

## Práctico 7: Funciones de varias variables: representaciones gráficas, límites y continuidad

Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función, se define el conjunto de nivel  $a$  como:

$$C_a = \{p \in U : f(p) = a\}$$

1. Dibuje el dominio, los conjuntos de nivel y la gráfica de las siguientes funciones:

$$(a) x^2 + y^2 \quad (b) x^2 - y^2 \quad (c) x^2 \quad (d) y/x \quad (e) xy \quad (f) \max\{x^2, y^3\} \quad (g) \max\{x^2, x + y\}$$

2. Hallar el dominio y los conjuntos de nivel de las siguientes funciones:

$$(a) \frac{x}{x-y-z} \quad (b) \sin(x^2 + y^2 + z^2) \quad (c) \frac{x+y+z}{1-x^2-y^2-z^2} \quad (d) \frac{x+y}{\min\{x, y\}}$$

3. Dibuje el dominio y los conjuntos de nivel de las siguientes funciones:

$$(a) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (b) \log\left(\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \quad (c) \cosh(x^2 - y^2) \quad (d) \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

$$(e) \arccos\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right) \quad (f) \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y}\right) \quad (g) x^{(y^2)}$$

4. Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida en una bola reducida  $U = B_R^*((0,0))$  de centro  $(0,0)$  y radio  $R$ . Mediante el cambio de variable  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , se obtiene  $g : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ , donde  $V = (0, R) \times [0, 2\pi)$ .

(a) Probar que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L$  sii  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que  $|g(r, \theta) - L| < \varepsilon \forall r \in (0, \delta), \theta \in [0, 2\pi)$ .

(b) Probar que si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L$  entonces  $\lim_{r \rightarrow 0^+} g(r, \theta) = L \forall \theta \in [0, 2\pi)$ .

(c) Se consideran las funciones  $f$  siguientes

$$(i) f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (ii) f(x, y) = \begin{cases} y/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (iii) f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular, cuando existan,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  y  $\lim_{r \rightarrow 0^+} g(r, \theta)$ , éste último en función de  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

(d) Probar que es falso el recíproco de la parte (b).

(e) En el caso particular en el que  $g$  tiene la forma  $g(r, \theta) = h(r)k(\theta)$ , con  $h$  y  $k$  funciones  $h : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $k : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ , probar que si  $k$  es una función acotada y  $\lim_{r \rightarrow 0^+} h(r) = 0$  entonces  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ .

(f) Calcular:

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

5. Probar que en los siguientes casos NO existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ :

$$(a) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (b) f(x, y) = \frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} \quad (c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0, & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

6. (a) Probar que si  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0$  y  $g$  es una función acotada en una bola reducida de centro  $p$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) = 0$ .

(b) Calcular los límites de las siguientes funciones para  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ :

$$(a) x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \quad (b) \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad (c) \frac{xy^3}{x^2 + y^4} = y \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

7. Decidir si los límites siguientes existen y en caso afirmativo calcularlos.

$$(a) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,5,3)} \frac{x-y}{x^2 + y - z} \quad (b) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,1)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + e^y - z)}{x^2 + \tan\left(\frac{1}{\cos(xyz)}\right)} \quad (c) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2yz - z^4}{x^4 + y^4 + z^4}$$

8. Calcular:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^2 + xy + 1}{x^2 - x - y} \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \log|y| \quad (c) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 + xy - 2y^2}{x^2 - y^2}$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad (e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x-y} - 1}{x^2 - y^2} \quad (f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + x^3y}$$

9. Se considera la función

$$f(x, y) = \frac{ax + y + by^2}{\operatorname{sen} y + \log(1 + x)} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Determinar  $a$  y  $b$  para que todos los límites direccionales de  $f$  en  $(0, 0)$  sean iguales.

b) Para los  $a$  y  $b$  determinados en la parte anterior, probar que  $f$  carece de límite.

10. Discutir según  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  la existencia del límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + xy + y^2}$$

11. Determinar en qué puntos de  $\mathbb{R}^2$  las siguientes funciones  $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  son continuas y discontinuas.

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} (4x^2y^3)/(4x^2 + y^6) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} x/y & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 3x + y^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

12. ¿Cuáles de las siguientes funciones se pueden extender en forma continua a todo el plano?

$$(a) \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad (b) x^2 \log(x^2 + y^2) \quad (c) \frac{\operatorname{sen}(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2}$$

13. Sea  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable con derivada continua.

$$f(x, y) = \begin{cases} (\varphi(y) - \varphi(x))/(y - x) & \text{si } x \neq y \\ \varphi'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Determinar en qué puntos  $f$  es continua.

14. Sea  $f: (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  definida por  $f(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$

a) Verificar que es continua y probar que es biyectiva.

b) Calcular las imágenes de las rectas  $\rho = cte$  y  $\theta = cte$

c) Calcular la función inversa  $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ . ¿Es continua  $f^{-1}$ ?

15. a) Probar que  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es continua si y sólo si  $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m$  abierto  $f^{-1}(A)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ .

b) Probar que  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es continua si y sólo si  $\forall C \subseteq \mathbb{R}^m$  cerrado  $f^{-1}(C)$  es cerrado en  $\mathbb{R}^n$ .

c) Demostrar que el conjunto de puntos  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  que verifican

$$\begin{cases} x^2 + y^3 < 4 \\ y^2 + z^3 > 2 \end{cases}$$

es un conjunto abierto.

## Ejercicios opcionales

1. Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  cerrado y  $f: C \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función continua. Demostrar que el gráfico de  $f$ ,

$$\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in C\},$$

es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

2. Si  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  es acotado, se define el *diámetro* de  $A$  como  $\text{diam}(A) = \sup(\{d(x, y) : x, y \in A\})$ .

a) Probar que si  $C \subset \mathbb{R}^n$  es compacto entonces existen  $x, y \in C$  tal que  $\text{diam}(C) = d(x, y)$ .

b) Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $f: C \rightarrow C$  una función tal que

$$\|f(x) - f(y)\| > \|x - y\| \quad \forall x \neq y \in C.$$

Probar que  $C$  no puede ser compacto. Dar un ejemplo de una función en estas hipótesis

3. Se considera la función determinante  $\det: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\det(a, b, c, d) = ad - bc$

a) Probar que  $\det$  es una función continua en  $\mathbb{R}^4$ .

b) Sean  $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A \text{ es invertible}\}$  y  $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \det(A) = 0\}$ .

Investigar si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son abiertos, cerrados o ninguna de las dos cosas. Aquí el espacio de matrices se considera como  $\mathbb{R}^4$ .

4. Sea  $\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0$ , pero  $\varepsilon(0) = 1$ . Se considera la función

$$f(x, y) = \frac{3x^2\varepsilon(y) - y^2\varepsilon(x)}{\log(x^2 + y^2 + 1)}$$

a) Analizar si  $f$  tiene límite en  $(0, 0)$  según el conjunto  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$ .

b) Analizar si  $f$  tiene límite en  $(0, 0)$ .

5. Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$ . Probar que si toda función continua  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  es acotada entonces  $C$  es compacto.

6. Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ . Se llama *camino* (o *arco*) continuo en  $C$  a toda función continua  $\alpha: [0, 1] \rightarrow C$ . Si  $a, b \in C$  y  $\alpha$  es un camino en  $C$  tal que  $\alpha(0) = a$  y  $\alpha(1) = b$ , se dice que  $\alpha$  conecta  $a$  con  $b$ . Se dice que  $C$  es *conexo por caminos* (o *arcoconexo*) sii  $\forall a, b \in C \exists \alpha$  camino en  $C$  que conecta  $a$  con  $b$ .

a) Sean  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  conexo por caminos y  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Probar que si  $a, b \in C$  y  $\mu \in \mathbb{R}$  son tales que  $f(a) \leq \mu \leq f(b)$  entonces existe  $c \in C$  tal que  $f(c) = \mu$ . Sugerencia: considerar  $f \circ \alpha$  con  $\alpha$  un camino de  $a$  a  $b$ .

b) Probar que si  $C$  es arcoconexo y  $f: C \rightarrow \mathbb{R}^m$  es continua entonces  $f(C) \subseteq \mathbb{R}^m$  es arcoconexo.

c) Sean  $S^1 = \{a \in \mathbb{R}^2 : \|a\| = 1\}$  y  $a_0 \in S^1$ . Probar que  $S^1$  y  $S^1 \setminus \{a_0\}$  son arcoconexos.

d) Probar que no existe  $f: S^1 \rightarrow [0, 1]$  continua y biyectiva. Sugerencia: suponer por absurdo que existe una tal  $f$ , sacar un punto de  $a_0 \in S^1$  conveniente y considerar la restricción de  $f$  a este nuevo conjunto.

e) Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos de  $\mathbb{R}^2$  y  $m$  la mediatriz del segmento  $PQ$ . Demostrar que cualquier camino  $\alpha$  que una  $P$  con  $Q$  debe intersectar a  $m$ . Sugerencia: demostrar que la función  $f(t) = d(Q, \alpha(t)) - d(P, \alpha(t))$  tiene una raíz  $t_0 \in [0, 1]$ .

### 7. Un teorema de punto fijo.

Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto cerrado y  $f: C \rightarrow C$  una *contracción*, esto es, existe  $k \in (0, 1)$  tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| \quad \forall x, y \in C.$$

a) Sea  $a$  un punto cualquiera de  $C$ . Se define la sucesión  $(x_n)_{n \geq 0}$  de la siguiente forma:  $x_0 = a$  y  $x_n = f(x_{n-1})$ , si  $n \geq 1$ . Probar que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\| \quad \forall n \geq 0.$$

b) Deducir que  $(x_n)$  es una sucesión de Cauchy y que existe  $p \in C$  tal que  $\lim_n x_n = p$ .

- c) Demostrar que existe un único punto  $p \in C$  tal que  $f(p) = p$ . Sugerencia: observar que  $f$  es continua y tomar  $p$  como en la parte anterior.
- d) Analizar si el resultado anterior es válido si  $C$  no fuese cerrado.
8. a) Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales normados y  $T: V \rightarrow W$  una transformación lineal. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.
- 1)  $T$  es continua en  $V$ .
  - 2)  $T$  es continua en el vector nulo de  $V$ .
  - 3) Existe  $k \geq 0$  tal que  $\|T(x)\| \leq k\|x\|, \forall x \in V$ .
  - 4) Existe  $k \geq 0$  tal que  $\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\|, \forall x, y \in V$ .
  - 5)  $T(A)$  es acotado  $\forall A \subseteq V$  acotado.
- b) Probar que toda transformación lineal de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  es uniformemente continua. Deducir que los subespacios propios de  $\mathbb{R}^n$  son conjuntos cerrados con interior vacío.