Líneas de transmisión

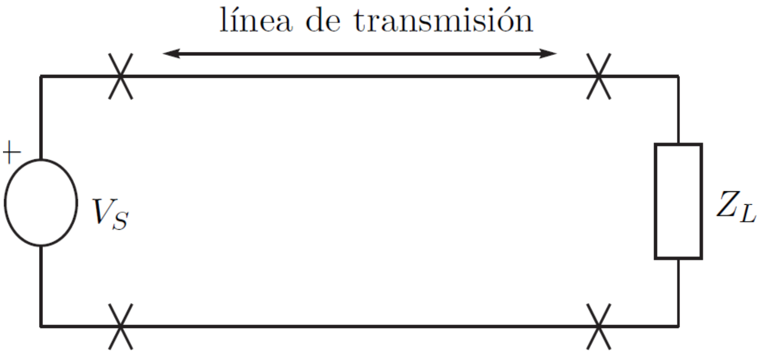
Pablo Monzón

IIE-Fing-UDELAR

Segundo semestre, 2024

Introducción

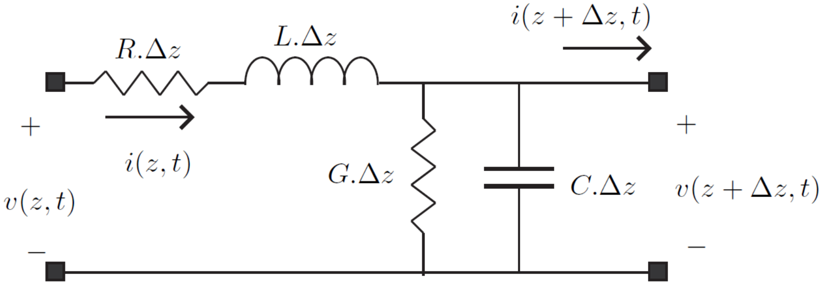
- El concepto *línea de transmisión* se aplica a dispositivos que llevan energía de un punto a otro, en general de una fuente a una carga.
- Nos limitaremos al caso particular de dos conductores paralelos, que se caracterizan por permitir la propagación de los *modos electromagnéticos transversales (TEM)*.
- Haremos un análisis sencillo, en régimen sinusoidal, mediante fasores.



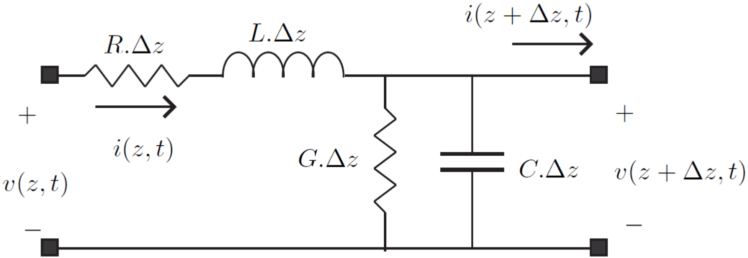
Introducción

Hipótesis de trabajo

- Tenemos dos conductores rectos y paralelos, de sección uniforme.
- En una sección transversal, las corrientes fluyen iguales en módulo y en sentido contrario.
- La tensión y la corriente varían a lo largo de la línea.
- Nos basaremos en un modelo de *cuadripolo infinitesimal*:



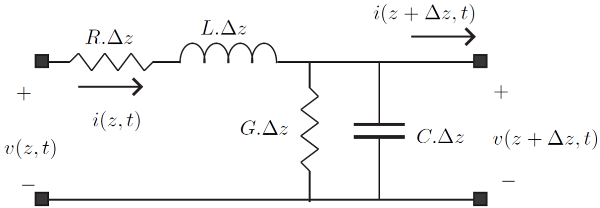
Introducción



Hipótesis de trabajo

- R - es la resistencia por unidad de longitud $(\Omega.m^{-1})$.
- L - es la inductancia por unidad de longitud $(H.m^{-1})$.
- C - es la capacidad por unidad de longitud $(F.m^{-1})$.
- G - es la conductancia por unidad de longitud $(\Omega^{-1}.m^{-1})$.
- z - es la distancia medida desde la fuente de tensión (m).

Análisis



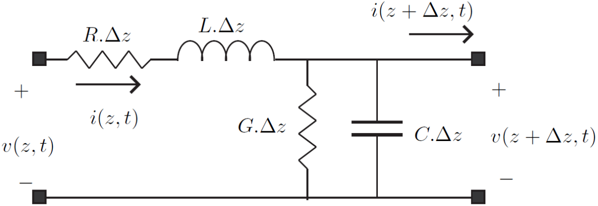
Ecuaciones eléctricas de la línea

- Planteamos Kirchoff de malla:

$$v\left(z,t\right) = R.\Delta z.i(z,t) + L.\Delta z.\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + v\left(z+\Delta z,t\right)$$

$$\Rightarrow \frac{v\left(z+\Delta z,t\right) - v\left(z,t\right)}{\Delta z} = -R.i(z,t) - L.\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

Análisis



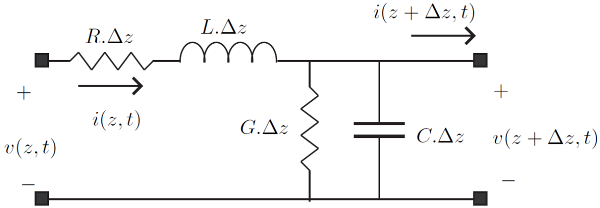
Ecuaciones eléctricas de la línea

- Planteamos Kirchoff de nudo:

$$i\left(z,t\right)=G.\Delta z.v\left(z+\Delta z,t\right)+C.\Delta z.\frac{\partial v\left(z+\Delta z,t\right)}{\partial t}+i\left(z+\Delta z,t\right)$$

$$\Rightarrow\frac{i\left(z+\Delta z,t\right)-i\left(z,t\right)}{\Delta z}=-G.v\left(z+\Delta z,t\right)-C.\frac{\partial v\left(z+\Delta z,t\right)}{\partial t}$$

Análisis



Ecuaciones eléctricas de la línea

- Tomando $\Delta z \to 0$:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} &= -R.i(z,t) - L.\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} &= -G.v(z,t) - C.\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{aligned}}$$

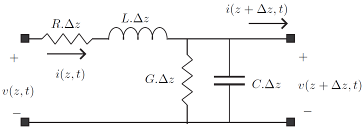
Análisis

Ecuaciones eléctricas de la línea

- Trabajamos en fasores, con amplitud *dependiente de la posición*!!
- $v(z,t) = re\left[V(z)e^{j\omega t}\right]$, $i(z,t) = re\left[I(z)e^{j\omega t}\right]$
- Al derivar respecto del tiempo, aparece un $j\omega$.

tiempo	*fasores*
$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -R.i(z,t) - L.\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$	$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -(R + Lj\omega).I(z)$
$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -G.v(z,t) - C.\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$	$\frac{\partial I(z)}{\partial z} = -(G + Cj\omega).V(z)$

Análisis



$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial V(z)}{\partial z} &= -(R+Lj\omega).I(z) \\ \frac{\partial I(z)}{\partial z} &= -(G+Cj\omega).V(z) \end{aligned}}$$

Ecuaciones eléctricas de la línea

Podemos hallar ecuaciones diferenciales de segundo orden para los fasores $V(z)$ e $I(z)$ (ecuaciones de onda).

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \overbrace{(R+Lj\omega)(G+Cj\omega)}^{\gamma^2}.V(z) = \gamma^2.V(z)$$

$$\frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} = (R+Lj\omega)(G+Cj\omega).I(z) = \gamma^2.I(z).$$

Análisis

Parámetros del análisis fasorial de la línea

Símbolo	Nombre	Unidades
ω	frecuencia angular	$rad.s^{-1}$
$Z = R + j\omega L$	impedancia en serie	$\Omega.m^{-1}$
$Y = G + j\omega C$	admitancia en paralelo	$\Omega^{-1}.m^{-1}$
ωC	susceptancia en paralelo	$\Omega^{-1}.m^{-1}$
ωL	reactancia en serie	$\Omega.m^{-1}$
$\gamma = \alpha + j\beta$	constante de propagación	
α	constante de atenuación	$nepers.m^{-1}$
β	constante de fase	$rad.m^{-1}$

Ondas viajeras

Soluciones de la ecuación de onda: $\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 . V(z)$.

- Planteamos soluciones de la forma

$$V(z) = V_1 e^{-\gamma z} + V_2 e^{+\gamma z} \quad , \quad V_i = |V_i| \angle \zeta_i \, , \, i = 1, 2$$

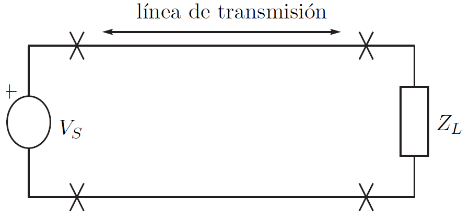
- En el tiempo:

$$v(z,t) = re\left[\left(V_1 e^{-\gamma z} + V_2 e^{\gamma z}\right) e^{j\omega t}\right]$$

$$v(z,t) = re\left[|V_1| e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z + \zeta_1)} + |V_2| e^{\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z + \zeta_2)}\right]$$

$$v(z,t) = \underbrace{|V_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \zeta_1)}_{v_1(z,t)} + \underbrace{|V_2| e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \zeta_2)}_{v_2(z,t)}$$

Ondas viajeras



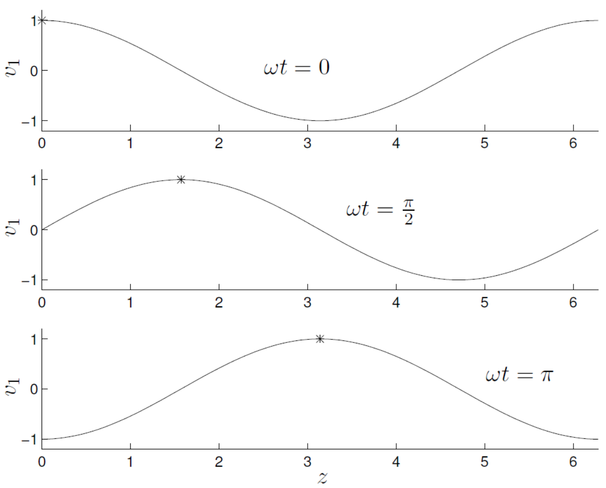
Soluciones de las ecuaciones eléctricas de la línea

$$v(z,t) = \underbrace{|V_1|e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \zeta_1)}_{v_1(z,t)} + \underbrace{|V_2|e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \zeta_2)}_{v_2(z,t)}$$

- Veremos que la onda $v_1(z,t)$ *viaja* hacia la derecha, hacia la carga (*incidente*), en tanto $v_2(z,t)$ *viaja* hacia la fuente (*reflejada*).

Ondas viajeras

¿Cómo se desplaza un punto de fase constante: $\omega t - \beta z$ =cte?



Ondas viajeras

¿Cómo se desplaza un punto de fase constante: $\omega t - \beta z =$cte?

- Sea $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ y miremos cuánto varía el punto z de fase constante entre un t dado y $t + T$.
- $\omega t - \beta z_1 = \omega(t + T) - \beta z_2 \Rightarrow \beta(z_2 - z_1) = \omega T = 2\pi$.
- La *longitud* de la onda vale $\lambda = z_2 - z_1 = \frac{2\pi}{\beta}$.
- La *velocidad de fase o grupo* sale de medir la velocidad del punto z de fase constante $(\omega t - \beta z = cte)$ y vale

$$v_g = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \lambda . f$$

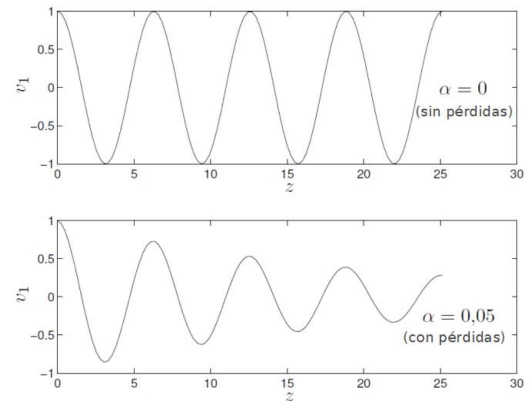
- Por eso β se denomina *constante de fase*.

Ondas viajeras

¿Qué papel juega α, la *constante de atenuación*?

$$|V_1|e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \zeta_1)$$

El término $e^{-\alpha z}$, nos dice cómo se atenúa la onda incidente al viajar.



Impedancia característica

Relación tensión-corriente

- Dado un punto z, escribamos los fasores de tensión y de corriente (incidentes y reflejados):

$$V(z) = V_1 e^{-\gamma z} + V_2 e^{\gamma z} \quad , \quad I(z) = I_1 e^{-\gamma z} + I_2 e^{\gamma z}$$

- Recordando que $\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -(R + Lj\omega).I(z)$:

$$-\gamma V_1 e^{-\gamma z} + \gamma V_2 e^{\gamma z} = -(R + Lj\omega)\left[I_1 e^{-\gamma z} + I_2 e^{\gamma z}\right]$$

- Reordenando: $\left[\gamma V_1 - (R + Lj\omega) I_1\right] e^{-\gamma z} + \left[\gamma V_2 - (R + Lj\omega) I_2\right] e^{\gamma z}$
- De donde

$$\boxed{I_1 = \frac{\gamma}{R + Lj\omega} V_1 \quad , \quad I_2 = -\frac{\gamma}{R + Lj\omega} V_2}$$

Impedancia característica

Relación tensión-corriente

- Miremos el término $\frac{\gamma}{R+Lj\omega}$, que representa una admitancia.
- Podemos definir una impedancia

$$Z_0 = \frac{R+Lj\omega}{\gamma} = \frac{R+j\omega L}{\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}} = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$$

  que se denomina *impedancia característica* de la línea.
- Si $R = G = 0$ ó, en la práctica, $R \ll L\omega$ y $G \ll C\omega$, decimos que la línea es sin pérdidas y su impedancia es real!!:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- Cualquier línea se puede considerar sin pérdidas si se la trabaja a suficientemente alta frecuencia.

Impedancia característica

Relación tensión-corriente

- En términos de la impedancia característica:

$$V(z) = V_1 e^{-\gamma z} + V_2 e^{\gamma z}$$

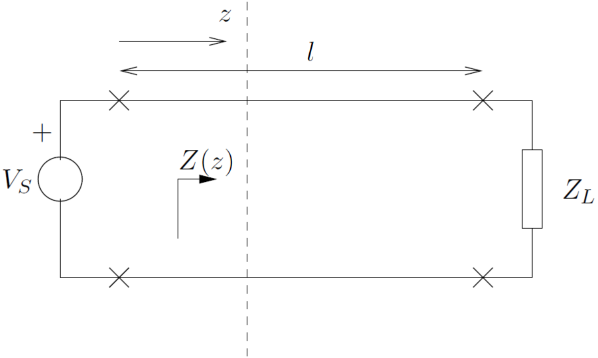
$$I(z) = \frac{1}{Z_0}\left[V_1 e^{-\gamma z} - V_2 e^{\gamma z}\right]$$

- La *impedancia vista* hacia la carga desde un punto z vale:

$$\boxed{Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0.\frac{V_1 e^{-\gamma z} + V_2 e^{\gamma z}}{V_1 e^{-\gamma z} - V_2 e^{\gamma z}} = Z_0.\frac{V_1.e^{-\gamma z}\left(1 + \frac{V_2}{V_1}.e^{2\gamma z}\right)}{V_1.e^{-\gamma z}\left(1 - \frac{V_2}{V_1}.e^{2\gamma z}\right)}}$$

Impedancia característica

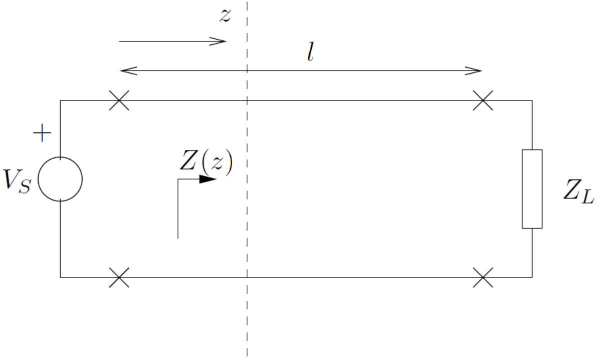
Impedancia vista hacia la carga



$$\boxed{Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0.\frac{V_1 e^{-\gamma z} + V_2 e^{\gamma z}}{V_1 e^{-\gamma z} - V_2 e^{\gamma z}} = Z_0.\frac{\left(1 + \frac{V_2}{V_1}.e^{2\gamma z}\right)}{\left(1 - \frac{V_2}{V_1}.e^{2\gamma z}\right)}}$$

Coeficiente de reflexión

Evaluemos la impedancia vista en la carga!!



$$Z_L = Z(l) = \frac{V(l)}{I(l)} = Z_0 . \frac{V_1 e^{-\gamma l} + V_2 e^{\gamma l}}{V_1 e^{-\gamma l} - V_2 e^{\gamma l}} = Z_0 . \frac{\left(1 + \frac{V_2}{V_1} . e^{2\gamma l}\right)}{\left(1 - \frac{V_2}{V_1} . e^{2\gamma l}\right)}$$

Coeficiente de reflexión

Llamamos **coeficiente de reflexión de tensión** a la razón compleja entre la onda reflejada y la incidente, para $z = l$, siendo l la longitud de la línea (es decir, la posición de la carga):

$$\rho_T = \frac{V_2.e^{\gamma l}}{V_1.e^{-\gamma l}} = \frac{V_2}{V_1}.e^{2\gamma l} = |\rho_T| \angle \Phi_T$$

Entonces

$$Z_L = Z_0.\frac{\left(1 + \frac{V_2}{V_1}.e^{2\gamma l}\right)}{\left(1 - \frac{V_2}{V_1}.e^{2\gamma l}\right)} = Z_0 \frac{1 + \rho_T}{1 - \rho_T} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Z_L}{Z_0} & = & \frac{1+\rho_T}{1-\rho_T} \\ \\ \rho_T & = & \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \end{cases}$$

Máxima potencia transmitida

El coeficiente de reflexión es nulo cuando no hay onda reflejada ($V_2 = 0$), lo que equivale a $Z_L = Z_0$ y toda la potencia entregada por la fuente se disipa en la carga.

Coeficiente de reflexión

$$\boxed{\rho_T = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{\frac{Z_L}{Z_0} - 1}{\frac{Z_L}{Z_0} + 1}}$$

Ejemplos típicos de relación entre ρ_T, Z_L y Z_0.

	$\frac{Z_L}{Z_0}$	ρ_T	$\lvert\rho_T\rvert$	Φ_T	Observaciones
$Z_L = Z_0$	$1 + j0$	$0 + j0$	0	-	No hay onda reflejada
$Z_L = 0$ (corto circuito)	$0 + j0$	$-1 + j0$	1	π	Reflexión con fase opuesta
$Z_L = \infty$ (abierta)	∞	$1 + j0$	1	0	Reflexión con igual fase
Z_0 real $Z_L = a.Z_0$	$a + j0$	$\frac{a-1}{a+1} + j0$	$\pm\frac{a-1}{a+1}$	0 ó π	Carga resistiva mayor o menor que la impedancia característica, también resistiva

Impedancia en z

Retomemos la expresión de $Z(z) = Z_0.\frac{V_1e^{-\gamma z}+V_2e^{\gamma z}}{V_1e^{-\gamma z}-V_2e^{\gamma z}}$

Usaremos que $\rho_T = \frac{V_2}{V_1}e^{2\gamma l} = \frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{(Z_L+Z_0)e^{2\gamma l}}{(Z_L-Z_0)}$.

$$Z(z) = Z_0.\frac{V_1e^{-\gamma z}+V_2e^{\gamma z}}{V_1e^{-\gamma z}-V_2e^{\gamma z}} = Z_0.\frac{\frac{V_1}{V_2}e^{-\gamma z}+e^{\gamma z}}{\frac{V_1}{V_2}e^{-\gamma z}-e^{\gamma z}} =$$

$$Z_0.\frac{\frac{(Z_L+Z_0)}{(Z_L-Z_0)}.e^{-\gamma(z-2l)}+e^{\gamma z}}{\frac{(Z_L+Z_0)}{(Z_L-Z_0)}.e^{-\gamma(z-2l)}-e^{\gamma z}} = Z_0.\frac{(Z_L+Z_0).e^{-\gamma(z-2l)}+(Z_L-Z_0)e^{\gamma z}}{(Z_L+Z_0).e^{-\gamma(z-2l)}-(Z_L-Z_0)e^{\gamma z}}$$

Impedancia en z

Retomemos la expresión de $Z(z)$

Multipliquemos numerador y denominador por $e^{-\gamma l}$:

$$Z(z) = Z_0.\frac{(Z_L + Z_0).e^{-\gamma(z-l)} + (Z_L - Z_0)e^{\gamma(z-l)}}{(Z_L + Z_0).e^{-\gamma(z-l)} - (Z_L - Z_0)e^{\gamma(z-l)}}$$

$$\Rightarrow Z(z) = Z_0.\frac{Z_L\left[e^{-\gamma(z-l)} + e^{\gamma(z-l)}\right] + Z_0.\left[e^{-\gamma(z-l)} - e^{\gamma(z-l)}\right]}{Z_L\left[e^{-\gamma(z-l)} - e^{\gamma(z-l)}\right] + Z_0.\left[e^{-\gamma(z-l)} + e^{\gamma(z-l)}\right]}$$

Usando que $tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, esta expresión puede re-escribirse como:

$$Z(z) = Z_0.\frac{Z_L + Z_0.\tanh\gamma(l-z)}{Z_0 + Z_L.\tanh\gamma(l-z)} = Z_0.\frac{Z_L + Z_0.\tanh\gamma d}{Z_0 + Z_L.\tanh\gamma d}$$

con $d = l - z$ (**distancia medida desde la carga**).

Impedancia en z

$$Z(z) = Z_0.\frac{Z_L + Z_0.\tanh\gamma(l-z)}{Z_0 + Z_L.\tanh\gamma(l-z)} = Z_0.\frac{Z_L + Z_0.\tanh\gamma d}{Z_0 + Z_L.\tanh\gamma d}$$

Comentarios

- Si $Z_L = Z_0$, entonces $Z(z) = Z_0$ a lo largo de toda la línea!!
- Si $Z_L = 0$ (cortocircuito), entonces $Z(z) = Z_0.\tanh\gamma d$.
- Si $Z_L = \infty$ (circuito abierto), entonces $Z(z) = Z_0/\tanh\gamma d$.
- Si la línea es sin pérdidas ($\gamma = j\beta$ y $\alpha = 0$), entonces $\tanh\gamma d = j\tan\beta d$ (verifircarlo!!!) y

$$\boxed{Z(z) = Z_0.\frac{Z_L + jZ_0.\tan\beta d}{Z_0 + jZ_L.\tan\beta d}}$$

- $Z(z)^{(Z_L=0)} = jZ_0.\tan\beta d \quad , \quad Z(z)^{(Z_L=\infty)} = \frac{jZ_0}{\tan\beta d}$
  Variando d (es decir, variando la distancia al final) obtenemos valores arbitrarios de reactancia!!

Impedancia en z

Transformadores

Evaluamos en $d = l$ (al principio de la línea)

$$Z_{in} = Z(z)|_{d=l} = Z_0.\frac{Z_L + jZ_0.\tan\beta l}{Z_0 + jZ_L.\tan\beta l} \quad \text{(sin pérdidas)}$$

- $l = n\frac{\lambda}{2}$ (proporcional a media longitud de onda)

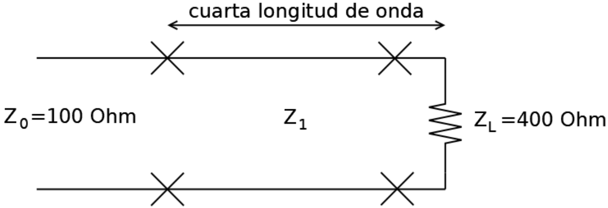
$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} n \frac{\lambda}{2} = n\pi \Rightarrow \tan\beta l = 0 \Rightarrow Z_{in} = Z_L$$

- $l = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ (proporcional a cuarta longitud de onda)

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda}(2n+1)\frac{\lambda}{4} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\beta l = \infty \Rightarrow Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$

Ejemplo de uso de transformador

Para *adaptar* la impedancia Z_L (dada) a una línea de impedancia característica Z_0 (dada), intercalamos un transformador de $\frac{\lambda}{4}$ de impedancia característica Z_1. ¿Cuánto debe valer Z_1?

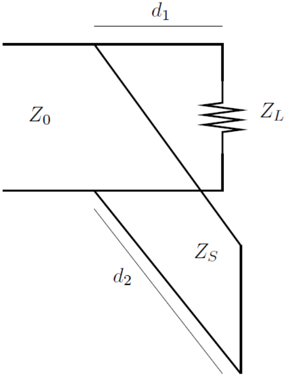


Debe ser $Z_0 = Z_{in} = \frac{Z_1^2}{Z_L}$, de donde

$$Z_1 = \sqrt{Z_0 Z_L} = \sqrt{400 \times 100\Omega^2} = 200\Omega$$

Stub

- Supongamos que tenemos una línea sin pérdidas con una carga terminal no adaptada y queremos eliminar la onda reflejada hacia la fuente, pero no podemos *abrir* el sistema para intercalar un transformador.

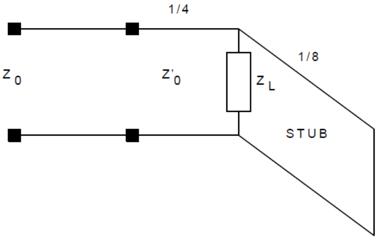


  - Podemos *colgar en paralelo* un trozo de línea de largo d_2, con alguna impedancia característica Z_S, a una distancia d_1 de la carga.
  - Se puede colocar cortocircuitado o abierto y sólo aporta reactancia!!!

Ejemplo

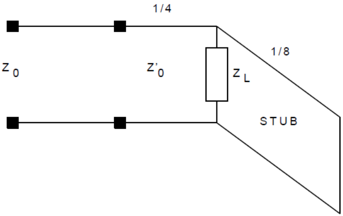
La figura muestra un generador que alimenta una carga Z_L a través de una línea de transmisión de impedancia característica de $Z_0 = 50\Omega$. La carga Z_L se conecta a la línea de la siguiente forma,

- se conecta un stub en cortocircuito en paralelo con la carga. El stub tiene una longitud l_S igual a $\lambda/8$ y está hecho con la misma línea original ($Z_S = Z_0 = 50\Omega$).
- se conectan la carga y el stub a la línea de 50Ω a través de un tramo de línea de impedancia característica $Z'_0 = 75\Omega$ y longitud $l_T = \lambda/4$.



Se pide calcular el valor de la impedancia de carga Z_L, sabiendo que resulta adaptada (esto quiere decir que no hay onda reflejada hacia el generador).

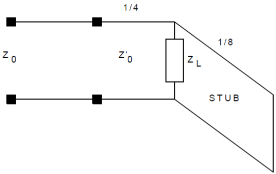
Ejemplo



- Como sabemos que la carga resulta adaptada, tenemos que calcular la impedancia que se ve en el punto de conexión del transformador de cuarta longitud de onda e igualarla a Z_0.
- El stub en cortocircuito aporta una impedancia imaginaria pura de valor $Z_{stub} = jZ_S.\tan\beta l_S$, con $\beta l_S = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4}$. Entonces $Z_{stub} = jZ_S$.
- Por otro lado, el transformador de cuarta longitud de onda adapta la impedancia complexiva $Z_L||Z_{stub}$ a la línea, a través de la relación

$$Z_0 = \frac{Z_0'^2}{Z_L||jZ_S} \Rightarrow Z_L||jZ_S = x \in \mathbb{R} \quad (Z_0, Z_0' \in \mathbb{R})$$

Ejemplo



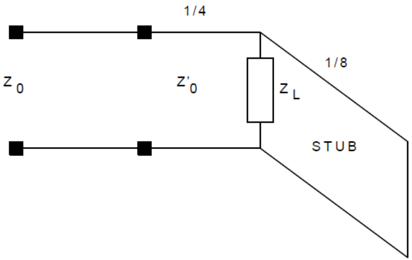
- Trabajemos con admitancias: $Y_L = Z_L^{-1} = G_L + jB_L$, $Y_{stub} = -jZ_S^{-1}$.
- Entonces imponemos $Y_{eq} = Y_L || Y_{stub} = Y_L + Y_{stub}$ sea resistiva pura:

$$\boxed{B_L = -B_{stub} = Z_S^{-1}} \Rightarrow Y_{eq} = G_L \Rightarrow Z_{eq} = G_L^{-1}$$

- Luego imponemos la adaptación a la línea deseada: $Z_0 = \frac{Z_0'^2}{Z_{eq}}$

$$Z_0 = Z_0'^2 . G_L \Rightarrow \boxed{G_L = \frac{Z_0}{Z_0'^2}}$$

Ejemplo



- Recordemos los valores: $Z_0 = Z_S = 50\Omega$, $Z_0'^2 = 75\Omega$.
- Entonces $G_L = 0{,}009\Omega_{-1}$, $jB_L = 0{,}02\Omega^{-1}$.
- Finalmente,

$$\boxed{Z_L = \frac{1}{G_L + jB_L} = \frac{G_L - jB_L}{G_L^2 + B_L^2} = (18{,}6 - j41{,}7)\Omega}$$