

Líneas de transmisión

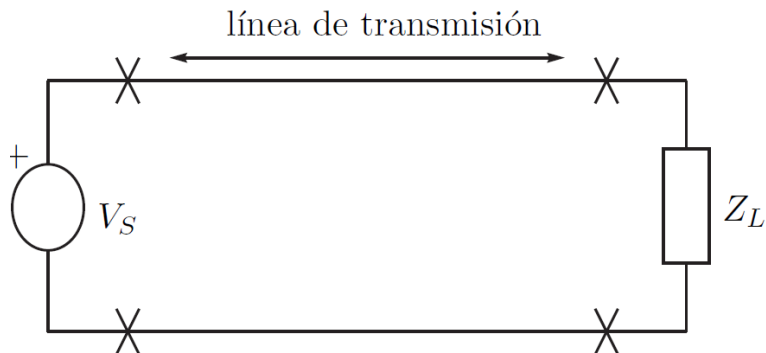
Pablo Monzón

IIE-Fing-UDELAR

Segundo semestre, 2020



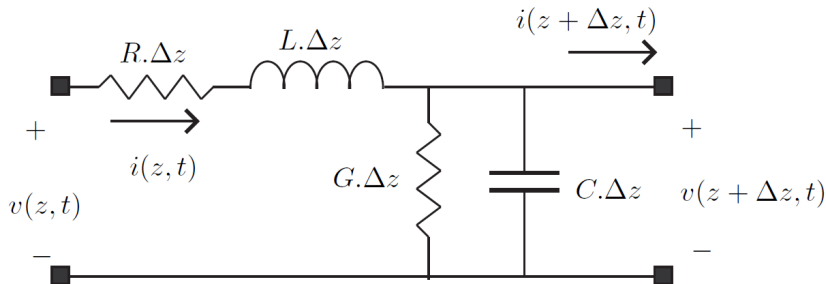
- El concepto *línea de transmisión* se aplica a dispositivos que llevan energía de un punto a otro, en general de una fuente a una carga.
- Nos limitaremos al caso particular de dos conductores paralelos, que se caracterizan por permitir la propagación de los *modos electromagnéticos transversales (TEM)*.
- Haremos un análisis sencillo, en régimen sinusoidal, mediante fasores.

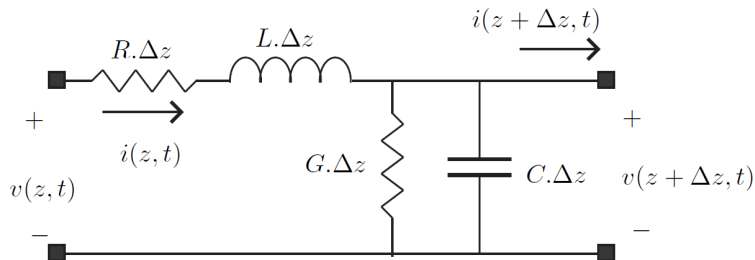




Hipótesis de trabajo

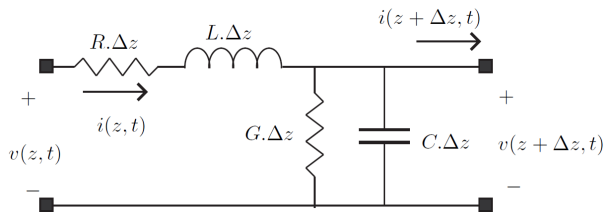
- Tenemos dos conductores rectos y paralelos, de sección uniforme.
- En una sección transversal, las corrientes fluyen iguales en módulo y en sentido contrario.
- La tensión y la corriente varían a lo largo de la línea.
- Nos basaremos en un modelo de *cuadripolo infinitesimal*:





Hipótesis de trabajo

- R - es la resistencia por unidad de longitud ($\Omega.m^{-1}$).
- L - es la inductancia por unidad de longitud ($Hy.m^{-1}$).
- C - es la capacidad por unidad de longitud ($F.m^{-1}$).
- G - es la conductancia por unidad de longitud ($\Omega^{-1}.m^{-1}$).
- z - es la distancia medida desde la fuente de tensión (m).

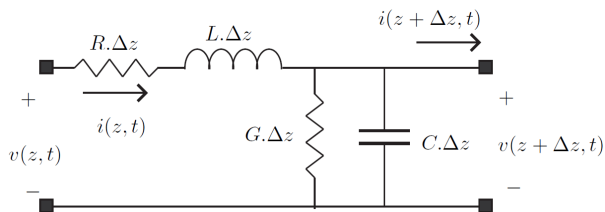


Ecuaciones eléctricas de la línea

- Planteamos Kirchoff de malla:

$$v(z, t) = R \cdot \Delta z \cdot i(z, t) + L \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} + v(z + \Delta z, t)$$

$$\Rightarrow \frac{v(z + \Delta z, t) - v(z, t)}{\Delta z} = -R \cdot i(z, t) - L \cdot \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}$$

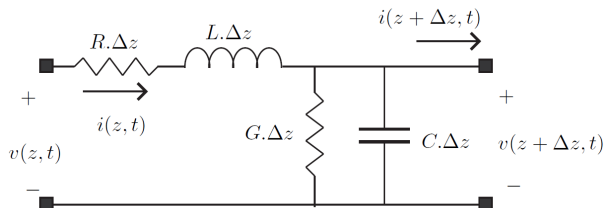


Ecuaciones eléctricas de la línea

- Planteamos Kirchoff de nudo:

$$i(z, t) = G \cdot \Delta z \cdot v(z + \Delta z, t) + C \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t} + i(z + \Delta z, t)$$

$$\Rightarrow \frac{i(z + \Delta z, t) - i(z, t)}{\Delta z} = -G \cdot v(z + \Delta z, t) - C \cdot \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t}$$



Ecuaciones eléctricas de la línea

- Tomando $\Delta z \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -R \cdot i(z,t) - L \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

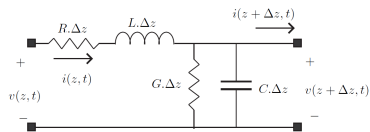
$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -G \cdot v(z,t) - C \cdot \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$$



Ecuaciones eléctricas de la línea

- Trabajamos en fasores, con amplitud *dependiente de la posición*!!
- $v(z, t) = \text{re} [V(z)e^{j\omega t}]$, $i(z, t) = \text{re} [I(z)e^{j\omega t}]$
- Al derivar respecto del tiempo, aparece un $j\omega$.

<i>tiempo</i>		<i>fasores</i>
$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z}$	$= -R \cdot i(z, t) - L \cdot \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}$	$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -(R + Lj\omega) \cdot I(z)$
$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z}$	$= -G \cdot v(z, t) - C \cdot \frac{\partial v(z, t)}{\partial t}$	$\frac{\partial I(z)}{\partial z} = -(G + Cj\omega) \cdot V(z)$



$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -(R + Lj\omega) \cdot I(z)$$

$$\frac{\partial I(z)}{\partial z} = -(G + Cj\omega) \cdot V(z)$$

Ecuaciones eléctricas de la línea

Podemos hallar ecuaciones diferenciales de segundo orden para los fasores $V(z)$ e $I(z)$ (ecuaciones de onda).

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \overbrace{(R + Lj\omega)(G + Cj\omega)}^{\gamma^2} \cdot V(z) = \gamma^2 \cdot V(z)$$

$$\frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} = (R + Lj\omega)(G + Cj\omega) \cdot I(z) = \gamma^2 \cdot I(z).$$



Parámetros del análisis fasorial de la línea

Símbolo	Nombre	Unidades
ω	frecuencia angular	$rad.s^{-1}$
$Z = R + j\omega L$	impedancia en serie	$\Omega.m^{-1}$
$Y = G + j\omega C$	admitancia en paralelo	$\Omega^{-1}.m^{-1}$
ωC	susceptancia en paralelo	$\Omega^{-1}.m^{-1}$
ωL	reactancia en serie	$\Omega.m^{-1}$
$\gamma = \alpha + j\beta$	constante de propagación	
α	constante de atenuación	$nepers.m^{-1}$
β	constante de fase	$rad.m^{-1}$



Soluciones de la ecuación de onda: $\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 \cdot V(z)$.

- Planteamos soluciones de la forma

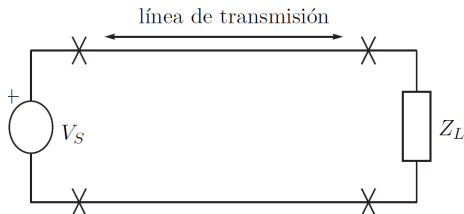
$$V(z) = V_1 e^{-\gamma z} + V_2 e^{+\gamma z} \quad , \quad V_i = |V_i| \angle \zeta_i \quad , \quad i = 1, 2$$

- En el tiempo:

$$v(z, t) = \text{re} \left[(V_1 e^{-\gamma z} + V_2 e^{\gamma z}) e^{j\omega t} \right]$$

$$v(z, t) = \text{re} \left[|V_1| e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z + \zeta_1)} + |V_2| e^{\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z + \zeta_2)} \right]$$

$$v(z, t) = \underbrace{|V_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \zeta_1)}_{v_1(z, t)} + \underbrace{|V_2| e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \zeta_2)}_{v_2(z, t)}$$



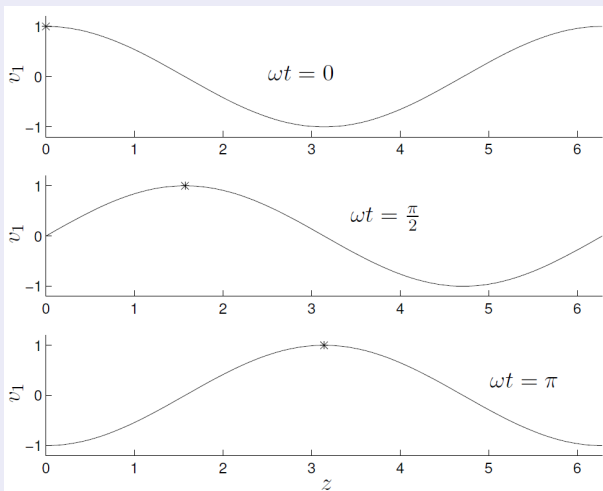
Soluciones de las ecuaciones eléctricas de la línea

$$v(z, t) = \underbrace{|V_1|e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \zeta_1)}_{v_1(z, t)} + \underbrace{|V_2|e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \zeta_2)}_{v_2(z, t)}$$

- Veremos que la onda $v_1(z, t)$ *viaja* hacia la derecha, hacia la carga (*incidente*), en tanto $v_2(z, t)$ *viaja* hacia la fuente (*reflejada*).



¿Cómo se desplaza un punto de fase constante: $\omega t - \beta z = \text{cte}$?





¿Cómo se desplaza un punto de fase constante: $\omega t - \beta z = \text{cte}$?

- Sea $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ y miremos cuánto varía el punto z de fase constante entre un t dado y $t + T$.
- $\omega t - \beta z_1 = \omega(t + T) - \beta z_2 \Rightarrow \beta(z_2 - z_1) = \omega T = 2\pi$.
- La *longitud* de la onda vale $\lambda = z_2 - z_1 = \frac{2\pi}{\beta}$.
- La *velocidad de fase o grupo* sale de medir la velocidad del punto z de fase constante ($\omega t - \beta z = \text{cte}$) y vale

$$v_g = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \lambda \cdot f$$

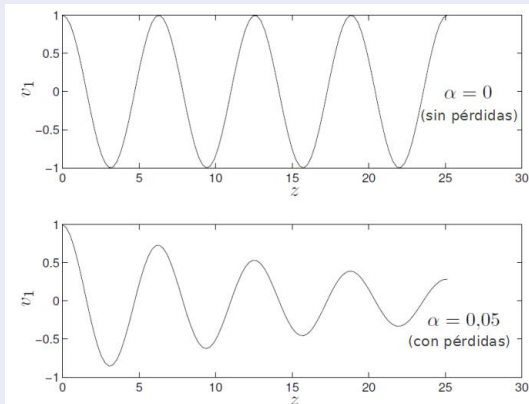
- Por eso β se denomina *constante de fase*.



¿Qué papel juega α , la *constante de atenuación*?

$$|V_1|e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \zeta_1)$$

El término $e^{-\alpha z}$, nos dice cómo se atenúa la onda incidente al viajar.





Relación tensión-corriente

- Dado un punto z , escribamos los fasores de tensión y de corriente (incidentes y reflejados):

$$V(z) = V_1 e^{-\gamma z} + V_2 e^{\gamma z} \quad , \quad I(z) = I_1 e^{-\gamma z} + I_2 e^{\gamma z}$$

- Recordando que $\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -(R + Lj\omega) \cdot I(z)$:

$$-\gamma V_1 e^{-\gamma z} + \gamma V_2 e^{\gamma z} = -(R + Lj\omega) [I_1 e^{-\gamma z} + I_2 e^{\gamma z}]$$

- Reordenando: $[\gamma V_1 - (R + Lj\omega)I_1] e^{-\gamma z} + [\gamma V_2 - (R + Lj\omega)I_2] e^{\gamma z}$
- De donde

$$I_1 = \frac{\gamma}{R + Lj\omega} V_1 \quad , \quad I_2 = -\frac{\gamma}{R + Lj\omega} V_2$$



Relación tensión-corriente

- Miremos el término $\frac{\gamma}{R+Lj\omega}$, que representa una admitancia.
- Podemos definir una impedancia

$$Z_0 = \frac{R + Lj\omega}{\gamma} = \frac{R + j\omega L}{\sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

que se denomina *impedancia característica* de la línea.

- Si $R = G = 0$ ó, en la práctica, $R \ll L\omega$ y $G \ll C\omega$, decimos que la línea es **sin pérdidas** y su impedancia es real!!:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- Cualquier línea se puede considerar sin pérdidas si se la trabaja a suficientemente alta frecuencia.



Relación tensión-corriente

- En términos de la impedancia característica:

$$V(z) = V_1 e^{-\gamma z} + V_2 e^{\gamma z}$$

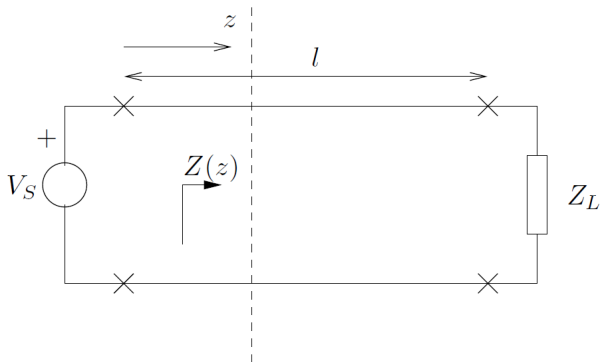
$$I(z) = \frac{1}{Z_0} [V_1 e^{-\gamma z} - V_2 e^{\gamma z}]$$

- La *impedancia vista* hacia la carga desde un punto z vale:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \cdot \frac{V_1 e^{-\gamma z} + V_2 e^{\gamma z}}{V_1 e^{-\gamma z} - V_2 e^{\gamma z}} = Z_0 \cdot \frac{V_1 \cdot e^{-\gamma z} \left(1 + \frac{V_2}{V_1} \cdot e^{2\gamma z}\right)}{V_1 \cdot e^{-\gamma z} \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \cdot e^{2\gamma z}\right)}$$



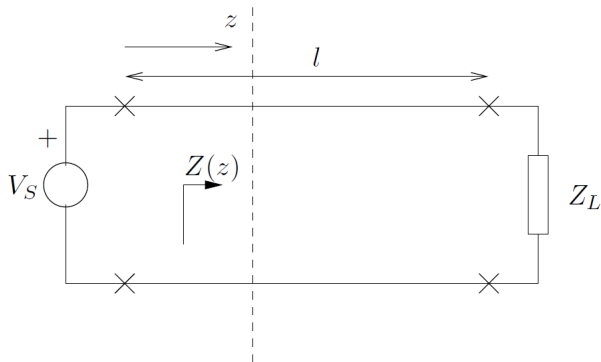
Impedancia vista hacia la carga



$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \cdot \frac{V_1 e^{-\gamma z} + V_2 e^{\gamma z}}{V_1 e^{-\gamma z} - V_2 e^{\gamma z}} = Z_0 \cdot \frac{\left(1 + \frac{V_2}{V_1} \cdot e^{2\gamma z}\right)}{\left(1 - \frac{V_2}{V_1} \cdot e^{2\gamma z}\right)}$$



Evaluemos la impedancia vista en la carga!!



$$Z_L = Z(l) = \frac{V(l)}{I(l)} = Z_0 \cdot \frac{V_1 e^{-\gamma l} + V_2 e^{\gamma l}}{V_1 e^{-\gamma l} - V_2 e^{\gamma l}} = Z_0 \cdot \frac{\left(1 + \frac{V_2}{V_1} \cdot e^{2\gamma l}\right)}{\left(1 - \frac{V_2}{V_1} \cdot e^{2\gamma l}\right)}$$



Coefficiente de reflexión

Llamamos **coeficiente de reflexión de tensión** a la razón compleja entre la onda reflejada y la incidente, para $z = l$, siendo l la longitud de la línea (es decir, la posición de la carga):

$$\rho_T = \frac{V_2 \cdot e^{\gamma l}}{V_1 \cdot e^{-\gamma l}} = \frac{V_2}{V_1} \cdot e^{2\gamma l} = |\rho_T| \angle \Phi_T$$

Entonces

$$Z_L = Z_0 \cdot \frac{\left(1 + \frac{V_2}{V_1} \cdot e^{2\gamma l}\right)}{\left(1 - \frac{V_2}{V_1} \cdot e^{2\gamma l}\right)} = Z_0 \frac{1 + \rho_T}{1 - \rho_T} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{1 + \rho_T}{1 - \rho_T} \\ \rho_T = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \end{cases}$$

Máxima potencia transmitida

El coeficiente de reflexión es nulo cuando si no hay onda reflejada ($V_2 = 0$), lo que equivale a $Z_L = Z_0$ y toda la potencia entregada por la fuente se disipa en la carga.



$$\rho_T = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{\frac{Z_L}{Z_0} - 1}{\frac{Z_L}{Z_0} + 1}$$

Ejemplos típicos de relación entre ρ_T , Z_L y Z_0 .

	$\frac{Z_L}{Z_0}$	ρ_T	$ \rho_T $	Φ_T	Observaciones
$Z_L = Z_0$	$1 + j0$	$0 + j0$	0	-	No hay onda reflejada
$Z_L = 0$ (corto circuito)	$0 + j0$	$-1 + j0$	1	π	Reflexión con fase opuesta
$Z_L = \infty$ (abierta)	∞	$1 + j0$	1	0	Reflexión con igual fase
Z_0 real $Z_L = a \cdot Z_0$	$a + j0$	$\frac{a-1}{a+1} + j0$	$\pm \frac{n-1}{n+1}$	0 ó π	Carga resistiva mayor o menor que la impedancia característica, también resistiva



Retomemos la expresión de $Z(z) = Z_0 \cdot \frac{V_1 e^{-\gamma z} + V_2 e^{\gamma z}}{V_1 e^{-\gamma z} - V_2 e^{\gamma z}}$

Usaremos que $\rho_T = \frac{V_2}{V_1} e^{2\gamma l} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{(Z_L + Z_0) e^{2\gamma l}}{(Z_L - Z_0)}$.

$$Z(z) = Z_0 \cdot \frac{V_1 e^{-\gamma z} + V_2 e^{\gamma z}}{V_1 e^{-\gamma z} - V_2 e^{\gamma z}} = Z_0 \cdot \frac{\frac{V_1}{V_2} e^{-\gamma z} + e^{\gamma z}}{\frac{V_1}{V_2} e^{-\gamma z} - e^{\gamma z}} =$$

$$Z_0 \cdot \frac{\frac{(Z_L + Z_0)}{(Z_L - Z_0)} \cdot e^{-\gamma(z-2l)} + e^{\gamma z}}{\frac{(Z_L + Z_0)}{(Z_L - Z_0)} \cdot e^{-\gamma(z-2l)} - e^{\gamma z}} = Z_0 \cdot \frac{(Z_L + Z_0) \cdot e^{-\gamma(z-2l)} + (Z_L - Z_0) e^{\gamma z}}{(Z_L + Z_0) \cdot e^{-\gamma(z-2l)} - (Z_L - Z_0) e^{\gamma z}}$$



Retomemos la expresión de $Z(z)$

Multiplicamos numerador y denominador por $e^{-\gamma l}$:

$$Z(z) = Z_0 \cdot \frac{(Z_L + Z_0) \cdot e^{-\gamma(z-l)} + (Z_L - Z_0) e^{\gamma(z-l)}}{(Z_L + Z_0) \cdot e^{-\gamma(z-l)} - (Z_L - Z_0) e^{\gamma(z-l)}}$$

$$\Rightarrow Z(z) = Z_0 \cdot \frac{Z_L [e^{-\gamma(z-l)} + e^{\gamma(z-l)}] + Z_0 [e^{-\gamma(z-l)} - e^{\gamma(z-l)}]}{Z_L [e^{-\gamma(z-l)} - e^{\gamma(z-l)}] + Z_0 [e^{-\gamma(z-l)} + e^{\gamma(z-l)}]}$$

Usando que $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, esta expresión puede re-escribirse como:

$$Z(z) = Z_0 \cdot \frac{Z_L + Z_0 \cdot \tanh \gamma(l-z)}{Z_0 + Z_L \cdot \tanh \gamma(l-z)} = Z_0 \cdot \frac{Z_L + Z_0 \cdot \tanh \gamma d}{Z_0 + Z_L \cdot \tanh \gamma d}$$

con $d = l - z$ (**distancia medida desde la carga**).



$$Z(z) = Z_0 \cdot \frac{Z_L + Z_0 \cdot \tanh \gamma(l - z)}{Z_0 + Z_L \cdot \tanh \gamma(l - z)} = Z_0 \cdot \frac{Z_L + Z_0 \cdot \tanh \gamma d}{Z_0 + Z_L \cdot \tanh \gamma d}$$

Comentarios

- Si $Z_L = Z_0$, entonces $Z(z) = Z_0$ a lo largo de toda la línea!!
- Si $Z_L = 0$ (**cortocircuito**), entonces $Z(z) = Z_0 \cdot \tanh \gamma d$.
- Si $Z_L = \infty$ (**circuito abierto**), entonces $Z(z) = Z_0 / \tanh \gamma d$.
- Si la línea es sin pérdidas ($\gamma = j\beta$ y $\alpha = 0$), entonces $\tanh \gamma d = j \tan \beta d$ (verificarlo!!!) y

$$Z(z) = Z_0 \cdot \frac{Z_L + jZ_0 \cdot \tan \beta d}{Z_0 + jZ_L \cdot \tan \beta d}$$

- $Z(z)^{(Z_L=0)} = jZ_0 \cdot \tan \beta d$, $Z(z)^{(Z_L=\infty)} = \frac{jZ_0}{\tan \beta d}$

Variando d (es decir, variando la distancia al final) obtenemos valores arbitrarios de reactancia!!



Transformadores

Evaluamos en $d = l$ (al principio de la línea)

$$Z_{in} = Z(z)|_{d=l} = Z_0 \cdot \frac{Z_L + jZ_0 \cdot \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \cdot \tan \beta l} \quad (\text{sin pérdidas})$$

- $l = n \frac{\lambda}{2}$ (proporcional a media longitud de onda)

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} n \frac{\lambda}{2} = n\pi \Rightarrow \tan \beta l = 0 \Rightarrow Z_{in} = Z_L$$

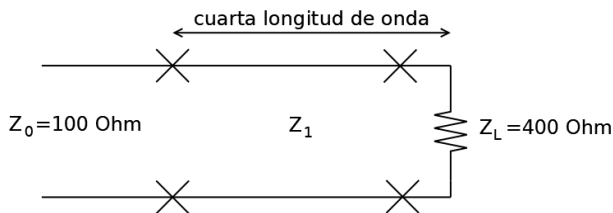
- $l = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$ (proporcional a cuarta longitud de onda)

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} (2n + 1) \frac{\lambda}{4} = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \beta l = \infty \Rightarrow Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$

Ejemplo de uso de transformador



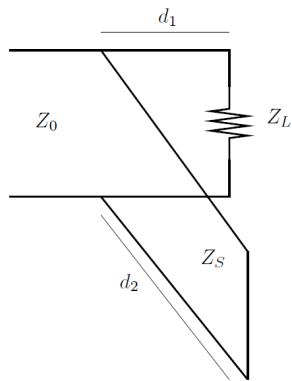
Para *adaptar* la impedancia Z_L (dada) a una línea de impedancia característica Z_0 (dada), intercalamos un transformador de $\frac{\lambda}{4}$ de impedancia característica Z_1 . ¿Cuánto debe valer Z_1 ?



Debe ser $Z_0 = Z_{in} = \frac{Z_1^2}{Z_L}$, de donde

$$Z_1 = \sqrt{Z_0 Z_L} = \sqrt{400 \times 100 \Omega^2} = 200 \Omega$$

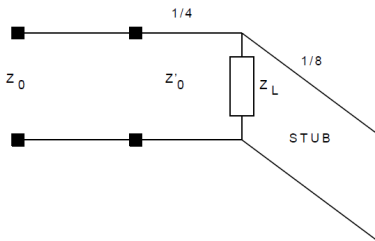
- Supongamos que tenemos una línea sin pérdidas con una carga terminal no adaptada y queremos eliminar la onda reflejada hacia la fuente, pero no podemos *abrir* el sistema para intercalar un transformador.
- Podemos *colgar en paralelo* un trozo de línea de largo d_2 , con alguna impedancia característica Z_S , a una distancia d_1 de la carga.
- Se puede colocar cortocircuitado o abierto y sólo aporta reactancia!!!



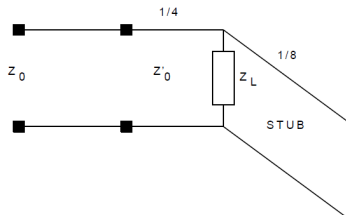
Ejemplo

La figura muestra un generador que alimenta una carga Z_L a través de una línea de transmisión de impedancia característica de $Z_0 = 50\Omega$. La carga Z_L se conecta a la línea de la siguiente forma,

- se conecta un stub en cortocircuito en paralelo con la carga. El stub tiene una longitud l_S igual a $\lambda/8$ y está hecho con la misma línea original ($Z_S = Z_0 = 50\Omega$).
- se conectan la carga y el stub a la línea de 50Ω a través de un tramo de línea de impedancia característica $Z'_0 = 75\Omega$ y longitud $l_T = \lambda/4$.

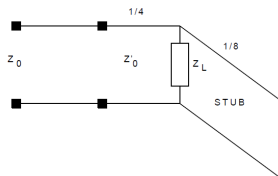


Se pide calcular el valor de la impedancia de carga Z_L , sabiendo que resulta adaptada (esto quiere decir que no hay onda reflejada hacia el generador).



- Como sabemos que la carga resulta adaptada, tenemos que calcular la impedancia que se ve en el punto de conexión del transformador de cuarta longitud de onda e igualarla a Z_0 .
- El stub en cortocircuito aporta una impedancia imaginaria pura de valor $Z_{stub} = jZ_S \cdot \tan \beta l_S$, con $\beta l_S = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4}$. Entonces $Z_{stub} = jZ_S$.
- Por otro lado, el transformador de cuarta longitud de onda adapta la impedancia complejiva $Z_L || Z_{stub}$ a la línea, a través de la relación

$$Z_0 = \frac{Z_0'^2}{Z_L || jZ_S} \Rightarrow Z_L || jZ_S = x \in \mathbb{R} \quad (Z_0, Z_0' \in \mathbb{R})$$



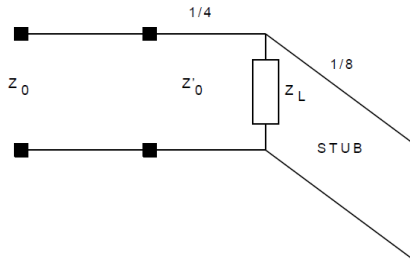
- Trabajemos con admitancias: $Y_L = Z_L^{-1} = G_L + jB_L$, $Y_{stub} = -jZ_S^{-1}$.
- Entonces imponemos $Y_{eq} = Y_L || Y_{stub} = Y_L + Y_{stub}$ sea resistiva pura:

$$B_L = -B_{stub} = Z_S^{-1} \Rightarrow Y_{eq} = G_L \Rightarrow Z_{eq} = G_L^{-1}$$

- Luego imponemos la adaptación a la línea deseada: $Z_0 = \frac{Z_0'^2}{Z_{eq}}$

$$Z_0 = Z_0'^2 \cdot G_L \Rightarrow G_L = \frac{Z_0}{Z_0'^2}$$

Ejemplo



- Recordemos los valores: $Z_0 = Z_S = 50\Omega$, $Z_0'^2 = 75\Omega$.
- Entonces $G_L = 0,009\Omega_{-1}$, $jB_L = 0,02\Omega^{-1}$.
- Finalmente,

$$Z_L = \frac{1}{G_L + jB_L} = \frac{G_L - jB_L}{G_L^2 + B_L^2} = (18,6 - j41,7)\Omega$$