = R_u[(n_2 - n_1)N],$$

con lo que v es estacionario, y su autocorrelación es $R_v[n] = R_u[n\,N]$. Como $R_v[n]$ es una secuencia determinística sabemos que luego del decimador su espectro será



(b) La potencia de la señal la llamamos S_x y la potencia del ruido la obtenemos integrando:

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2^{-2b}}{3N} d\theta = \frac{1}{3 \cdot N \cdot 2^{2b}}$$

y la relación señal a ruido es:

$$\text{SNR} = S_x \cdot 3 \cdot N \cdot 2^{2b}.$$

Usar 16 bits sin decimación equivale a usar $b = 16$ y$N = 1$, mientras que en el sistema propuesto $b = 8$ y debemos determinar N. Debemos cumplir que

$$S_x \cdot 3 \cdot N \cdot 2^{2 \cdot 14} \geq S_x \cdot 3 \cdot 2^{2 \cdot 16},$$

que implica $N \geq 16$. El sistema menos complejo será el de menor N, por lo tanto

$$N = 16.$$

Es necesario notar que para lograr esta mejora, luego del decimador, la representación numérica debe ser mejor que la del muestreo. Si estuvieramos restringidos a una representación de 14 bits, eso sería equivalente a poner otro cuantizador y tendríamos el mismo ruido que antes.

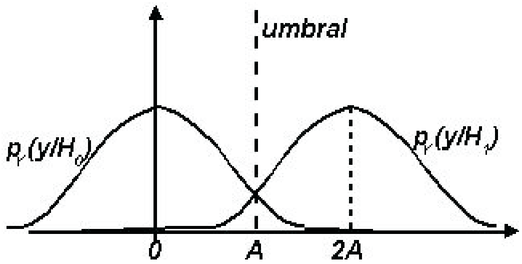
(c) Suponiendo muestreo en el instante ideal $t = t_k = kT + t_d$, sea la variable aleatoria $V = v(t_k)$.
Entonces, V puede tomar dos valores:

$$V = \begin{cases} 2A + n(t_k) & \Rightarrow \quad n(t_k) = V - 2A \\ n(t_k) & \end{cases}$$

Si H_0 es la hipótesis de haber mandado un 0, y H_1 es la de haber mandado un 1, entonces:

$$\begin{aligned} p_V(v/H_0) &= p_N(v) \\ p_V(v/H_1) &= p_N(v - 2A) \end{aligned}$$

La forma de estas curvas se muestra en la siguiente figura.



(d) Sea u el umbral óptimo de decisión. Entonces:

$$P_e = \underbrace{P_0}_{=\frac{1}{2}} .P_{e0} + \underbrace{P_1}_{=\frac{1}{2}} .P_{e1} \Rightarrow P_{e,min} / \left. \frac{\partial P_e}{\partial v} \right|_{min} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} P_{e0} &= \int_u^{+\infty} p_V(v|0)dv \\ P_{e1} &= \int_{-\infty}^{u} p_V(v|1)dv \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial P_e}{\partial v} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial P_{e0}}{\partial v}}_{p_V(u|0)} + \underbrace{\frac{\partial P_{e1}}{\partial v}}_{-p_V(u|1)} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_e}{\partial v} = 0 \Leftrightarrow p_V(u|0) = p_V(u|1) \Leftrightarrow u = A$$

Luego la probabilidad de error queda:

$$P_e = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Por otro lado, $S_R = (2A)^2.P_A + 0^2.P_0 = 2A^2$, y $N_R = \sigma^2 = N_0 B$, con lo que:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{S_R}{2N_0 B}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{SNR_R}{2}}\right)$$

Problema 2

(a) $H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1-we^{-j\theta}}$

(b) Aplicando la recurencia tenemos que:

$$X(0) = 0, \quad X(1) = V(1), \quad X(2) = wX(1) + V(2) = wV(1) + V(2).$$

por lo que $\alpha = w$ y $X(n) = \sum_{k=0}^{n-1} w^k V(n-k)$. El filtro causal es estable si y solo si $|w| < 1$.

(c)

$$E(X(n)) = \sum_{k=0}^{n-1} w^k E(V(n-k)) = m_V \sum_{k=0}^{n-1} w^k = m_V \frac{1-w^n}{1-w} = 0.$$

$$\begin{aligned}
R_X(n, n+l) = E(X(n)X(n+l)) &= E\left(\sum_{m=0}^{n-1} w^m V(n-m) \sum_{k=0}^{n+l-1} w^k V(n+l-k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+l-1} \sum_{m=0}^{n-1} w^m w^k E(V(n+l-k)V(n-m)) \\
&= \sum_{k=0}^{n+l-1} \sum_{m=0}^{n-1} w^m w^k R_V(m-(k-l)) \\
&= \sum_{k=0}^{n+l-1} \sum_{m=0}^{n-1} w^m w^k \sigma_v^2 \delta(m-(k-l)) \\
&\overset{\{j=k-l\}}{=} \sum_{j=-l}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} w^m w^{(j+l)} \sigma_v^2 \delta(m-j),
\end{aligned}$$

De aquí ya podemos ver que la autocorrelación depende de n por lo que el proceso no es estacionario en sentido amplio. Para terminar el calculo de la autocorrelación, supongamos primero que $l \geq 0$. Entonces

$$R_X(n, n+l) = \sigma_v^2 w^l \sum_{m=0}^{n-1} w^m \left(\sum_{j=-l}^{-1} w^j \delta(m-j) + \sum_{j=0}^{n-1} w^j \delta(m-j)\right).$$

La doble suma correspondiente al primer término dentro del paréntesis se anula, ya que no se cumple nunca $m = j$. La doble suma correspondiente al segundo término se transforma en una única suma debido a que debe ser $m = j$ y las sumas abarcan el mismo rango. Tenemos entonces

$$R_X(n, n+l) = \sigma_v^2 w^l \sum_{m=0}^{n-1} w^{2m} = \sigma_v^2 w^l \frac{1 - w^{2n}}{1 - w^2}.$$

De la misma forma, para $l < 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
R_X(n, n+l) &= \sigma_v^2 w^l \sum_{j=-l}^{n-1} w^j \sum_{m=0}^{n-1} w^m \delta(m-j) \\
&= \sigma_v^2 w^l \sum_{j=-l}^{n-1} w^j \left(\sum_{m=0}^{-l-1} w^m \delta(m-j) + \sum_{m=-l}^{n-1} w^m \delta(m-j) \right) \\
&= \sigma_v^2 w^l \sum_{j=-l}^{n-1} w^{2j} \\
&\overset{\{i=j+l\}}{=} \sigma_v^2 w^l \sum_{i=0}^{n+l-1} w^{2(j-l)} = \sigma_v^2 w^{-l} \sum_{i=0}^{n+l-1} w^{2j} = \sigma_v^2 w^{-l} \frac{1 - w^{2(n+l)}}{1 - w^2}.
\end{aligned}$$

(d) En primer lugar notamos que si $n \gg l$,

$$R_X(n, n+l) \simeq \sigma_v^2 w^{|l|} \frac{1 - w^{2n}}{1 - w^2}.$$

Si $|w| < 1$, para $n \to \infty$ tenemos que

$$R_X(n, n+l) = \sigma_v^2 w^{|l|} \frac{1}{1 - w^2} = R_X(l)$$

El proceso se dice que es asintóticamente estacionario en sentido amplio. Observar que la condición requerida es que el filtro sea estable.

(e) Usando la relación entre la PSD a la entrada y a la salida de un filtro LTI

$$S_X(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 S_V(e^{j\theta})$$

con $S_v(e^{j\theta}) = \sigma_V^2$ y $H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - we^{-j\theta}}$, tenemos

$$S_X(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 \sigma_V^2 = \frac{\sigma_V^2}{1 - 2w\cos(\theta) + w^2}.$$

También podemos llegar al resultado haciendo la DTFT de $R_X(l)$.