Ecualización

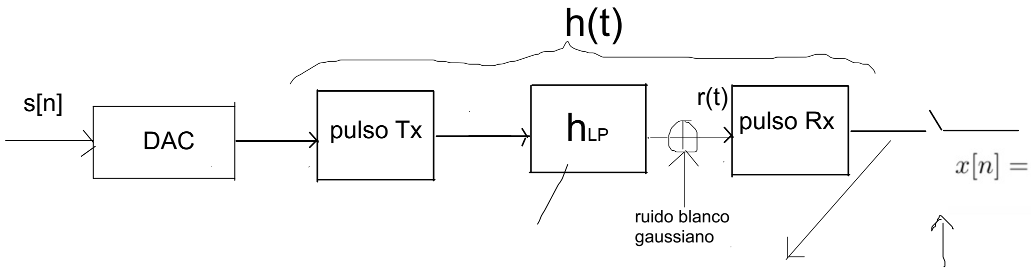
Pablo Belzarena

Comunicaciones inalámbricas

2020

Esquema de la presentación

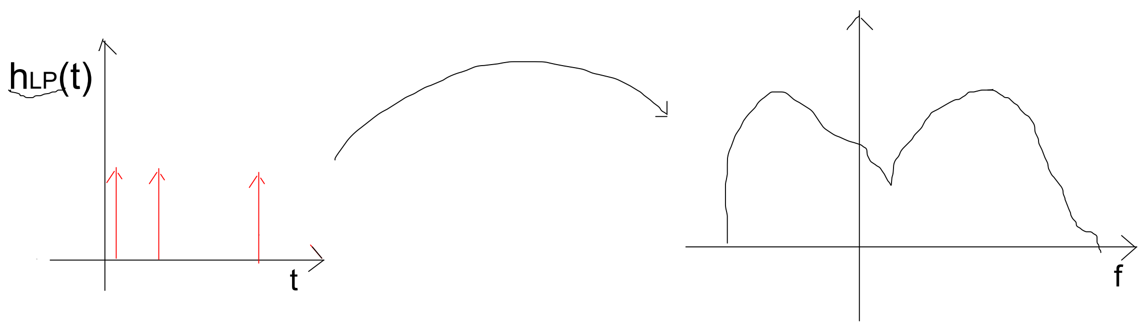
modelo en banda base

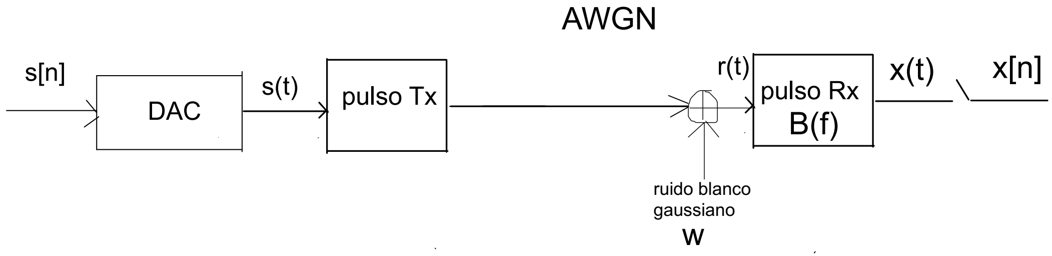


$$x[n] = x(nT_s + \hat{\tau}) \quad \approx \quad e^{-j\Delta\theta_n} \sum_k a[k]h((n-k)T_s) + \hat{\tau} - \tau) + w[n]$$

$$x(t) \approx e^{-j\Delta\theta(t)} \sum_k a[k]h(t - kT_s - \tau) + w(t)$$

$$h(t) = \frac{A}{2} p_{rx}(t) * h_{LP}(t) * p_{tx}(t),$$




AWGN
s[n]
DAC
s(t)
pulso Tx
r(t)
pulso Rx
B(f)
x(t)
x[n]
ruido blanco
gaussiano
w

Filtro que maximiza SNR

Theorem

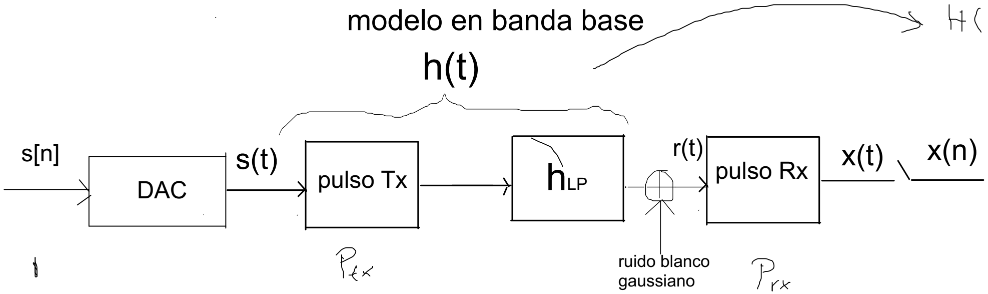
El filtro de recepción que maximiza el SNR dado el filtro de transmisión $P_{tx}(f)$ y en un canal ideal con ruido estacionario en sentido amplio y de media nula de densidad espectral de potencia $S_{ww}(f)$ es :

$$B(f) = \frac{cP_{tx}^*(f)}{S_{ww}(f)} \quad (1)$$

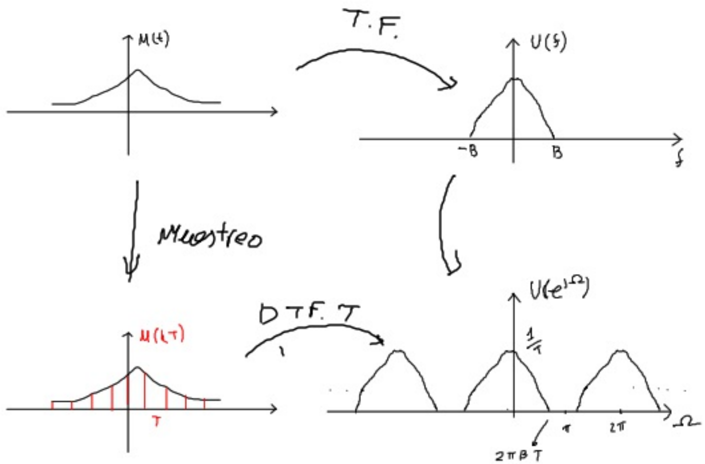
siendo c una contante arbitraria no nula.

Si el ruido es blanco Gaussiano. En ese caso, $S_{ww}(f) = \frac{\mathbf{N}_0}{2}$. Como la constante c es arbitraria entonces :

$$B(f) = P_{tx}^*(f) \ , \ \beta(t) = p_{tx}^*(-t) \quad (2)$$



$H(f) \Rightarrow P_{rx}(f) = H^*(f)$



$$U(e^{j\Omega}) = \sum_k U\left(\frac{\Omega}{2\pi T_s} + \frac{k}{T_s}\right)$$

$$X(f) = S(f)\,H(f)\,H^*(f) = S(f)\,|H(f)|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{X(e^{j\Omega})}_{\Uparrow} = \underbrace{S(e^{j\Omega})}_{\Downarrow} \sum_k \left| H\left(\frac{\Omega}{2\pi T_s} + \frac{k}{T_s}\right)\right|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{S(e^{j\Omega}) = \frac{X(e^{j\Omega})}{\sum_k \left| H\left(\frac{\Omega}{2\pi T_s} + \frac{k}{T_s}\right)\right|^2} \quad > 0}$$

Reconstrucción de la señal

Theorem

Dado cualquier canal de transferencia $H(f)$, si el filtro de recepción, tiene transferencia $H_{rx}(f) = H^*(f)$, es posible reconstruir $r_{LP}(t)$ de las muestras $x_d[n]$. Si además se cumple que : $\sum_k \left|H\left(f + \frac{k}{T_s}\right)\right|^2 > 0$ entonces, es también posible reconstruir $s[n]$.

Es necesario aparear el canal y el filtro de transmisión

Enviamos una secuencia de K muestras s_k y a la salida obtenemos un conjunto de K muestras r[n]

$r[n] - s_k[n] = w[n]$

Quiero encontrar la secuencia s_k enviada que maximice la probabilidad de haber recibido la secuencia r[n] que obtuve a la salida del canal

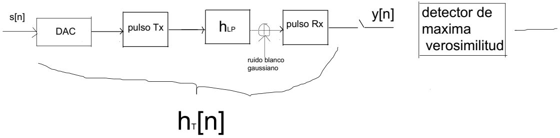
Ecualizador óptimo : Máxima verosimilitud de la secuencia

$$f(\mathbf{r}/\mathbf{s}_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}}\right)^K \exp \frac{-\sum_{n=0}^{K-1}(r[n]-s_k[n])^2}{2\sigma_w^2}$$

Por lo tanto se puede ver que encontrar el estimador ML es equivalente a minimizar :

$$d(\mathbf{r},\mathbf{s_k}) = \sum_{n=0}^{K-1}(r[n]-s_k[n])^2$$

modelo en banda base



Vamos a asumir que

$y[n] = s[n]*h_T[n] + w[n]$

y que w[n] son muestras de ruido blanco y gaussiano. Es cierto?

A la salida de y[n] queremos construir un detector que nos devuelva la secuencia de símbolos que más probablemente se envió dado que yo obtuve a la secuencia y[n].

Viterbi

El canal se modela como un filtro FIR, es como un codificador de un código convolucional, por lo tanto se puede decodificar con el algoritmo de Viterbi pero ahora utilizando la distancia euclídea.

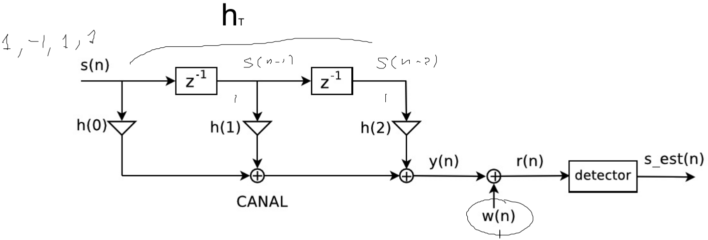


FIGURE – Ejemplo Viterbi

Viterbi

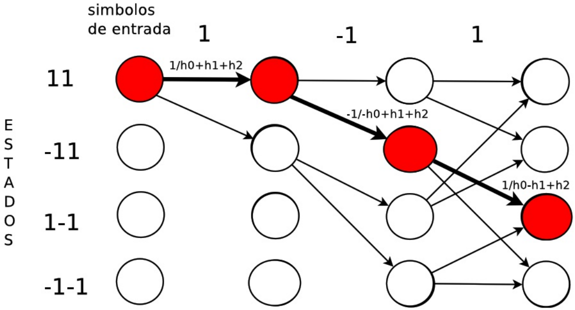


FIGURE – Ejemplo Diagrama de Trellis del modelo de la Figura 1 para un sistema PAM. Si la secuencia de entrada es la indicada en la figura se recorren los estados en rojo y las salidas serán las correspondientes al camino marcado en negrita e indicadas en la Figura.

Viterbi

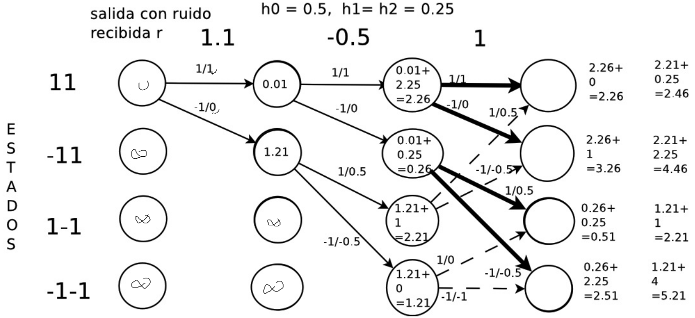


FIGURE – Ejemplo del cálculo de costos para la secuencia recibida con ruido que se indica en la figura del modelo de la Figura 1 para los taps del filtro indicado en la figura.

Viterbi

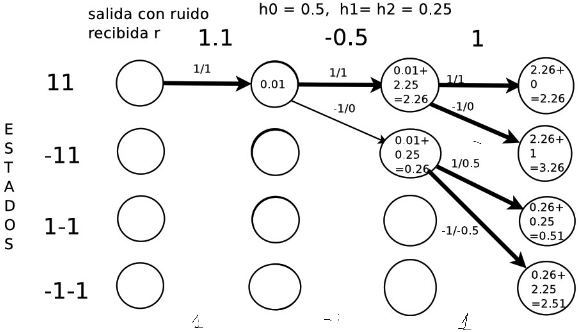


FIGURE – Ejemplo de poda del cálculo de costos para la secuencia recibida con ruido que se indica en la figura del modelo de la Figura 1 para los taps del filtro indicado en la figura.

Modelo tiempo discreto

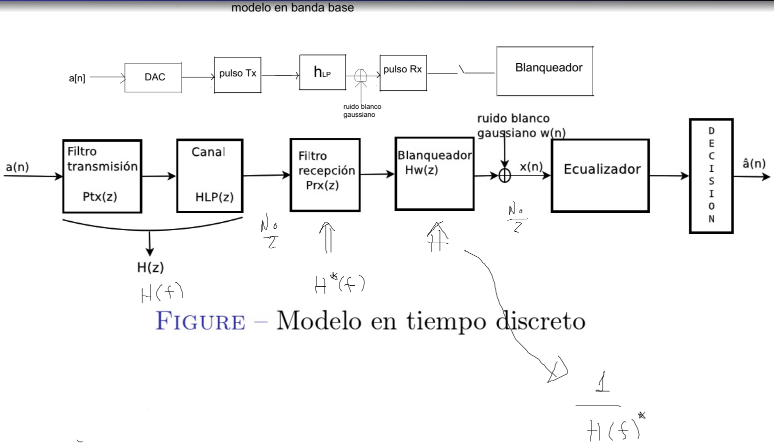


FIGURE – Modelo en tiempo discreto

ZF con $SNR = \infty$

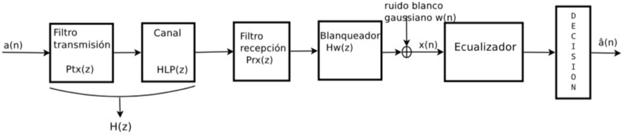
Se asumirá que el filtro de recepción está apareado al canal y que se utiliza un blanqueador.
Si el $SNR = \infty$ entonces

$$H(z)Q(z) = 1 \ , \ Q(z) = \frac{1}{H(z)}$$

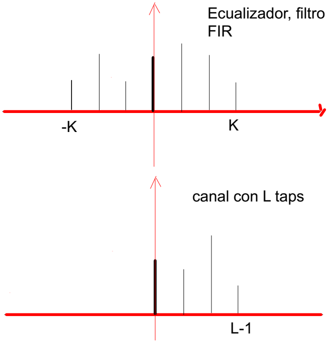
Si el filtro ecualizador tiene infinitos taps es posible ecualizar perfectamente el canal y eliminar la interferencia inter-simbólica.
A la salida del ecualizador ZF si se considera que a la entrada hay ruido blanco gaussiano $w[n]$ con densidad espectral de potencia $\mathcal{N}_0$

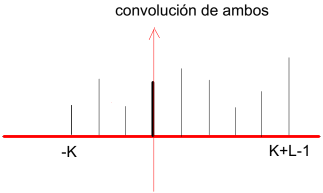
$$SNR_{ZF} = \frac{1}{T_s \int_{\frac{-1}{2T_s}}^{\frac{1}{2T_s}} \frac{\mathcal{N}_0}{|H(e^{j\Omega})|^2} df}$$

Ejemplo

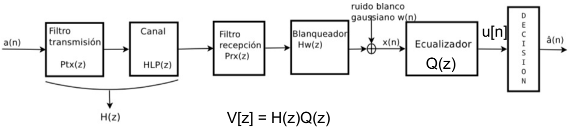


$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(1 - az^{-1})$$





Criterio minimizar la distorsión de pico:



V[z] = H(z)Q(z)

ZF como filtro FIR

$$\begin{aligned}\min_q D(q) &= \min_q \sum_{k=-K,k\neq n}^{K+L-1} |v[k]| \\ &= \min_q \sum_{k=-K,k\neq n}^{K+L-1} |\sum_j h[j]q[k-j]|\end{aligned}$$

Se tienen $2K+L-1$ ecuaciones para igualar a 0, más una ecuación para igualar a 1 y $2K+1$ variables para ajustar.Siempre hay una interferencia residual. El problema de optimización a resolver es el siguiente, tomando $n=0$ para simplificar la notación

$$\min_q D(q)$$

$$\text{sujeto a } |\sum_j h[j]q[-j]| = 1$$

ZF como filtro FIR

Se prueba que este problema de optimización es un problema de optimización convexo y en el caso general debe ser resuelto mediante algún método numérico. Sin, embargo en el citado articulo se prueba también que si :

$$\frac{1}{|h[0]|}\sum_{j=1}^{L}|h[j]| < 1$$

es decir que la interferencia no es excesivamente severa, entonces el óptimo del problema de optimización anterior es el mismo punto que se obtiene de resolver el sistema de ecuaciones :

$$v[k] = 0 \ \forall k, -K < k < K, k \neq 0$$
$$v[0] = 1$$

Ejemplo: $H(z) = h[0] + h[1]z^{-1}$ y se busca un ecualizador con 3 taps

Ecualizadores MSE

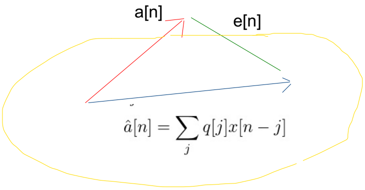
Minimiza :

$$e[n] = a[n] - \hat{a}[n]$$
$$\epsilon = \mathbb{E}\left[e[n]e^*[n]\right]$$

Teniendo en cuenta que :

$$x[n] = \sum_j a[j]h[n-j] + w[n]$$
$$\hat{a}[n] = \sum_j q[j]x[n-j]$$

$$\mathbb{E}\left[e[n]x^*[n-j]\right] = 0 \;\forall j \tag{3}$$
$$\mathbb{E}\left[\left(a[n] - \sum_k q[k]x[n-k]\right)x^*[n-j]\right] = 0 \;\forall j \tag{4}$$
$$\sum_k q[k]r_{xx}[j-k] = r_{ax}[j] \;\forall j \tag{5}$$



$$\hat{a}[n] = \sum_j q[j]x[n-j]$$

El valor esperado E(u[n],v*[n]) es un producto interno.

Busco los coeficientes q[n] que hagan mínima la distancia del vector a[n] y su estimación.
Por lo tanto e[n] debe ser ortogonal al espacio de los vectores x[n]

E(e[n] x*[n-j]) = 0 para todoj

Principio de ortogonalidad.

Ecualizadores MSE

Definiendo $H^*(1/z^*) = \check{H}(z)$

$$Q(z) = \frac{S_{aa}(z)\check{H}(z)}{S_{aa}(z)H(z)\check{H}(z) + S_{ww}(z)}$$

Ecualizadores MSE como filtro FIR

$$\sum_{k=-K}^{K} q[k] r_{xx}[j-k] \quad = \quad r_{ax}[j] \; j \in [-K, K] \tag{6}$$

$$\mathbb{R}_{xx}\mathbf{q}_{opt} \quad = \quad \mathbf{r}_{ax} \tag{7}$$

siendo : $\mathbb{R}_{xx}$ una matriz de dimensiones $(2K+1)$x$(2K+1)$ y donde el elemento $\mathbb{R}_{xx}[i,j] = r_{xx}[i-j]$ y $\mathbf{q}_{opt}$ y $\mathbf{r}_{ax}$ dos vectores columna de dimensión $(2K+1)$. El elemento $\mathbf{r}_{ax}[j] = r_{ax}[j]$.
El filtro óptimo es entonces :

$$\mathbf{q}_{opt} \quad = \quad \mathbb{R}_{xx}^{-1}\mathbf{r}_{ax} \tag{8}$$

Ecualizadores MSE como filtro FIR

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{xx}[i,j] &= r_{xx}[i-j] && (9)\\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{L} h[l]a[i-l] \sum_{m=0}^{L} h^*[m]a^*[j-m]\right] + \mathcal{N}_0\delta_{ij} && (10)\\
&= E[|a[k]|^2] \sum_{l=0}^{L} h[l]h^*[l-[i-j]] + \mathcal{N}_0\delta_{ij} && (11)\\
& && (12)
\end{aligned}$$

Los elementos del vector se pueden calcular de la siguiente forma :

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{ax}[j] &= \mathbb{E}\left[a[k] \sum_{m=0}^{L} a^*[m]h^*[k-j-m] + w^*[k-j]\right] && (13)\\
&= h^*[-j] && (14)
\end{aligned}$$

Ecualizadores adaptivos

Planteo general :

$$\mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{q}_t - \beta \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{J}(q) \tag{15}$$

LMS :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(q) &= \mathbf{E}[e[k]e^*[k]] && (16) \\ \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{J}(q) &= \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{E}[(a[k] - \hat{a}[k])e^*[k]] && (17) \\ &= -\mathbf{E}[\mathbf{x}(k)e^*[k]] && (18) \end{aligned}$$

$$\mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{q}_t + \beta \mathbf{E}[\mathbf{x}(k)e^*(k)] \tag{19}$$

$$\mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{q}_t + \beta \mathbf{x}(k)e^*[k] \tag{20}$$

Ecualizadores adaptivos : CMA

Shalvi et al. de los años 90 la condición necesaria y suficiente para la ecualización total de un canal sin ruido es que se cumplan las siguientes dos propiedades estadísticas entre los símbolos de entrada $a[k]$ y salida $b[k]$

$$\mathbf{E}[|b|^2] = \mathbf{E}[|a|^2] \tag{21}$$

$$\mathbf{K}(b) = \mathbf{K}(a) \tag{22}$$

donde $\mathbf{K}(.)$ es la función de Kurtosis de un proceso definida como

$$\mathbf{K}(a) = \mathbf{E}[|a|^4] - 2\mathbf{E}^2[|a|^2] - |\mathbf{E}[a^2]|^2 \tag{23}$$

Ecualizadores adaptivos : CMA

Teorema :[Shalvi y Weinstein]
Si $\mathbf{E}[|\hat{a}|^2] = \mathbf{E}[|a|^2]$ entonces :
1) $\mathbf{K}(\hat{a}) \leq \mathbf{K}(a)$
2) $\mathbf{K}(\hat{a}) = \mathbf{K}(a)$ si y solo si la respuesta al impulso del sistema ecualizado es la ideal.
De este Teorema se puede formular el problema de ecualización como un problema de optimización :

$$\max \mathbf{K}(\hat{a}[k]) \tag{24}$$

$$\text{sujeto a :} \tag{25}$$

$$\mathbf{E}[|\hat{a}[k]|^2] = \mathbf{E}[|a[k]|^2] \tag{26}$$

Ecualizadores adaptivos : CMA

Godard :

$$\min \left(\left(|\hat{a}[k]|^2 - \frac{\mathbf{E}[|a[k]|^4]}{\mathbf{E}[|a[k]|^2]} \right)^2 \right) \tag{27}$$

$$R_2 = \frac{\mathbf{E}[|a[k]|^4]}{\mathbf{E}[|a[k]|^2]} \tag{28}$$

$$\mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{q}_t - \mu(|\hat{a}[k]|^2 - R_2)\hat{a}[k]^* \mathbf{x}(k) \tag{29}$$