Circuitos trifásicos

Pablo Monzón

IIE-Fing-UDELAR

Segundo semestre, 2020

Introducción

- Estudiaremos circuitos en régimen sinusoidal, alimentados por un sistema de fuentes conformado por tres fuentes sinusoidales de la misma frecuencia y amplitud, pero con distintas fases relativas.
- Constituyen la base de los sistemas eléctricos.
- En lugar de abordar el análisis por superposición de las fuentes individuales, lo haremos considerando el sistema de fuentes como una unidad en sí mismo.
- Si bien algunos planteos los haremos para un número arbitrario q de fuentes, rápidamente nos focalizaremos al caso trifásico ($q = 3$).
- La presentación será breve y acotada. Varios de estos temas se retomarán en cursos posteriores generales (Introducción a la Electrotécnica, Instalaciones Eléctricas) y en el perfil "Potencia".
- Si bien nos guiaremos según el capítulo 6 de las notas de Sistemas Lineales 1, el tema se encuentra en varios de los textos de referencia del curso.

Definiciones

Consideremos q fuentes sinusoidales $v_1(t), \ldots, v_q(t)$, todas de pulsación ω, con el mismo valor eficaz V y consideremos sus fasores asociados $V_1, \ldots, V_q$. Sea Φ el ángulo $\Phi = \frac{2\pi}{q}$.

Sistema polifásico de fuentes

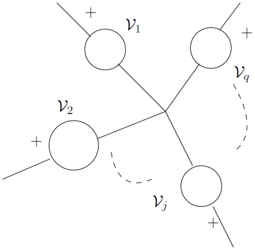
Diremos que un sistema polifásico de fuentes de tensión sinusoidales de frecuencia ω es **equilibrado** y **perfecto** si la suma de los fasores asociados a cada fuente es nula y si todas las señales tienen la misma amplitud y las diferencia de fase entre dos cualesquiera de las fuentes es múltiplo entero de $\Phi = \frac{2\pi}{q}$, siendo q el número de fuentes o *fases* del sistema.

Definiciones

Ejemplo

El siguiente es un sistema polifásico de q fuentes, equilibrado y perfecto:

$$\begin{array}{rcl} v_1(t) & = & A.sin(\omega t) \\ v_2(t) & = & A.sin(\omega t + \Phi) \\ & \vdots & \\ v_{q-1}(t) & = & A.sin\left[\omega t + (q-2).\Phi\right] \\ v_q(t) & = & A.sin\left[\omega t + (q-1).\Phi\right] \end{array} \quad , \quad \Phi = \frac{2\pi}{q}$$



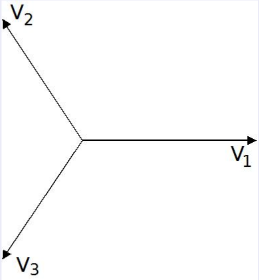
Definiciones

Ejemplo

Para el caso $q = 3$ y $\omega = 2\pi 50Hz = 100\pi rad/s$, tenemos dos posibles *orientaciones* o sentidos de los fasores:

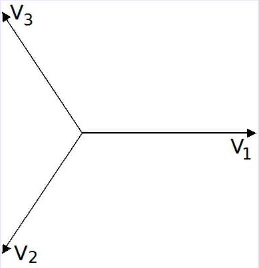
Secuencia negativa

$$\begin{aligned} v_1(t) &= A.sin(\omega t) \\ v_2(t) &= A.sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_3(t) &= A.sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$



Secuencia positiva

$$\begin{aligned} v_1(t) &= A.sin(\omega t) \\ v_2(t) &= A.sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_3(t) &= A.sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$



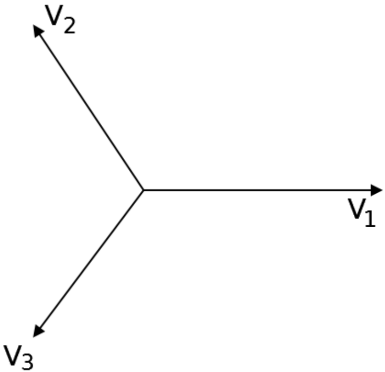
Definiciones

Comentarios

- Si bien se puede pensar en tener tres fuentes sinusoidales y construir a partir de ellas un sistema de fuentes trifásico, en general se implementa con una única máquina generadora.
- En ese sentido, cuando dibujamos una estrella de fuentes, es sólo un modelo de la fuente trifásica.
- Podríamos pensar también un modelo en polígono, donde las fuentes formen una malla (en la práctica no se hace!!!).
- En muchos de los problemas a abordar, la fuente trifásica la conforman los cables que vienen de la empresa eléctrica.

Ejercicio

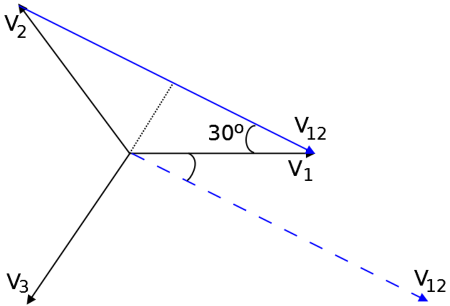
Consideremos el siguiente sistema equilibrado y perfecto de fasores:



Hallar primero el fasor $V_{12} = V_1 - V_2$.
Luego los fasores $V_{23} = V_2 - V_3$ y $V_{31} = V_3 - V_1$.

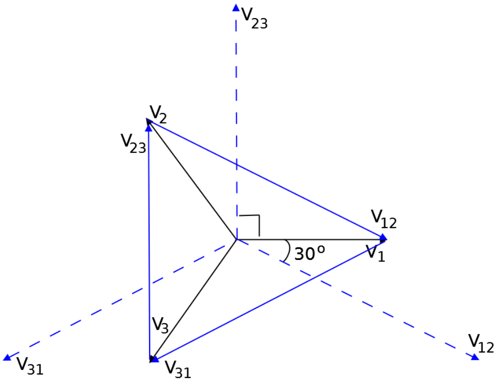
Ejercicio

Hallamos primero el fasor $V_{12} = V_1 - V_2$.



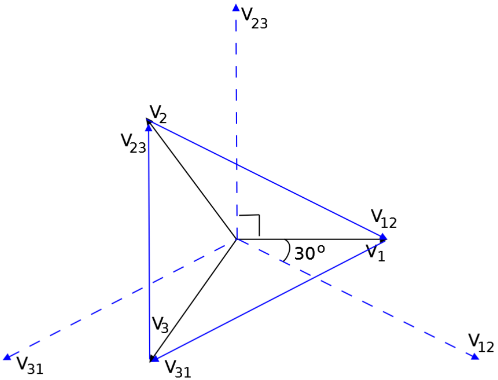
Tenemos que $|V_{12}| = 2|V_1|\cos(\Phi) = 2|V_1|\cos\left(30^o\right) = 2|V_1|\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}|V_1|$ y $\angle V_{12} = -30^o = -\frac{\pi}{6}$.

Ejercicio



- Los *fasores diferencias* tienen amplitud $\sqrt{3}$ veces más grandes.
- Forman un sistema equilibrado y perfecto, *girado* 30^o respecto del sistema original.
- El sentido del giro depende de la secuencia inicial.

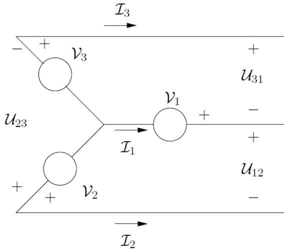
Ejercicio



- A la inversa, dividimos entre $\sqrt{3}$ y giramos $\pm 30^o$ y obtenemos un sistema equilibrado y perfecto que es solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} V_{12} & = & V_1 - V_2 \\ V_{23} & = & V_2 - V_3 \\ V_{31} & = & V_3 - V_1 \end{cases}$$

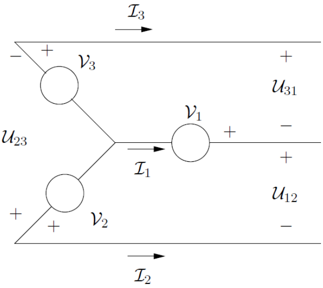
Tensiones compuestas y tensiones de fase



- Consideremos un sistema de fuentes trifásico, equilibrado y perfecto.
- Calculemos las tensiones que se ven entre las líneas que llevan las tensiones y corrientes de las fuentes hacias las cargas.
- Las tensiones U_{12}, U_{23} y U_{31} se denominan tensiones **de línea** o **compuestas**.
- Observemos que

$$\begin{cases} U_{12} & = & V_1 - V_2 \\ U_{23} & = & V_2 - V_3 \\ U_{31} & = & V_3 - V_1 \end{cases}$$

Tensiones compuestas y tensiones de fase

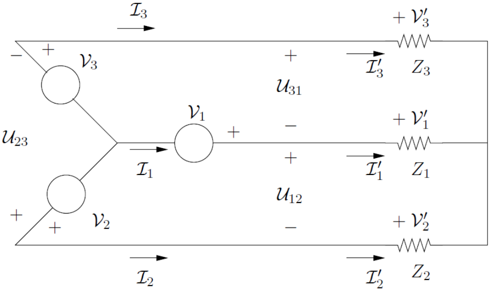


- Observemos que

$$\begin{cases} U_{12} & = & V_1 - V_2 \\ U_{23} & = & V_2 - V_3 \\ U_{31} & = & V_3 - V_1 \end{cases}$$

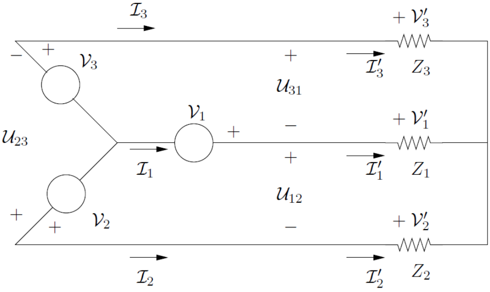
- Por lo visto antes, las tensiones **compuestas** U_{12}, U_{23} y U_{31} forman también un sistema equilibrado y perfecto, siendo $\sqrt{3}$ veces más grandes en valor eficaz que las **tensiones de fase** y estando giradas $\pm 30^o$, sin importar la carga!!!.

Cargas en estrella



- Consideremos el esquema de conexión de arriba: sistema de fuentes trifásico y tres cargas con un borne en común y el otro borne en cada línea (estrella).
- Denominemos *tensiones y corrientes de fase* (V_i', I_i') a las tensiones y corrientes de las cargas y *tensiones y corrientes de línea* ($U_{i,i+1}$, I_i) a las tensiones compuestas y las corrientes que vienen por las líneas desde las fuentes.

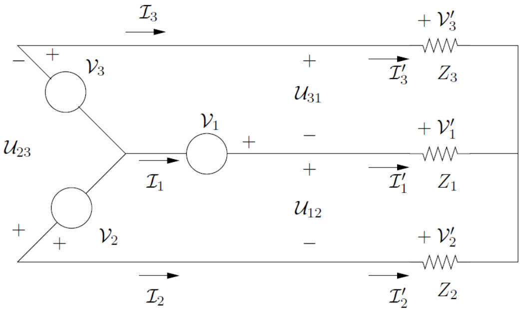
Cargas en estrella



- Por cómo están conectadas las cargas, se cumple que

$$\begin{cases} I_1 = I_1' \\ I_2 = I_2' \\ I_3 = I_3' \end{cases} , \quad \begin{cases} U_{12} = V_1' - V_2' \\ U_{23} = V_2' - V_3' \\ U_{31} = V_3' - V_1' \end{cases}$$

Cargas en estrella

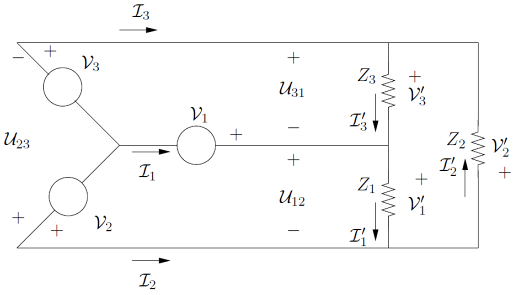


$$\begin{cases} I_1 = I_1' \\ I_2 = I_2' \\ I_3 = I_3' \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{12} = V_1' - V_2' \\ U_{23} = V_2' - V_3' \\ U_{31} = V_3' - V_1' \end{cases}$$

- Observemos que $I_1' + I_2' + I_3' = I_1 + I_2 + I_3 = 0$.
- $V_i' = Z_i.I_i'$, $i = 1, 2, 3$.
- Si las impedancias son idénticas, entonces por simetría estamos en la situación de antes y las tensiones de fase forman un sistema equilibrado y perfecto!!!

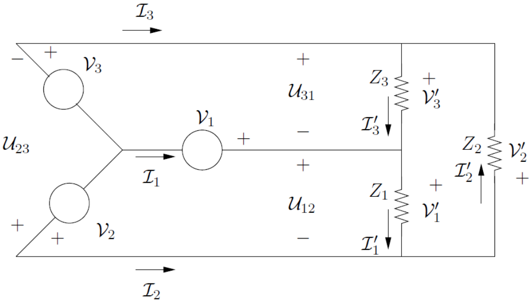
Cargas en polígono



- Por cómo están conectadas las cargas, se cumple que

$$\left\{\begin{array}{lcl} I_1 & = & I_1' - I_3' \\ I_2 & = & I_2' - I_1' \\ I_3 & = & I_3' - I_2' \end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{lcl} U_{12} & = & V_1' \\ U_{23} & = & V_2' \\ U_{31} & = & V_3' \end{array}\right.$$

Cargas en polígono

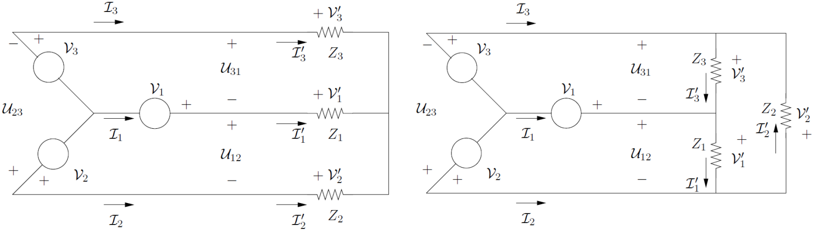


$$\begin{cases} I_1 &= I'_1 - I'_3 \\ I_2 &= I'_2 - I'_1 \\ I_3 &= I'_3 - I'_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{12} &= V'_1 \\ U_{23} &= V'_2 \\ U_{31} &= V'_3 \end{cases}$$

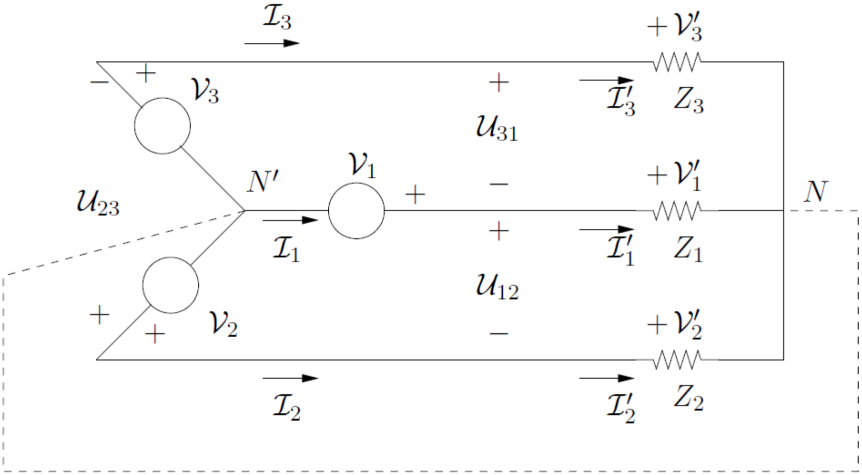
- $V'_1 + V'_2 + V'_3 = U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0.$
- $I'_i = \frac{V'_i}{Z_i}$, $i = 1, 2, 3.$
- Si las impedancias son idénticas, entonces por simetría estamos en la situación de antes y las corrientes de fase (y las de línea) forman un sistema equilibrado y perfecto!!!

Resumiendo



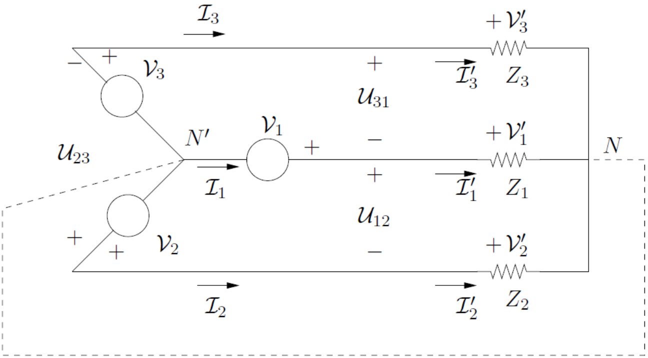
- El sistema de fuentes impone un conjunto de tensiones compuestas.
- Para cargas en estrella, las corrientes de línea son las corrientes de fase y para cargas idénticas, las tensiones de fase se obtienen de las tensiones de línea dividiendo entre $\sqrt{3}$ y girando $\pm 30^o$.
- Para cargas en polígono, las tensiones de línea (compuestas) son las tensiones de fase y para cargas idénticas, las corrientes de fase se obtienen de las corrientes de línea dividiendo entre $\sqrt{3}$ y girando $\pm 30^o$.

Neutro



Supongamos cargas en estrella y conectemos un cable ideal entre los centros de las fuentes y las cargas.

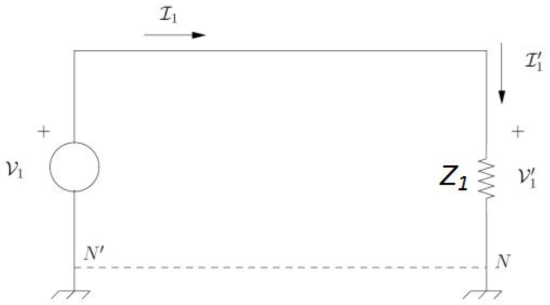
Neutro



- Al cortocircuitar los puntos N y N', podemos analizar lo que ocurre en la línea 1 a través del siguiente circuito equivalente monofásico:

Neutro

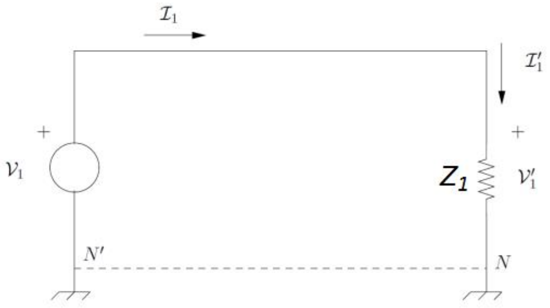
Circuito equivalente monofásico



- Es sencillo de resolver ($I_1 = I'_1 = \frac{V_1}{Z_1}$).
- Tenemos un circuito equivalente por cada fase.
- Si las cargas son iguales, entonces alcanza con resolver para la fase 1 y luego simplemente sumar (o restar) 120^o y 240^o.

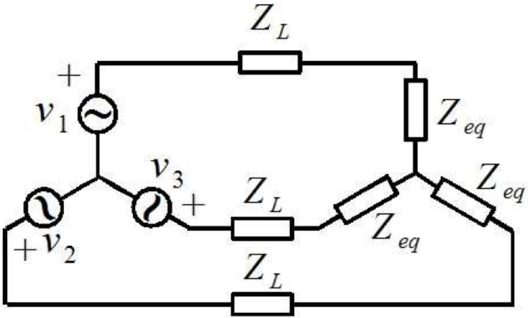
Neutro

Circuito equivalente monofásico



- La corriente por el neutro vale $I_N = I_1 + I_2 + I_3$.
- Si las cargas son idénticas, $I_1 + I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow U_{NN'} = 0$ aunque no haya neutro!!!
  (Para convencernos de esto, podemos suponer una resistencia asociada al cable de neutro, en la que no habrá caída.)

Ejemplo



Un sistema de fuentes equilibrado y perfecto

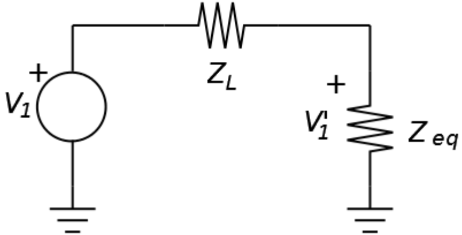
$$v_1(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t) \quad , \quad v_2(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t - 2\pi/3)$$

$$v_3(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t - 4\pi/3)$$

alimenta una carga trifásica formada por tres impedancias idénticas Z_{eq} a través de líneas idénticas modeladas por una impedancia Z_L. Hallar las tensiones de fase.

Ejemplo

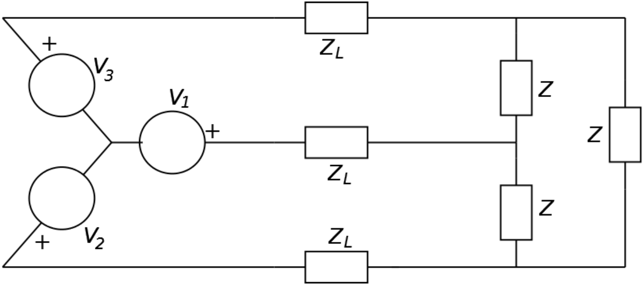
- Pasamos al equivalente monofásico.



- Aplicamos división de tensión: $V_1' = \frac{Z_{eq}}{Z_L+Z_{eq}} V_1$.
- Para obtener V_2' y V_3' restamos 120^o y 240^o, tal cual sucede con las fuentes.
- Razonamos igual para las corrientes, notando que la corriente de línea vale $I_1 = \frac{V_1}{Z_L+Z_{eq}}$.

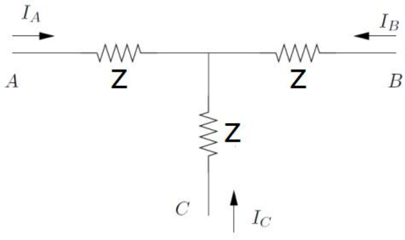
Transfiguración estrella-triángulo

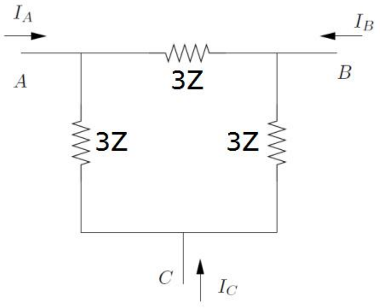
¿Podemos obtener un equivalente monofásico para cargas en triángulo?



- Acá no hay neutro!!
- Podemos usar la transfiguración estrella-triángulo y obtener un equivalente en estrella, sin neutro.

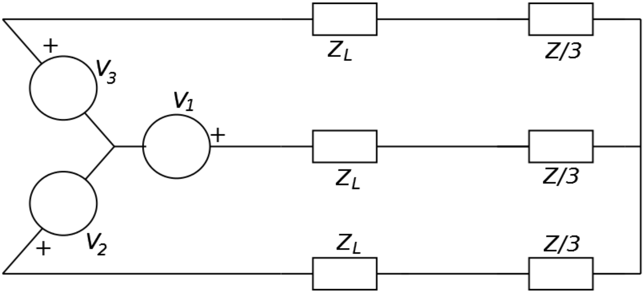
Transfiguración estrella-triángulo





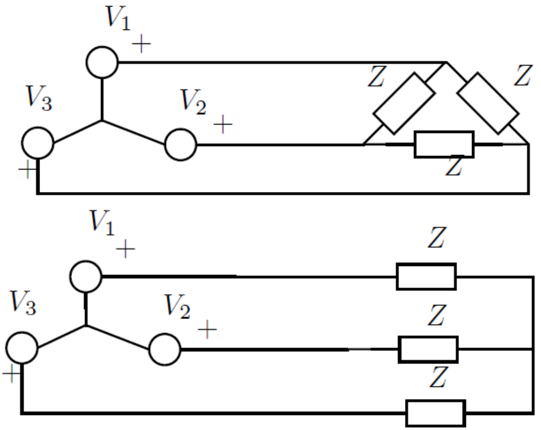
- Los circuitos de arriba son equivalentes desde el punto de vista de la corriente que consumen cuando se los conecta a una misma fuente trifásica.
- Herramienta fundamental en el análisis de circuitos trifásicos!!
- Cuando las impedancias no son idénticas, el resultado no es tan sencillo.

Transfiguración estrella-triángulo



- Si el triángulo original tiene cargas idénticas Z, su estrella equivalente también (de valor $Z/3$).
- Podemos usar el equivalente monofásico.

Ejercicio



Se tiene una carga trifásica que puede conectarse en estrella o triángulo.

- ¿Cuál tiene la mayor tensión de fase?
- ¿Cuál tiene la mayor corriente de fase?

Potencia trifásica

(Asumimos valores eficaces!!!)

- La potencia que entrega un sistema trifásico de fuentes es la suma de la potencia activa, reactiva o aparente que entrega cada fuente:

$$
\begin{aligned}
P_S = &\quad re(V_1\overline{I_1}) + re(V_2\overline{I_2}) + re(V_3\overline{I_3}) \\
Q_S = &\quad im(V_1\overline{I_1}) + im(V_2\overline{I_2}) + im(V_3\overline{I_3}) \\
S_S = &\quad V_1\overline{I_1} + V_2\overline{I_2} + V_3\overline{I_3}
\end{aligned}
$$

- Lo mismo del lado de la carga: la potencia es la suma de la potencia de cada fase.

$$
\begin{aligned}
P_L = &\quad re(V_1'\overline{I_1'}) + re(V_2'\overline{I_2'}) + re(V_3'\overline{I_3'}) \\
Q_L = &\quad im(V_1'\overline{I_1'}) + im(V_2'\overline{I_2'}) + im(V_3'\overline{I_3'}) \\
S_L = &\quad V_1'\overline{I_1'} + V_2'\overline{I_2'} + V_3'\overline{I_3'}
\end{aligned}
$$

Potencia trifásica

Caso particular de cargas idénticas

- Escribamos $P_{Li} = re(V_i'\overline{I_i'})$ la potencia activa de la fase i.
- Sabemos que en cada fase los fasores de tensión y corriente están desfasados según la fase φ de la impedancia Z.
- En el tiempo: $p_L(t) = v_1'(t).i_1'(t) + v_2'(t).i_2'(t) + v_3'(t).i_3'(t)$.
- Razonando igual que hicimos en el caso monofásico, podemos escribir: $p_L(t) = 3.V_{eff}.I_{eff}.\cos(\varphi) +$ términos sinusoidales del doble de la frecuencia y desfasados 120^o, que suman 0!!!.
- Entonces, la potencia instantánea $p_L(t) = 3.V_{eff}.I_{eff}.\cos(\varphi)$ es constante!!! e igual a la potencia media P_L.

Potencia trifásica

Caso particular de cargas idénticas

$$\boxed{P_L = p_L(t) = 3.|V_i'|.|I_i'|.\cos(\varphi)}$$

- Cargas en estrella:

$$|I_i'| = |I_i| \quad , \quad |V_i'| = \frac{|U_{i,i+1}|}{\sqrt{3}} \Rightarrow P_L = 3.\frac{|U_{i,i+1}|}{\sqrt{3}}.|I_i|.\cos(\varphi)$$

- Cargas en triángulo:

$$|I_i'| = \frac{|I_i|}{\sqrt{3}} \quad , \quad |V_i'| = |U_{i,i+1}| \Rightarrow P_L = 3.|U_{i,i+1}|.\frac{|I_i|}{\sqrt{3}}.\cos(\varphi)$$

- En ambos casos: $\boxed{P_L = \sqrt{3}.|U_{i,i+1}|.|I_i|.\cos(\varphi)}$.

Teorema de Blondel

Teorema de Blondel

Consideremos un sistema polifásico alimentado por una fuente en estrella no necesariamente equilibrada ni perfecta y con una carga cualquiera, con la única condición de que si la carga está en estrella, no existe neutro entre ella y las fuentes. Sea X un punto de referencia cualquiera y denotemos por $\mathcal{V}_{jX}$ la tensión entre la línea j y el punto X. Entonces la potencia activa total consumida a las fuentes por las cargas viene dada por la expresión

$$P = \sum_{j=1}^{q} re\left[\mathcal{V}_{jX}.\bar{\mathcal{I}}_j\right]$$

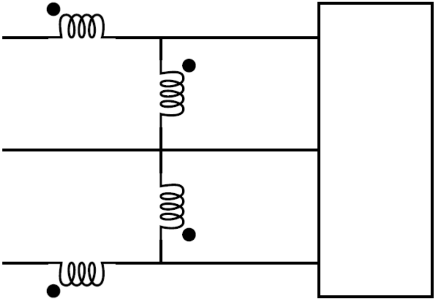
- El teorema brinda una herramienta para obtener la potencia de una carga trifásica en base a medidas exteriores a la misma (las corrientes de línea y tensiones entre las líneas y un punto arbitrario.)
- Como veremos de la prueba, el resultado vale también para las potencias reactiva y aparente.

Medida de potencia trifásica

- Antes de la demostración veamos una aplicación de la expresión

$$P = \sum_{j=1}^{q} re\left[\mathcal{V}_{jX}.\bar{\mathcal{I}}_j\right]$$

- Si elegimos como punto X una de las líneas, reducimos en 1 el número de sumandos que dan la potencia.
- Entonces, con dos vatímetros monofásicos bien conectados podemos medir la potencia trifásica que consume una carga.



Método de los dos vatímetros

Teorema de Blondel

Demostración

- Miremos primero el caso de cargas en estrella sin neutro.
- Recordemos que la potencia vale $P = \sum_{j=1}^{q} re(V_j' \overline{I_j'})$.
- Como las corrientes de línea coinciden con las de fase:

$$\sum_{j=1}^{q} \mathcal{I}_j = \sum_{j=1}^{q} \mathcal{I}_j' = 0 \quad \text{(no hay neutro!!!)}$$

- Si N es el centro de la estrella de las cargas: $V_j' = V_{jX} - V_{NX}$.
- Entonces

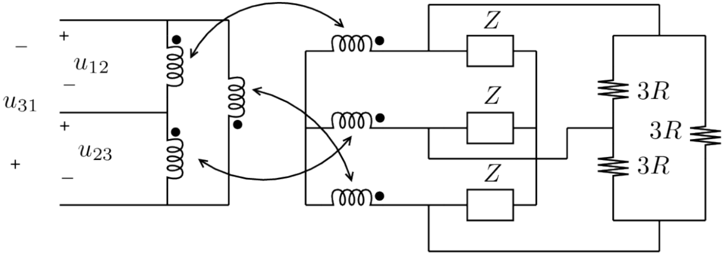
$$P = \sum_{j=1}^{q} re\left[\left(\mathcal{V}_{jX} - \mathcal{V}_{NX}\right).\overline{\mathcal{I}_j'}\right] = re\left[\sum_{j=1}^{q} \mathcal{V}_{jX}.\overline{\mathcal{I}_j'}\right] - \underbrace{re\left[\mathcal{V}_{NX}.\sum_{j=1}^{q} \overline{\mathcal{I}_j'}\right]}_{\substack{\| \\ 0}}$$

Teorema de Blondel

Demostración

- Para cargas en polígono, podemos pasar a una estrella equivalente, sin neutro!! y quedamos en la situación anterior.
- Al ser equivalente, las tensiones y corrientes de línea no cambian y obtenemos la potencia total en función de medidas externas a la carga.
- También se puede obtener la tesis directamente a partir de la expresión de la potencia de las cargas (ver notas del curso).

Ejemplo



Sabiendo que cada transformador monofásico ideal tiene relación de vueltas N_1/N_2 y que $Z = R + Lj\omega$, hallar

- El equivalente monofásico. Sugerencia: pasar el triángulo a estrella, hacer el paralelo de estrellas, pasar las impedancias a los primarios.
- Si $Z = R + Lj\omega$, compensar la potencia reactiva trifásica.