Entregable 4: Métodos Proximales y ADMM

27 de octubre de 2020

Ejercicio 1 - Métodos proximales

a) Probar que si $g(x) = I_C(x)$ es la función indicatriz de un conjunto C convexo,

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in C \\ \infty & , \quad x \notin C \end{cases} ,$$

entonces $\operatorname{prox}_{I_C}(x) = \Pi_C(x)$, donde $\Pi_C(x)$ es la proyección al conjunto C,

$$\Pi_C(x) = \min_{z \in C} \|x - z\|.$$

b) Considere el método de integración híbrido forward–backward dado por la siguiente aproximación en diferencias a la ecuación diferencial de flujo de gradiente,

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{h} = -\nabla f\left(\frac{x^{k+1} + x^k}{2}\right).$$

con la aproximación

$$\nabla f\left(\frac{x^{k+1} + x^k}{2}\right) \approx \frac{\nabla f(x^{k+1}) + \nabla f(x^k)}{2}.$$

Escriba el método de optimización resultante, reconociendo cualquier operador proximal que resulte de él en la expresión final.

Ejercicio 2 - LASSO

Considere el problema conocido como LASSO, que consiste en:

$$\min_x \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1$$

Con los datos proporcionados junto con el obligatorio, y usando $\lambda = 0{,}15$, se hallará la solución de este problema usando dos métodos distintos, de acuerdo a lo que sigue. Use como condición de parada que la diferencia entre la función objetivo en iteraciones consecutivas sea menor a 0,0001.

a) Halle la solución del LASSO usando *Proximal Gradient Descent* con paso fijo $\alpha = 1/\|A^T A\|_2$.

b) Llamamos f y g a cada sumando de la función objetivo: $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2$, $g(x) = \lambda\|x\|_1$.

1. Calcule el operador proximal de f.
2. Halle la solución del LASSO usando ADMM.

c) Compare el tiempo de ejecución de ambos métodos, y grafique la evolución de la función objetivo con las iteraciones.