Cuadripolos

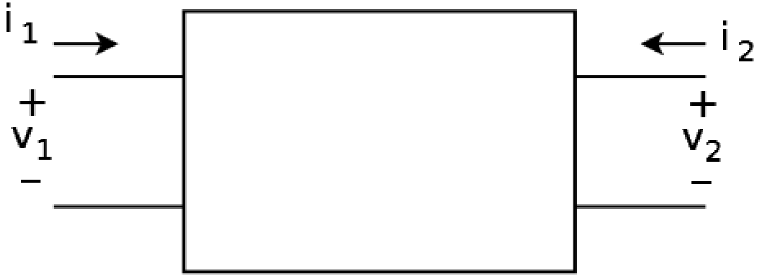
Pablo Monzón

IIE-Fing-UDELAR

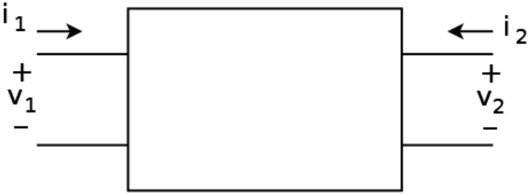
Segundo semestre, 2020

Modelo *caja negra*

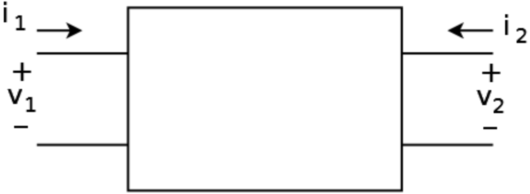
- Si tenemos una caja negra lineal con dos terminales, podemos representarla por su equivalente Thévenin o Norton.
- Consideraremos ahora una caja negra con cuatro terminales: lado 1 y lado 2, que en general referiremos como *entrada* y *salida* (cuadripolo o red de dos puertas).



Modelo *caja negra*

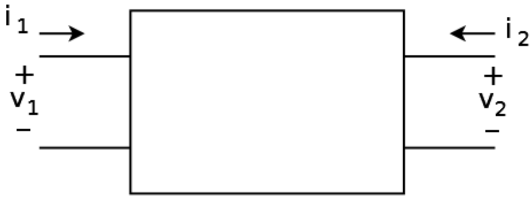


- Vamos a deducir una descripción de la caja negra sólo en términos de las tensiones y corrientes de entrada (v_1 e i_1) y salida (v_2 e i_2), medidas según la figura.
- Vamos a trabajar en el dominio de Laplace, pero podemos usar fasores para circuitos en régimen o señales temporales para circuitos resistivos.
- Ya hemos visto algo similar cuando vimos el transformador.



Hipótesis generales

- Sistema lineal.
- Sin fuentes independientes (ni datos previos).
- Esto implica que las únicas excitaciones independientes vienen de fuera de la caja negra.
- Pueden haber fuentes dependientes o no (cuadripolo activo o pasivo).
- La corriente i_1 sale por el terminal inferior del lado 1 (lo mismo con i_2 del lado 2).



Mallas del circuito

- Planteamos las ecuaciones de Kirchoff de malla del ciruito.
- La malla 1 será la que tiene corriente de malla I_1, la malla 2 será la que tiene corriente de malla I_2 y asumimos que hay $m - 2$ mallas más.
- Observemos que salvo las mallas 1 y 2, las demás no tienen fuentes independientes.

Podemos escribir

$$\left\{\begin{array}{ccl} V_1 & = & Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \ldots + Z_{1m}I_m \\ V_2 & = & Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \ldots + Z_{2m}I_m \\ 0 & = & Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + \ldots + Z_{3m}I_m \\ & \vdots & \\ 0 & = & Z_{m1}I_1 + Z_{m2}I_2 + \ldots + Z_{mm}I_m \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = Z(s) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix}$$

$V(s) = Z(s)I(s)$, donde

- Z_{ij}, $i \neq j$ es la suma de las impedancias comunes a las mallas i y j.
- Z_{ii} es la suma de las impedancias de la malla i.
- Decimos que $Z(s)_{m \times m}$ es la matriz de impedancias del circuito.
- También podemos escribir $I = Y(s).V$, siendo $Y(s)$ la matriz de admitancias.
- Esta relación entre el vector de tensiones de malla y el vector de corrientes es general. En nuestro caso, las únicas tensiones no nulas son V_1 y V_2.

$$\left\{\begin{array}{lcl} V_1 & = & Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \ldots + Z_{1m}I_m \\ V_2 & = & Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \ldots + Z_{2m}I_m \\ 0 & = & Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + \ldots + Z_{3m}I_m \\ & \vdots & \\ 0 & = & Z_{m1}I_1 + Z_{m2}I_2 + \ldots + Z_{mm}I_m \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix}$$

Resolvemos el circuito

- Despejamos las corrientes del circuito en función de V_1 y V_2.
- Del álgebra lineal conocemos diversos métodos para hacer esto (escalerización, Cramer, etc.).
- Esto requiere que $|Z(s)| \neq 0$ (ojo, que depende de s!!!).
- En particular, vamos a poder escribir

$$\left\{\begin{array}{lcl} I_1 & = & \frac{\Delta_{11}}{|Z|}V_1 + \frac{\Delta_{12}}{|Z|}V_2 \\ I_2 & = & \frac{\Delta_{21}}{|Z|}V_1 + \frac{\Delta_{22}}{|Z|}V_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Parámetros del cuadripolo

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Juegos de parámetros

- Vimos que pudimos escribir las corrientes que entran al cuadripolo en función de las tensiones de los terminales.
- Con la misma idea, y según qué magnitudes consideremos como independientes, podemos obtener en total seis juegos de parámetros, que estudiaremos a continuación.
- Cada juego tendrá utilidad en distintos contextos.

Parámetros del cuadripolo

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}.V_1 + y_{12}.V_2 \\ y_{21}.V_1 + y_{22}.V_2 \end{bmatrix}$$

Admitancias de cortocircuito

- Son los coeficientes que relacionan las tensiones terminales (consideradas como entradas) con las corrientes que entran al cuadripolo (consideradas como respuestas).
- Su nombre proviene de su dimensión y de cómo pueden obtenerse (analítica o experimentalmente):

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \quad , \quad y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

$$y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} \quad , \quad y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

Parámetros del cuadripolo

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}.I_1 + z_{12}.I_2 \\ z_{21}.I_1 + z_{22}.I_2 \end{bmatrix}$$

Impedancias de vacío

- Son los coeficientes que relacionan las corrientes entrantes del cuadripolo (consideradas como entradas) con las tensiones de los terminales (consideradas como respuestas).
- Su nombre proviene de su dimensión y de cómo pueden obtenerse (analítica o experimentalmente):

$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \quad , \quad z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

$$z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \quad , \quad z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

Parámetros del cuadripolo

Observemos que

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta_Y} \quad , \quad y_{12} = \frac{-z_{12}}{\Delta_Z}$$

$$\Delta_Z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} \quad , \quad \Delta_Y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$$

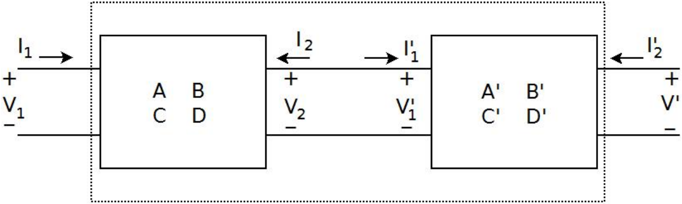
Parámetros del cuadripolo

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A.V_2 - BI_2 \\ C.V_2 - D.I_2 \end{bmatrix}$$

Constantes generales

- Son los coeficientes que relacionan las magnitudes de lado 2 (consideradas como entradas) con las magnitudes del lado 1 (consideradas como respuestas).
- También reciben el nombre de *parámetros de cadena* o de *transmisión*.
- El signo de menos en I_2 está asociado a que importa la corriente que el cuadripolo entrega a una etapa posterior.
- El juego de parámetros inverso, que relaciona la salida con la entrada, no recibe un nombre especial.

Cuadripolos en cascada



Constantes generales

- En el primer cuadripolo,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

- En el segundo cuadripolo,

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ I_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2' \\ -I_2' \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Como $I_2 = -I_1'$ y $V_2 = V_1'$, el cuadripolo cascada puede describirse por el producto de las matrices de constantes generales originales.

Parámetros del cuadripolo

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Parámetros híbridos

- Los parámetros h relacionan tensión del lado 1 y corriente del lado 2, como salidas, con corriente del lado 1 y tensión del lado 2, como entradas.
- Son los más utilizados para modelar el comportamiento de los transistores.

Parámetros del cuadripolo

Relaciones entre parámetros

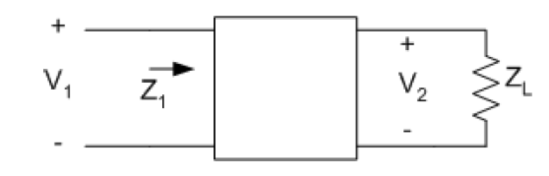
Cada juego de parámetros se puede expresar en función de los demás. A modo de ejemplo, presentamos la relación entre los parámetros generales y los híbridos con las impedancias de vacío.

- $A = \frac{z_{11}}{z_{21}}$
- $B = \frac{\Delta_Z}{z_{21}}$
- $C = \frac{1}{z_{21}}$
- $D = \frac{z_{22}}{z_{21}}$
- $h_{11} = \frac{\Delta_Z}{z_{22}}$
- $h_{12} = \frac{z_{12}}{z_{22}}$
- $h_{21} = -\frac{z_{21}}{z_{22}}$
- $h_{22} = \frac{1}{z_{22}}$

Existen tablas de conversión entre los distintos parámetros.

Ejemplo

¿Cómo pasa una impedancia del carga del lado 2 al lado 1?



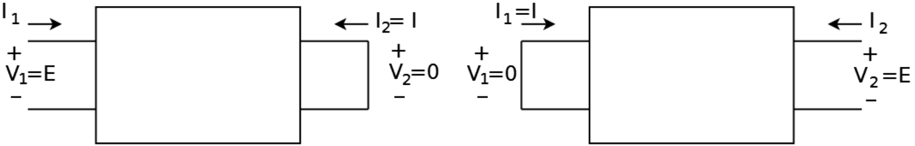
- Queremos hallar $Z_1 = \frac{V_1}{I_1}$.
- Sabemos que $Z_L = \frac{V_2}{-I_2}$
- Usamos las constantes generales $\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases}$.
- Entonces

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 - BI_2}{CV_2 - DI_2} = \frac{-AZ_LI_2 - BI_2}{-CZ_LI_2 - DI_2} \Rightarrow \boxed{Z_1 = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}}$$

Reciprocidad

Definición

Supongamos que excitamos el lado 1 con una fuente de tensión E y medimos la corriente el lado 2 ($I_2 = I$), para $V_2 = 0$. El cuadripolo es recíproco si cuando colocamos la misma fuente de tensión E del lado 2 y medimos la corriente del lado 1, para $V_1 = 0$, obtenemos $I_1 = I$.



Reciprocidad

Condiciones en los parámetros

- Se debe cumplir que $y_{21} = y_{12}$ (lo que implica $z_{21} = z_{12}$).
- En término de las constantes generales:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \frac{z_{12}}{z_{21}} = 1$$

- $h_{12} = -h_{21}$, $g_{12} = -g_{21}$.
- Si un cuadripolo no tiene fuentes dependientes, es recíproco.
- Si tiene fuentes dependientes, puede no ser recíproco.
- Un cuadripolo recíproco se describe por tres parámetros.

Simetría

Definición

- Además de la reciprocidad, se agrega la igualdad de las respuestas de un lado frente a entradas del mismo lado.
- Implica por ejemplo, la igualdad de las impedancias vistas del lado 1 y 2 (impedancia de entrada igual a impedancia de salida).
- Los lados 1 y 2 son indistinguibles.

Simetría

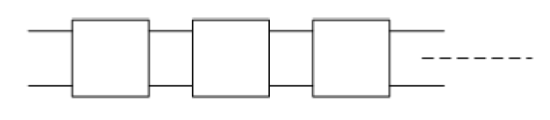
Condiciones en los parámetros

- Se debe cumplir que $y_{11} = y_{22}$ (implica $z_{11} = z_{22}$).
- Se deduce que $A = D$.
- $\Delta_H = \Delta_G = 1$.
- Un cuadripolo simétrico se describe por dos parámetros.

Ejemplo

Impedancia iterativa

- A partir de la identidad anterior podemos preguntarnos si hay una impedancia de carga Z_L del lado 2 que pase *incambiada* al lado 1.
- Equivale a considerar una *cadena infinita* de cuadripolos idénticos!!!



- Esto implica

$$Z_1 = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D} = Z_L \Rightarrow CZ_L^2 + (D - A)Z_L - B = 0$$

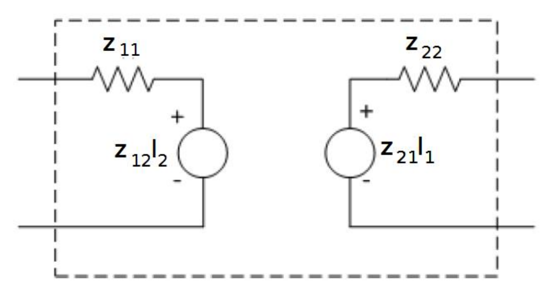
- Hallando las raíces: $Z_L = \frac{A - D \pm \sqrt{A^2 - 2AD + D^2 + 4BC}}{2C}$.
- Si el cuadripolo es simétrico, $A = D$ y $AD - BC = 1$, entonces $Z_L = \pm\sqrt{\frac{B}{C}}$, que si es real se denomina *impedancia característica*.

Equivalencia

- Dos cuadripolos son equivalentes si se describen por los mismos parámetros.
- Esto implica que podemos modelar un circuito complejo por uno mucho más simple.

Equivalencia

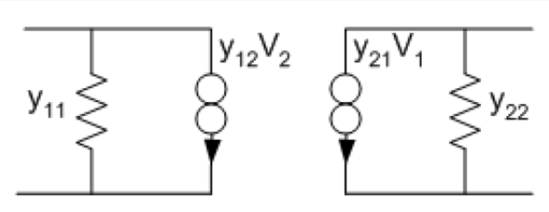
Impedancias de vacío



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Equivalencia

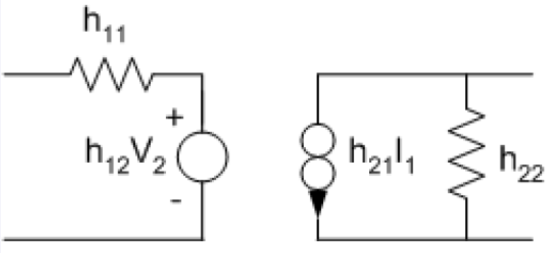
Admitancias de cortocircuito



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Equivalencia

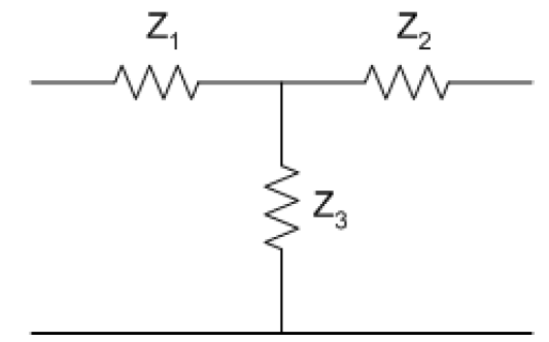
Parámetros híbridos

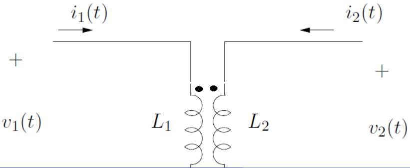


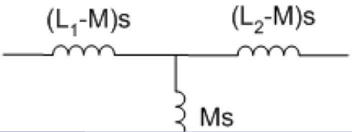
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Equivalencia

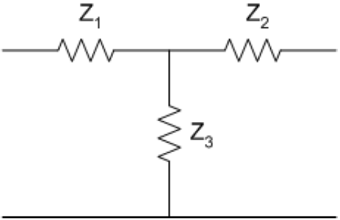
Equivalente T (recíproco)







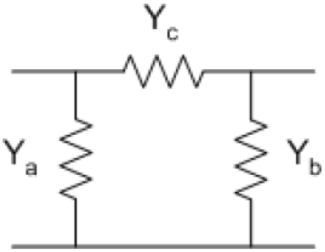
Equivalencia



Cálculo del equivalente T (ejercicio)

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_{11} & = & Z_1 + Z_3 \\ z_{22} & = & Z_2 + Z_3 \\ z_{12} & = & z_{21} = Z_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} Z_1 & = & z_{11} - z_{12} \\ Z_2 & = & z_{22} - z_{12} \\ Z_3 & = & z_{12} \end{array}\right.$$

Equivalencia

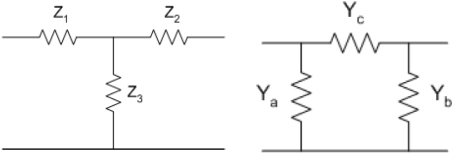


Equivalente Π (recíproco) (ejercicio)

$$\begin{cases} y_{11} & = & Y_a + Y_c \\ y_{22} & = & Y_b + Y_c \\ y_{12} & = & y_{21} = -Y_c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_a & = & y_{11} + y_{12} \\ Y_b & = & y_{22} + y_{12} \\ Y_c & = & -y_{12} = -y_{21} \end{cases}$$

Transfiguración estrella-triángulo

Podemos convertir un equivalente T en un equivalente Π.



- Consideremos tres impedancias Z_1, Z_2, Z_3 en estrella.
- Las impedancias de vacío valen:

$$z_{11} = Z_1 + Z_3 \quad , \quad z_{22} = Z_2 + Z_3 \quad , \quad z_{12} = z_{21} = Z_3$$

- Las admitancias de cortocircuito valen

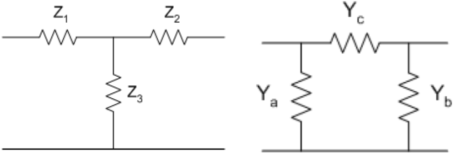
$$y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta_Z} \quad , \quad y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta_Z} \quad , \quad y_{21} = y_{12} = -\frac{z_{12}}{\Delta_Z}$$

- Su equivalente Π viene dado por:

$$Y_a = \frac{z_{22} - z_{12}}{\Delta_Z} \quad , \quad Y_b = \frac{z_{11} - z_{12}}{\Delta_Z} \quad , \quad Y_c = \frac{z_{12}}{\Delta_Z}$$

Transfiguración estrella-triángulo

Caso especial: estrella con tres impedancias iguales $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$.



- Las impedancias de vacío valen:

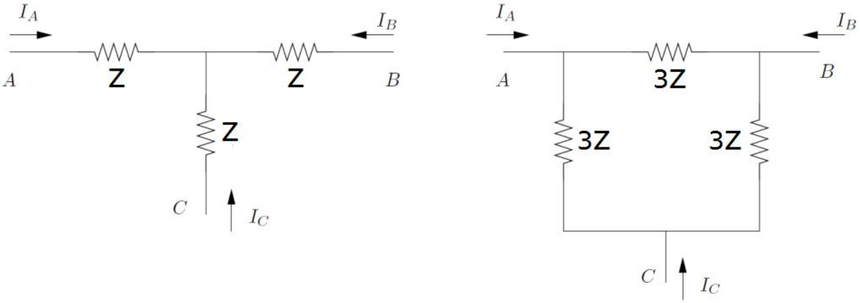
$$z_{11} = Z_1 + Z_3 = 2Z \quad , \quad z_{22} = Z_2 + Z_3 = 2Z \quad , \quad z_{12} = Z_3 = Z$$

- Tenemos que $\Delta_Z = 4Z^2 - Z^2 = 3Z^2$.
- Su equivalente Π viene dado por:

$$Y_a = \frac{2Z - Z}{3Z^2} = \frac{1}{3Z} \quad , \quad Y_b = \frac{2Z - Z}{3Z^2} = \frac{1}{3Z} \quad , \quad Y_c = \frac{Z}{3Z^2} = \frac{1}{3Z}$$

- El triángulo equivalente tiene impedancias idénticas tres veces más grandes!!

Transfiguración estrella-triángulo

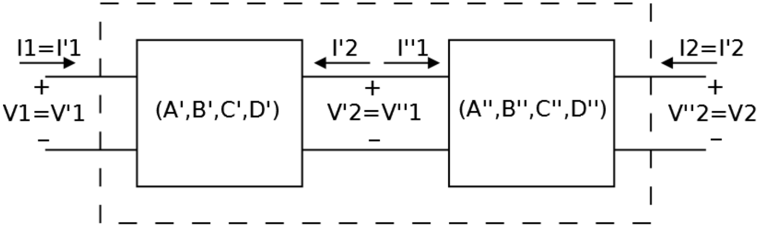


- Se aplica en diversos contextos del análisis de circuitos.
- Herramienta fundamental en el análisis de circuitos trifásicos!!

Interconexión de cuadripolos

- La interconexión de cuadripolos puede describirse de manera sencilla en función de los distintos juegos de parámetros.
- Cada esquema de conexión se entiende mejor con un determinado juego de parámetros.
- Es importante tener presente que el cuadripolo resultante de la interconexión debe verificar las hipótesis que permitan la descripción mediante un juego de parámetros.

Interconexión de cuadripolos

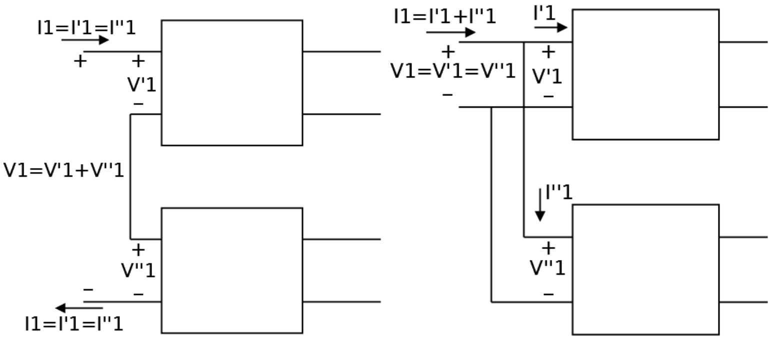


Conexión en cascada

- Como ya vimos, la salida de un cuadripolo se conecta a la entrada del siguiente.
- La descripción más adecuada es la de las constantes generales.
- La matriz de constantes generales del cuadripolo resultante es el producto de las matrices de constantes generales de cada cuadripolo.

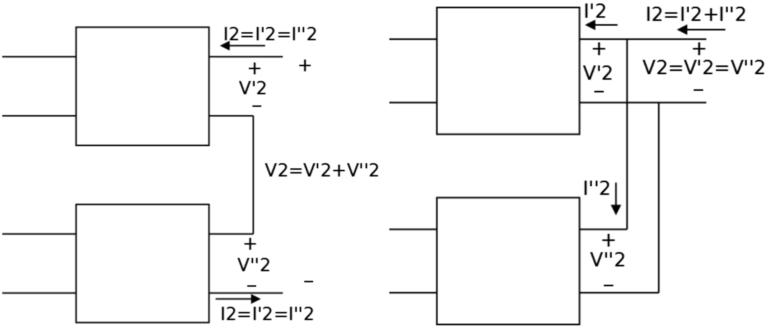
Interconexión de cuadripolos

Serie ó paralelo del lado 1

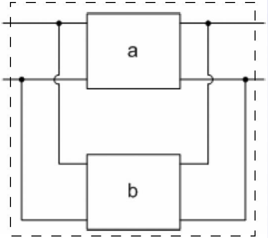


Interconexión de cuadripolos

Serie ó paralelo del lado 2



Interconexión de cuadripolos



Conexión en paralelo

- Los cuadripolos comparten las tensiones de entrada y salida.
- Podemos plantear las ecuaciones de nudo para las respectivas corrientes de entrada y salida.
- Conviene usar las admitancias de cortocircuito.

$$\begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = Y' \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix} = Y'' \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Entonces $Y' + Y''$ describe al cuadripolo resultante!!!
Queda como ejercicio ver las demás conexiones.

Ejemplo