Circuitos en Laplace

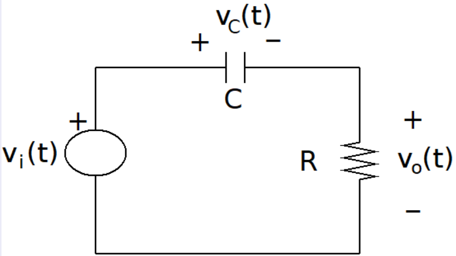
Pablo Monzón

IIE-Fing-UDELAR

Segundo semestre, 2020

Resolución de circuitos mediante Laplace

Ejemplo



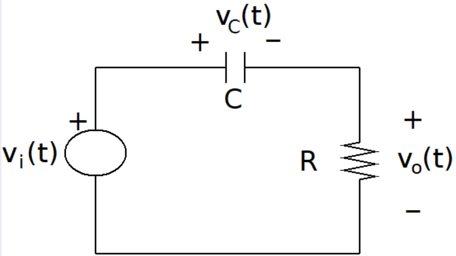
- Consideremos el circuito de la figura, con el condensador inicialmente descargado y la siguiente fuente de tensión:

$$v_i(t) = E.Y(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ E & , \quad t > 0 \end{cases}$$

- El objetivo es hallar la tensión en bornes de R para tiempos positivos.

Resolución de circuitos mediante Laplace

Ejemplo

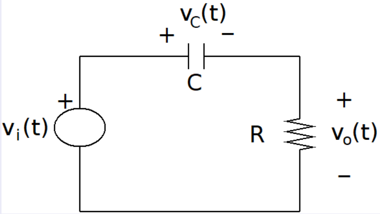


- Observando que $v_C = v_i - v_o$, la ecuación diferencial del circuito es

$$C\frac{d}{dt}(v_i - v_o) = \frac{v_o}{R} \Rightarrow C\frac{d}{dt}v_i = C\frac{d}{dt}v_o + \frac{v_o}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}v_o(t) + \frac{1}{RC}v_o(t) = \frac{d}{dt}v_i}$$

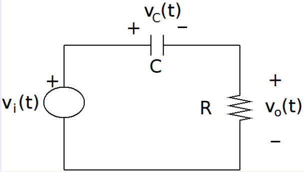
Ejemplo



- Veamos la condición inicial de $v_o(0) = v_i(0) - v_C(0)$.
- Tenemos que distinguir entre el 0^- y el 0^+.
- Sabemos que $v_i(0^-) = 0$.
- Para el condensador, sabemos que $v_C(0^-) = 0$.
- Entonces $v_o(0^-) = 0$.

Resolución de circuitos mediante Laplace

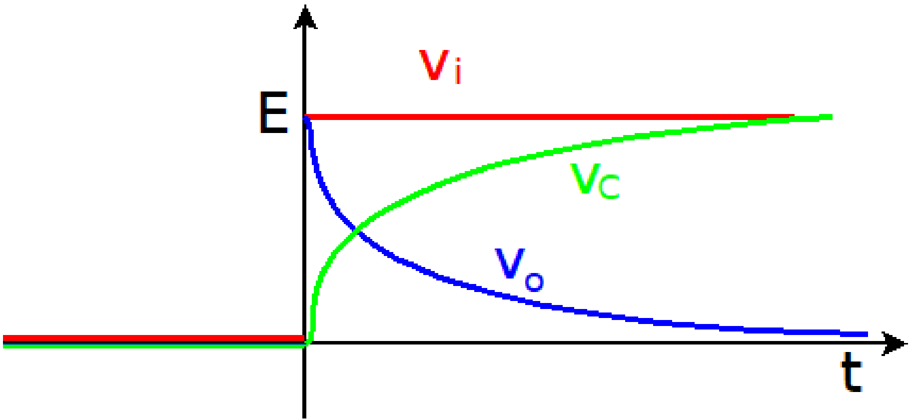
Ejemplo



- Miremos $v_o(0^+) = v_i(0^+) - v_C(0^+)$.
- Como sabemos que la tensión en el condensador es continua, $v_C(0^-) = 0 = v_C(0^+)$.
- Entonces: $v_o(0^+) = E \neq v_o(0^-)$!!
- Sin la hipótesis de continuidad, no sabríamos qué condición inicial ponerle a la ecuación diferencial!!
- Queremos distinguir la *condición inicial* clásica de lo que llamaremos el dato previo, es decir, lo que conocemos antes de que comience el intervalo temporal de interés

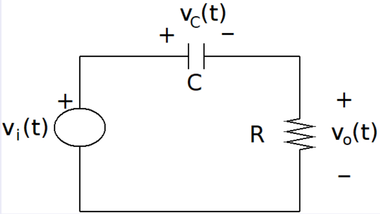
Resolución de circuitos mediante Laplace

Ejemplo



Resolución de circuitos mediante Laplace

Ejemplo - resumen



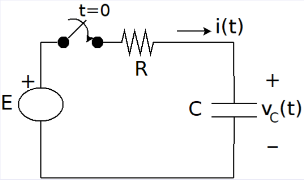
- $\frac{d}{dt}v_o(t) + \frac{1}{RC}v_o(t) = \frac{d}{dt}v_i$
- $v_o(0^-) = 0.$
- $v_o(0^+) = E.$
- La solución de la ecuación diferencial no es continua en 0!!!

Resolución de circuitos mediante Laplace

- Los datos previos son lo que usualmente conocemos cuando vamos a analizar un circuito.
- Son, básicamente, tensiones en los condensadores y corrientes en las inductancias, previas al instante en que algo cambia en el circuito, que denotamos por $t = 0$.
- Esta idea difiere del concepto tradicional de *condición inicial* en ecuaciones diferenciales, donde se asume que la trayectoria solución es continua, por lo que 0^- no se distingue de 0^+.
- La teoría de ecuaciones diferenciales puede extenderse al caso de excitaciones seccionalmente derivables, es decir, **con saltos**, lo que conlleva soluciones seccionalmente derivables, que también presentan saltos o discontinuidades.
- Tenemos que ver cómo manejamos esas discontinuidades, sobre todo al derivarlas, y cuando pasamos a Laplace.
- Vamos a modificar la definición de la TdL, para incluir los datos previos.

Ejemplo motivador

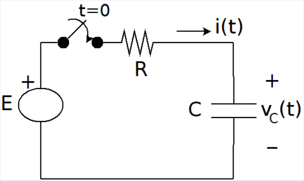
Ejemplo



- Veamos este ejemplo sencillo, donde el condensador está inicialmente descargado.
- Ya sabemos que al cerrar la llave el condensador se cargará exponencialmente hasta igualar la tensión de la fuente.
- La corriente también será exponencial, tendiendo a 0 en la medida que se igualan las tensiones a ambos lados de R.

Ejemplo motivador

Ejemplo



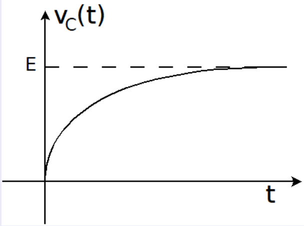
- Las expresiones respectivas para t positivo son:

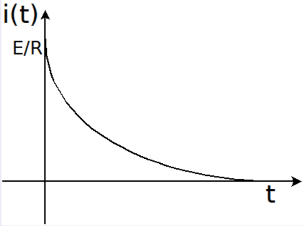
$$v_C(t) = Y(t)E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad , \quad \tau = RC$$

$$i(t) = C\frac{d}{dt}v_C(t) = Y(t)\frac{CE}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = Y(t)\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Ejemplo motivador

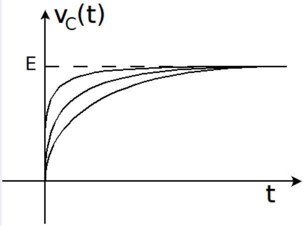
Gráficas de tensión y corriente en el condensador

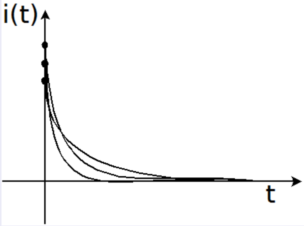




Ejemplo motivador

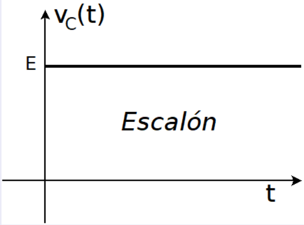
Gráficas de tensión y corriente en el condensador, al hacer $R \to 0$

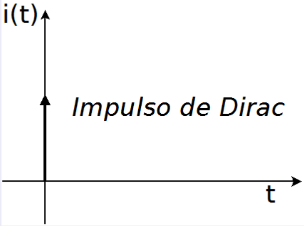




Ejemplo motivador

Gráficas de tensión y corriente en el condensador, para $R = 0$





Comentarios

- Vamos a introducir el impulso o δ de Dirac, que formaliza esta idea de cómo derivar el escalón.
- Definiremos las *funciones generalizadas*, y extenderemos a ellas las operaciones usuales de funciones y la transformada de Laplace.
- La teoría matematica formal fue desarrollada por Laurent Schwartz en la primera mitad del siglo XX y se denomina *Teoría de Distribuciones*.
- Rescataremos sólo algunas ideas de esa teoría, que nos alcanzarán para manejar los datos previos y las señales con saltos.

Funciones generalizadas

Definiciones

- Decimos que un conjunto $\mathcal{S}$ de puntos de la recta real es *ralo* si cada intervalo finito sólo contiene un número finito de elementos de $\mathcal{S}$.
- Una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ es *seccionalmente continua* si existe un conjunto ralo $\mathcal{S}$ tal que f es continua en todos los puntos que no pertenecen a $\mathcal{S}$ y si $a \in \mathcal{S}$, existen los límites laterales

$$\lim_{t \to a^-} = f(a^-) \quad , \quad \lim_{t \to a^+} = f(a^+)$$

- Llamamos función generalizada a $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ *seccionalmente suave* (existe un conjunto ralo $\mathcal{S}$ tal que f tiene derivadas de todos los órdenes en todo punto de $(0, +\infty)$ que no esté en $\mathcal{S}$ y los límites laterales de las derivadas existen en los puntos de $\mathcal{S}$), que tiene definido un conjunto de datos previos: $\left\{f^{(n)}(0^-)\right\}$ para f y todas sus derivadas.

Funciones generalizadas

Comentarios

- Los valores en 0^- no dependen de lo que pase en $t > 0$.
- Estos valores serán la historia previa del circuito.
- El escalón, por ejemplo, lo tomamos como una función generalizada con valores nulos en 0^-.
- El valor concreto que la función tenga en el conjunto $\mathcal{S}$ no importa, por lo que en general no lo definimos.
- En ese sentido, dos funciones idénticas salvo un conjunto ralo de puntos, definen la misma función generalizada.

Funciones generalizadas

Funciones de singularidad

- Introduzcamos el símbolo $\delta(t)$ para representar esa intuición que vimos en el circuito RC de una corriente que es infinitamente grande en el origen y se extingue muy rápido: el *impulso de Dirac*.
- Si ese fenómeno se da en otro instante que no sea el origen, por ejemplo en t_0, usaremos la notación $\delta_{t_0}(t)$ ó $\delta(t - t_0)$ (un impulso corrido a t_0).
- Una *función de singularidad* es una suma de impulsos

$$f_s(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \delta_{t_k}$$

  siendo t_k una sucesión de instantes de tiempo que si es infinita, debe diverger (no acumulan).
- Los números c_k se denominan *amplitudes* de los impulsos y pueden ser complejos.

Funciones generalizadas

Ejemplos de funciones de singularidad

- La δ de Dirac (en el origen).
- El impulso con asiento en T: $\delta_T(t)$ ó $\delta(t-T)$.
- El Peine de Dirac, de periodo T:

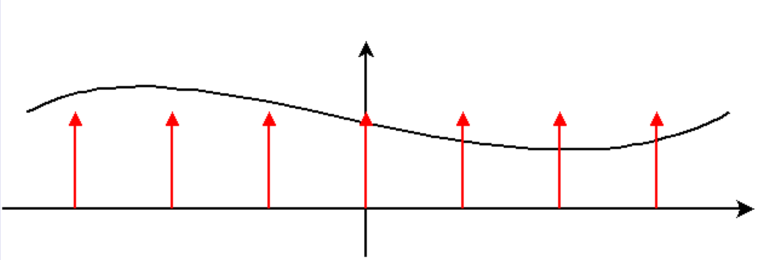
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$

  que consiste en un impulso en cada múltiplo entero de T.
- Estos objetos se caracterizan por cómo actúan con funciones.
- Podemos definir el producto de un impulso por una función suave $\alpha(t)$ así:
  - $\alpha(t).\delta(t) = \alpha(0).\delta(t)$;
  - $\alpha(t).\delta(t-T) = \alpha(T).\delta(t-T)$;
  - $\alpha(t).\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha(nT).\delta(t-nT)$;

  Propiedad de muestreo!!!

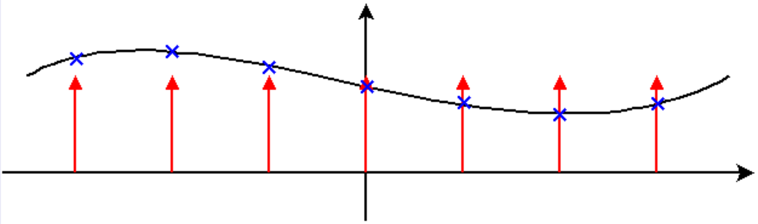
Funciones generalizadas

Modelo matemático del muestreo



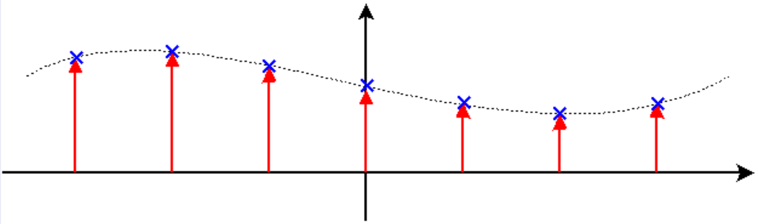
Funciones generalizadas

Modelo matemático del muestreo



Funciones generalizadas

Modelo matemático del muestreo



Funciones generalizadas

Funciones generalizadas

- Extendemos la idea de función generalizada. Ahora será la suma de dos partes:
  - una función seccionalmente suave, $f_r(t)$, con información en 0^-, que llamaremos parte *regular*.
  - una función de singularidad, $f_s(t)$, que llamaremos parte *singular*.
- Enfatizamos que la parte regular es la que tiene la información en 0^-.
- Veremos cómo operar con las funciones generalizadas.

Funciones generalizadas

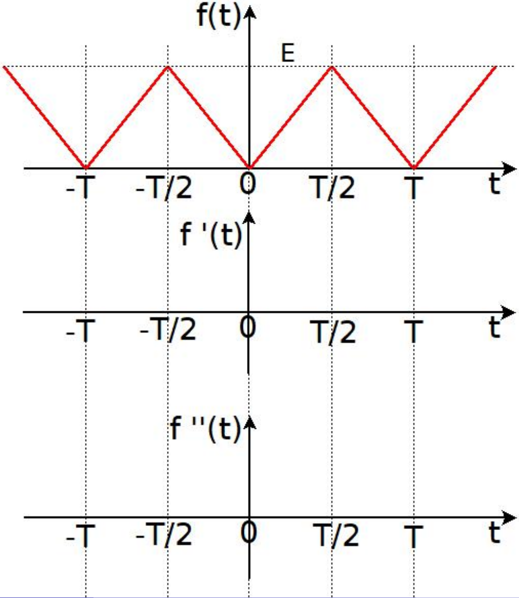
Derivada de una función generalizada

- Dadas $f(t) = f_r(t) + f_s(t)$, definimos su derivada $f'(t) = (f')_r(t) + (f')_s(t)$ como sigue:
  - La parte regular $(f')_r(t)$ es la derivada de $f_r(t)$ en todos los puntos donde es derivable, y con datos previos nulos.
  - La parte singular $(f')_s$ consiste de dos partes:
    - la derivada de $f_s(t)$ (aparece la derivada de δ, algo sobre lo que no profundizaremos).
    - nuevos impulsos en los puntos de discontinuidad de $f_r(t)$, con la amplitud del salto respectivo.
  - Es decir que si $f_r(t)$ no es derivable en t_0, entonces al derivarla aparecerá un impulso en t_0 de la forma:

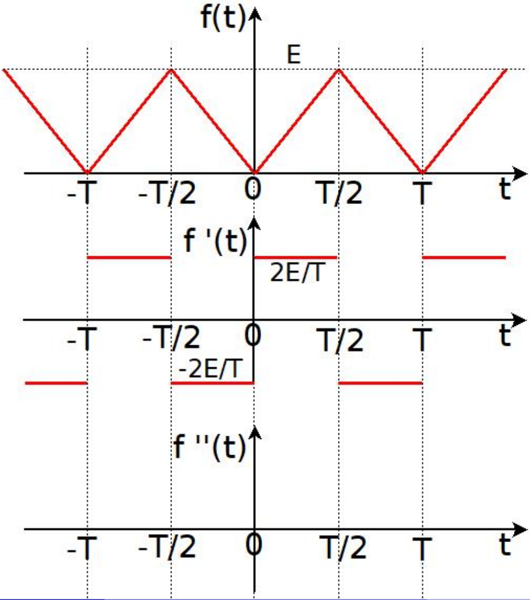
$$\left[f(t_0^+) - f(t_0^-)\right].\delta(t - t_0)$$

    Notar que si f_r es continua en t_0, pero no derivable, entonces no aparece un impulso!!

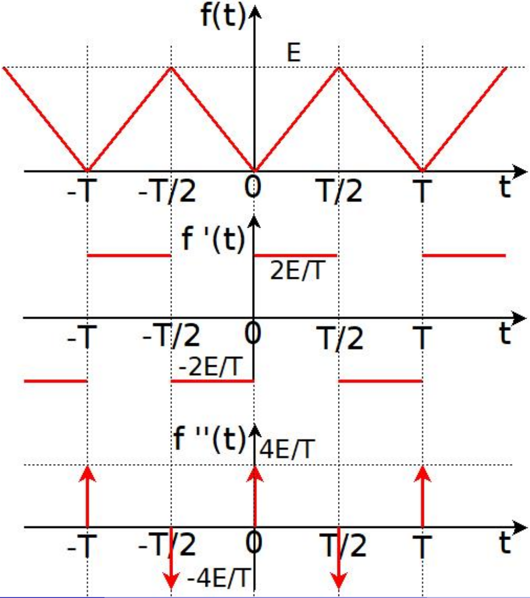
Ejemplo: derivar dos veces una onda triangular



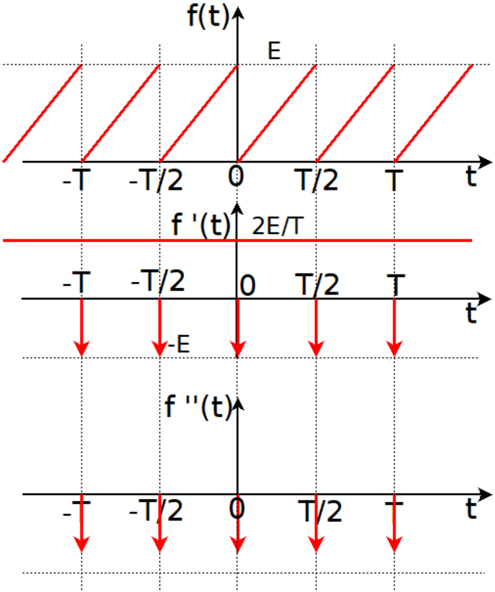
Ejemplo: derivar dos veces una onda triangular



Ejemplo: derivar dos veces una onda triangular



Ejemplo: derivar dos veces un diente de sierra



$$f(t) = \frac{2E}{T}t, \quad t \in \left(n\frac{T}{2}, n\frac{T}{2} + \frac{T}{2}\right)$$

$$f'(t) = \frac{2E}{T} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} E.\delta\left(t - n\frac{T}{2}\right)$$

$$f''(t) = -\sum_{n \in \mathbb{Z}} E.\delta'\left(t - n\frac{T}{2}\right)$$

Funciones generalizadas

Producto por funciones suaves

- No tiene sentido multiplicar funciones generalizadas entre sí, dado que una definición natural implicaría definir el producto entre impulsos.
- Definiremos el producto entre una función generalizada $f(t) = f_r(t) + f_s(t)$ y una función suave $\alpha(t)$:

$$\alpha(t).f(t) = \underbrace{\alpha(t).f_r(t)}_{parte\ regular} + \underbrace{\alpha(t).f_s(t)}_{parte\ singular}$$

- La parte regular se obtiene usando el producto habitual de funciones (conservando los valores en 0^-).
- Para obtener la parte singular, aplicamos la propiedad de muestreo.

Funciones generalizadas

Regla de derivación

Dadas $f(t) = f_r(t) + f_s(t)$ y $\alpha(t)$, vale la siguiente propiedad:

$$[\alpha(t).f(t)]' = \alpha'(t).f(t) + \alpha(t).f'(t)$$

Idea de la prueba

- Definamos

$$g = \alpha.f = \underbrace{\alpha.f_r}_{g_r} + \underbrace{\alpha.f_s}_{g_s} \Rightarrow g' = g_r' + g_s'$$

- Sea $\mathcal{S}$ el conjunto ralo de puntos de discontinuidad de f_r.
- Denotemos por $\{f_r\}'$ a la derivada de f_r en los puntos donde es derivable
- Entonces $f_r'(t) = \{f_r\}' + \sum_{a\in\mathcal{S}}[f_r(a^+) - f_r(a^-)]\delta(t-a)$.

Funciones generalizadas

Idea de la prueba

- Entonces g_r' es la derivada de $\alpha.f_r$ donde es derivable (fuera de $\mathcal{S}$) y suma impulsos en los puntos de $\mathcal{S}$, con amplitudes escaladas por el valor de α:

$$g_r' = \alpha'.f_r + \alpha.\{f_r\}' + \sum_{a \in \mathcal{S}} \alpha(a)[f_r(a^+) - f_r(a^-)].\delta(t-a)$$

$$= \alpha'(t).f_r(t) + \alpha(t).f_r'(t)$$

(hemos usado que $\alpha(a).\delta(t-a) = \alpha(t).\delta(t-a)$).

- Por otra parte, $g_s' = [\alpha.f_s]'$ satisface la regla de derivación porque con ese objetivo se definen las derivadas sucesivas de δ:

$$g_s' = [\alpha.f_s]' = \alpha'.f_s + \alpha.f_s'$$

Funciones generalizadas

Integración de $\alpha.f'$

- De la regla de derivación, sabemos que

$$\alpha(t).f'(t) = [\alpha(t).f(t)]' - \alpha'(t).f(t)$$

  Por lo que se cumple la integración por partes en cualquier intervalo.

- Eligiendo el intervalo $[a^-, b^+]$, obtenemos

$$\int_{a^-}^{b^+} \alpha(t).f'(t)dt = [\alpha(t).f(t)]\Big|_{a^-}^{b^+} - \int_{a^-}^{b^+} \alpha'(t).f(t)dt$$

- En particular, con $a = 0$, integramos desde 0^-:

$$\int_{0^-}^{b^+} \alpha(t).f'(t)dt = [\alpha(t).f(t)]\Big|_{0^-}^{b^+} - \int_{0^-}^{b^+} \alpha'(t).f(t)dt$$

Funciones generalizadas

Transformada de Laplace de funciones generalizadas

- Como ya sabemos transformar funciones, sabemos transformar la parte regular de una función generalizada.
- Para incluir los datos previos, integramos desde 0^-:

$$\mathcal{L}_- \left[f_r(t) \right](s) := \int_{0^-}^{+\infty} f_r(t) e^{-st} dt$$

con las mismas hipótesis que antes para la convergencia.

- Tenemos que definir la transformada de Laplace de la delta de Dirac:

$$\mathcal{L}_- \left[\delta(t) \right](s) := 1 \quad \left(\mathcal{L}_- \left[\delta^{(n)}(t - t_0) \right](s) := s^n . e^{-st_0} \right)$$

- Esto permite calcular $\mathcal{L}_- \left[f_s(t) \right](s)$.

Funciones generalizadas

Ejemplos

- $\mathcal{L}_-\left[\delta(t)\right](s) = 1.$
- $\mathcal{L}_-\left[\delta^{(p)}(t)\right](s) = s^p.$
- $\mathcal{L}_-\left[\delta(t-t_0)\right](s) = e^{-st_0}.$
- $\mathcal{L}_-\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\delta(t-nT)\right](s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}$ (periódica!!!!)
- $\mathcal{L}_-\left[\delta(t)+Y(t).e^{-2t}\right](s) = 1+\frac{1}{s+2} = \frac{s+3}{s+2}$ (propia no estricta!!!)

Funciones generalizadas

Teorema de derivación

Dada una función generalizada f, se cumple que

$$\mathcal{L}_-\left[f'(t)\right](s) = s\mathcal{L}_-\left[f(t)\right](s) - f(0^-)$$

Demostración

La prueba se basa en la integral por partes, como la vista antes, cuando no distinguíamos el 0^-, salvo que hay que aplicar las definiciones para funciones generalizadas.

La derivada hay que hacerla considerando f como una función generalizada!!

Funciones generalizadas

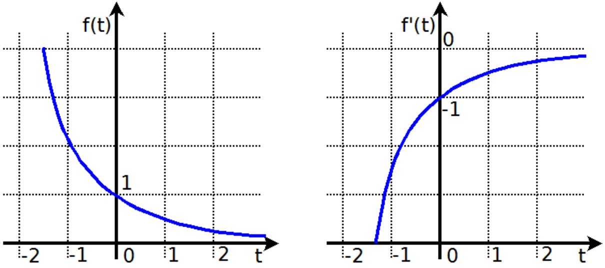
Ejemplo

- Consideremos las siguiente funciones

$$f(t) = e^{-t} \quad , \quad g(t) = Y(t)e^{-t} \quad , \quad h(t) = Y(t)e^{-t} - Y(-t)$$

- Las tres coinciden en la semirrecta positiva, por lo que tienen la misma transformada de Laplace y el mismo valor en 0^+.
- En tanto $f(t)$ es continua, $g(t)$ y $h(t)$ presentan un salto en el origen, y difieren en los datos previos.
- Las transformadas de Laplace de sus derivadas marcarán estas diferencias.

Funciones generalizadas

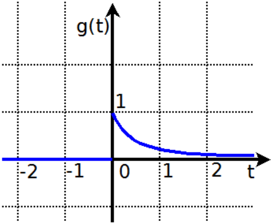


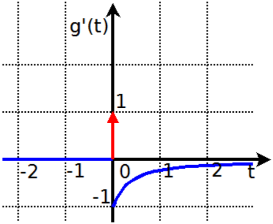
- $f(t) = e^{-t} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s+1}$.
- Como $f'(t) = -e^{-t}$, tenemos que $\mathcal{L}_{-}\left[f'(t)\right](s) = -\frac{1}{s+1}$.
- Observando que $f(0^{-}) = 1$, vemos que

$$\mathcal{L}_{-}\left[f'(t)\right](s) = sF(s) - f(0^{-}) = \frac{s}{s+1} - 1 = \frac{-1}{s+1}$$

- El teorema del valor inicial nos da: $\lim_{s\to\infty} sF(s) = 1 = f(0^{+})$.

Funciones generalizadas



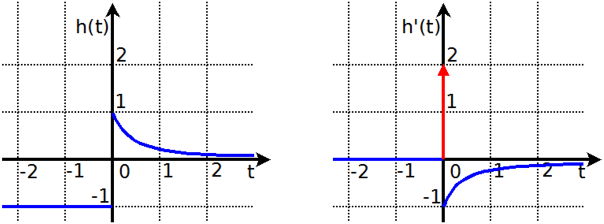


- $g(t) = Y(t)e^{-t} \Rightarrow G(s) = F(s) = \frac{1}{s+1}$.
- Como $g'(t) = \delta(t) - Y(t)e^{-t} \Rightarrow \mathcal{L}_{-}\left[g'(t)\right](s) = 1 - \frac{1}{s+1} = \frac{s}{s+1}$.
- Observando que $g(0^{-}) = 0$, vemos que

$$\mathcal{L}_{-}\left[g'(t)\right](s) = sG(s) - g(0^{-}) = \frac{s}{s+1} - 0 = \frac{s}{s+1}$$

- El teorema del valor inicial nos da: $\lim_{s\to\infty} sG(s) = 1 = g(0^{+})$.

Funciones generalizadas



- $h(t) = Y(t)e^{-t} - Y(-t) \Rightarrow H(s) = G(s) = F(s) = \frac{1}{s+1}$.
- Como $h'(t) = 2\delta(t) - Y(t)e^{-t} \Rightarrow \mathcal{L}_-\left[h'(t)\right](s) = 2 - \frac{1}{s+1} = \frac{2s+1}{s+1}$.
- Observando que $h(0^-) = -1$, vemos que

$$\mathcal{L}_-\left[h'(t)\right](s) = sH(s) - h(0^-) = \frac{s}{s+1} + 1 = \frac{2s+1}{s+1}$$

- El teorema del valor inicial nos da: $\lim_{s\to\infty} sH(s) = 1 = h(0^+)$.

Funciones generalizadas

Producto convolución

- La convolución vista para funciones puede extenderse a funciones generalizadas.
- Dadas dos funciones generalizadas, sus partes regulares se pueden convolucionar como ya sabemos.
- Vamos a tener que tener cuidado con los datos previos.
- Tenemos que definir cómo participan la δ de Dirac y sus derivadas del producto convolución.
- La definición axiomática que veremos puede tomarse también como definición de la δ de Dirac.

Funciones generalizadas

Definiciones

- Dada una función generalizada $f(t)$, se cumple que

$$f(t) * \delta(t) = f(t) \qquad \text{(neutro!!!)}$$

$$f(t) * \delta(t-T) = f(t-T) \qquad \text{(traslación)}$$

$$f(t) * \delta^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) \qquad \text{(derivación)}$$

- La *traslación temporal* pierde los datos previos, por lo que **sólo la haremos con señales con datos previos nulos**.

Modelado de sistemas

Respuesta al impulso

- La relación entrada/salida de un sistemas lineal puede representarse por

$$r(t) = h(t) * e(t)$$

  siendo $e(t)$ la señal de entrada del sistema, $r(t)$ la respuesta y $h(t)$ la respuesta al impulso.
- En Laplace, $R(s) = H(s).E(s)$.
- La transformada de Laplace de la respuesta al impulso, que llamaremos función de transferencia del sistema, puede obtenerse así:

$$\boxed{H(s) = \frac{R(s)}{E(s)}} \Rightarrow h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right](t)$$

Modelado de sistemas

Ejemplo: amplificador de ganancia K

- Consideremos un amplificador de ganancia K, con entrada $v_i(t)$ y salida $v_o(t) = K.v_i(t)$.
- En Laplace: $V_o(s) = K.V_i(s)$, entonces $H(s) = K$.
- En el tiempo tendríamos: $v_o(t) = v_i(t) * \mathcal{L}^{-1}[K](t) = K.v_i(t)$.
- Con lo que acabamos de ver, sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}[K](t) = K.\delta(t)$$

$$v_o(t) = v_i(t) * K.\delta(t) = K.v_i(t)$$

Modelado de sistemas

Respuesta al impulso

- Lo anterior lo aplicamos al caso de circuitos con datos previos nulos.
- En esas condiciones, toda la respuesta queda definida exclusivamente por la entrada.
- Notar la similitud entre $H(s)$ y la transferencia en régimen que definimos mediante fasores (ver video *Relación Laplace-fasores*).
- Conociendo la transferencia, podemos conocer las respuestas a distintas entradas.
- Además, con la relación entre el dominio del tiempo y el dominio de Laplace, se pueden establecer condiciones en $H(s)$ para asegurar propiedades deseadas de $h(t)$.

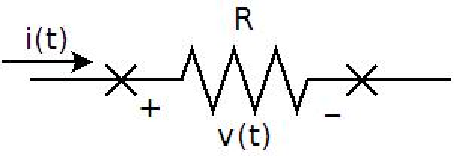
Componentes en Laplace

Idea general

- Tal cual hicimos con los fasores, veremos que a un circuito lineal se le puede asociar un circuito equivalente en Laplace.
- También veremos que recuperamos la idea de impedancia (relación proporcional entre tensión y corriente), ahora en Laplace.
- A diferencia del caso de régimen sinusoidal, tenemos que contemplar los datos previos.

Componentes en Laplace

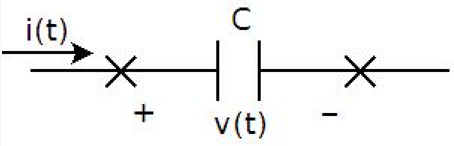
Resistencia



- La relación tensión-corriente en el tiempo es $v(t) = R.i(t)$.
- Aplicando la transformada de Laplace, obtenemos $V(s) = R.I(s)$.
- En Laplace, se mantiene la Ley de Ohm!!

Componentes en Laplace

Condensador

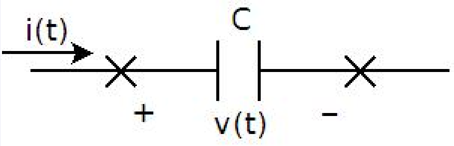


- La relación tensión-corriente en el tiempo es $i(t) = C\frac{d}{dt}v(t)$, $v(0^-) = v_{C0}$.
- Aplicando la transformada de Laplace, obtenemos $I(s) = C\left[sV(s) - v_{C0}\right]$ ó

$$V(s) = \frac{v_{c0}}{s} + \frac{1}{Cs}I(s)$$

Componentes en Laplace

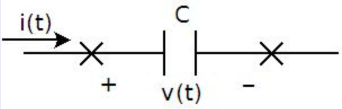
Condensador $V(s) = \frac{v_{c0}}{s} + \frac{1}{Cs}.I(s)$



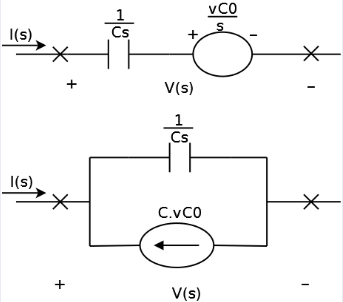
- Observemos que en Laplace la caída de tensión en bornes del condensador tiene dos componentes:
  - una proporcional a la corriente que lo atraviesa, con factor de proporcionalidad $\frac{1}{Cs}$, tipo *Ley de Ohm*.
  - otra independiente de la corriente, definida por el dato previo, que podemos representar como una fuente independiente.
- Podemos deducir dos circuitos equivalentes en Laplace (uno *Thevenin* y uno *Norton*).

Componentes en Laplace

Condensador

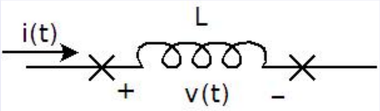


Arriba: circuito en el tiempo. Abajo: circuito en Laplace (dos posibilidades)



Componentes en Laplace

Inductancia

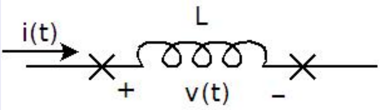


- La relación tensión-corriente en el tiempo es $v(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$, $i(0^-) = i_{L0}$.
- Aplicando la transformada de Laplace, obtenemos $V(s) = L\left[sI(s) - i_{L0}\right]$ ó

$$V(s) = Ls.I(s) - L.i_{L0}$$

Componentes en Laplace

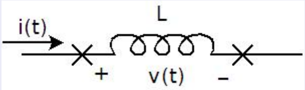
Inductancia $V(s) = Ls.I(s) - L.i_{L0}$



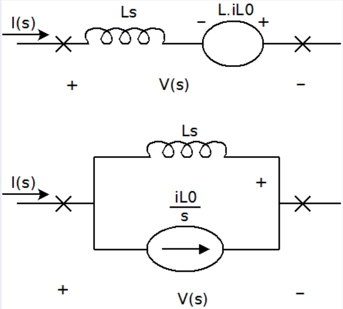
- Observemos que en Laplace la caída de tensión en bornes de la inductancia tiene dos componentes:
  - una proporcional a la corriente que lo atraviesa, con factor de proporcionalidad Ls, tipo *Ley de Ohm*.
  - otra independiente de la corriente, definida por el dato previo, que podemos representar como una fuente independiente.
- Podemos deducir dos circuitos equivalentes en Laplace (uno *Thevenin* y uno *Norton*).

Componentes en Laplace

Inductancia $V(s) = Ls.I(s) - L.i_{L0}$, $I(s) = \frac{V(s)}{Ls} + \frac{i_{L0}}{s}$



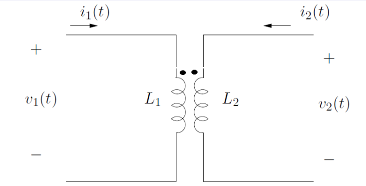
Arriba: circuito en el tiempo. Abajo: circuito en Laplace (dos posibilidades)

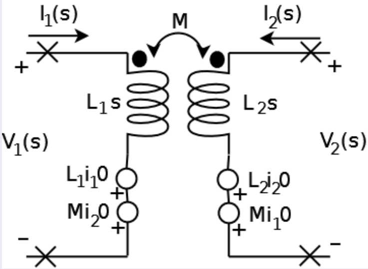


Transformador

- Al pasar las ecuaciones del transformador a Laplace, aparecen dos datos previos: uno propio y otro por la mutua.

$$\begin{cases} v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_1 = L_1 s I_1 - L_1 i_{10} + M s I_2 - M i_{20} \\ V_2 = L_2 s I_2 - L_2 i_{20} + M s I_1 - M i_{10} \end{cases}$$





Componentes en Laplace

Kirchhoff en Laplace

- Al igual que en fasores, se puede ver que gracias a la linealidad de la transformada de Laplace, las leyes de Kirchhoff de mallas y nodos valen también para las transformadas.
- Ejemplo, si $\sum_{k=1}^{n} i_k(t) = 0$, entonces $\sum_{k=1}^{n} I_k(s) = 0$.
- Por lo tanto, todo lo visto para impedancias en régimen sinusoidal, que extendía lo sabido para circuitos resistivos, sigue valiendo en Laplace (seguimos hablando de *impedancias*):
  - impedancia vista, serie, paralelo, de carga, etc.
  - equivalente Thévenin y Norton (con la restricción vista para la existencia de mutua).
  - superposición, método de mallas y método de nudos.

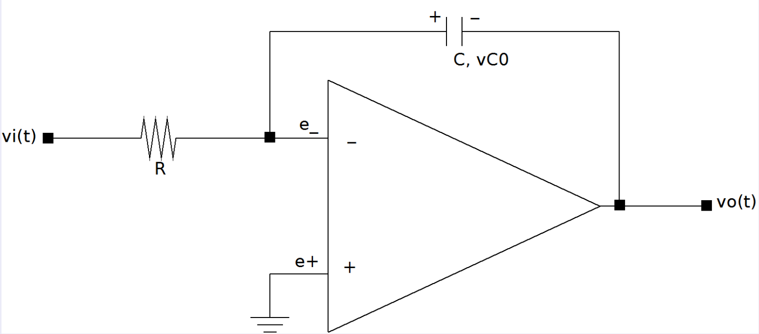
Componentes en Laplace

Circuito equivalente en Laplace

- Podemos aplicar la transformada de Laplace a un circuito y obtener un circuito equivalente en Laplace.
- La entrada es la transformada de Laplace de la entrada, y sucede lo mismo para cada tensión o corriente del circuito.
- Aparecen nuevas fuentes independientes, asociadas a los datos previos.
- Podemos aplicar superposición:
  - la respuesta debida a los datos previos, será la respuesta propia.
  - la respuesta debida a la entrada, será la respuesta forzada.
- Como ya vimos, llamaremos transferencia al cociente entre las transformadas de Laplace de la respuesta forzada y la entrada (es decir, que consideramos datos previos nulos!!!)

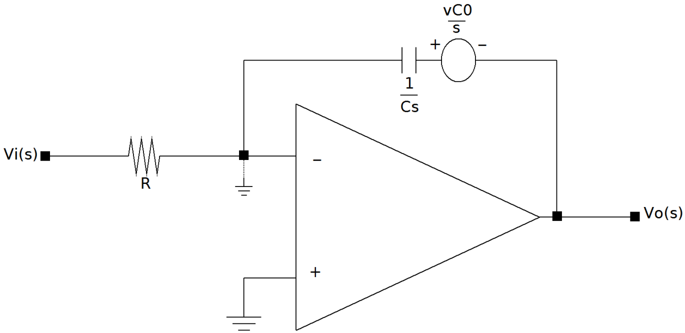
Ejemplo

Ejemplo: integrador con dato previo



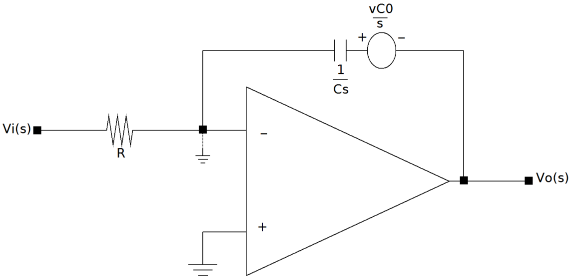
- Consideremos el circuito de la figura, con el operacional ideal.
- Hallar la respuesta a un escalón de amplitud E, sabiendo que el condensador arranca cargado con una tensión v_{C0}.

Ejemplo: integrador con dato previo



- Viendo el circuito equivalente en Laplace, observamos que hay dos entradas: el escalón y el dato previo.
- Podemos aplicar superposición o resolver todo junto.
- Al ser el operacional ideal, tenemos tierra virtual en la pata $-$.
- Por la resistencia y el condensador circula la misma corriente, pues no entra nada al operacional.

Ejemplo: integrador con dato previo

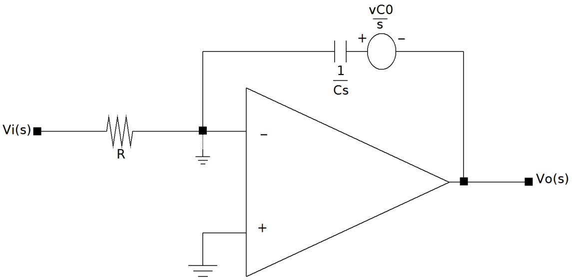


$$\frac{V_i(s)}{R} = -\frac{\frac{v_{C0}}{s} + V_o(s)}{\frac{1}{Cs}} = -Cs.\left[\frac{v_{C0}}{s} + V_o(s)\right]$$

$$\Rightarrow V_o(s) = \underbrace{-\frac{V_i(s)}{RCs}}_{\text{respuesta forzada}} + \underbrace{-\frac{v_{C0}}{s}}_{\text{respuesta propia}} = -\frac{E}{RCs^2} - \frac{v_{C0}}{s}$$

$$\Rightarrow v_o(t) = -Y(t).\frac{E}{RC}.t - Y(t).v_{C0}$$

Ejemplo: integrador con dato previo



$$\Rightarrow v_o(t) = -Y(t).\frac{E}{RC}.t - Y(t).v_{C0}$$

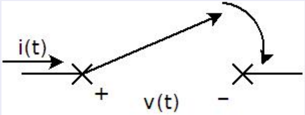
- La respuesta forzada integra la entrada constante y eventualmente saturará al operacional.
- La respuesta propia conserva el valor del dato previo, ya que al anular la entrada, el condensador no tiene un camino para descargarse!!

Elementos lineales a tramos

Elementos no lineales, lineales a tramos

- Las teoría de circuitos que hemos visto hasta ahora se aplica a sistemas lineales.
- Es posible extenderla al caso de circuitos con elementos no lineales, pero *lineales a tramos*.
- Estos circuitos presentarán distintos modos de funcionamiento, y en cada uno de ellos serán lineales, por lo que les podemos aplicar lo que sabemos.
- Tendremos que tener cuidado en monitorear cuándo el circuito sale de un modo y entra en otro.
- Esos instantes de tiempo definirán los tramos de funcionamiento lineal.

Llave

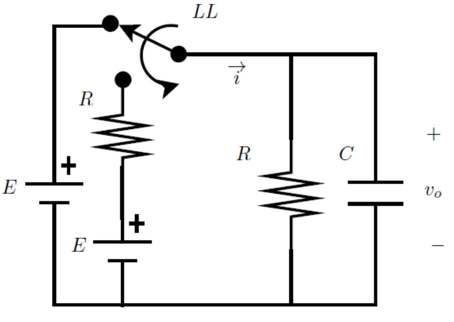


Tiene dos posiciones: cerrada (ON) ; abierta (OFF)

$$ON \ \ cortocircuito \quad , \quad OFF \ \ circuito\, abierto$$

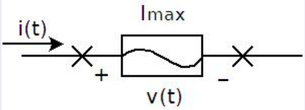
Elementos lineales a tramos

Ejemplo



Elementos lineales a tramos

Fusible

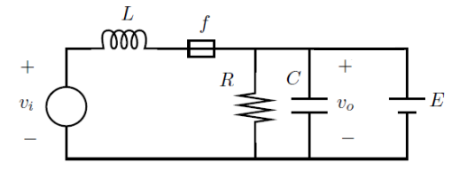


Tiene dos estados, sano y cortado. Una vez que se corta, cuando el módulo de la corriente alcanza un valor de corte I_{max}, no cambia más su estado.

$$Sano: \;\; cortocircuito \;\;\; , \;\;\; Cortado: \;\; circuito\, abierto$$

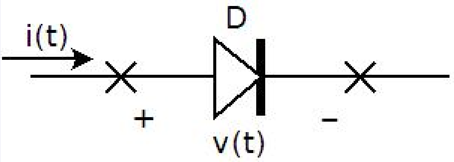
Elementos lineales a tramos

Ejemplo



Elementos lineales a tramos

Diodo ideal



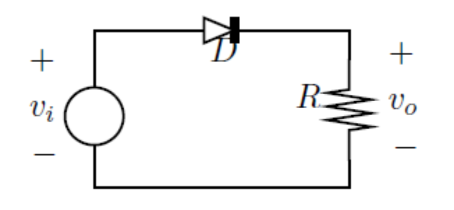
Tiene dos estados, ON (cortocircuito) y OFF (circuito abierto), compatible con la siguiente tabla:

Estado	Suposición	Verificación
ON	$v_D = 0$	$i_D \geq 0$
OFF	$i_D = 0$	$v_D \leq 0$

Su estado depende del resto del circuito.

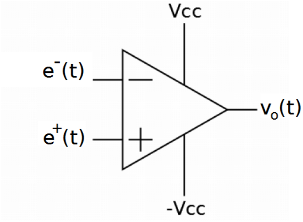
Elementos lineales a tramos

Ejemplo



Elementos lineales a tramos

Comparador ideal



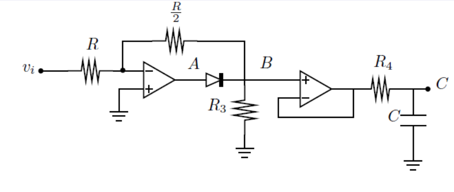
Recordando lo que aprendimos de operacional ideales funcionando como comparadores, sabemos que la salida de un comparador toma dos posibles valores, de acuerdo con la siguiente tabla :

Suposición	Verificación
$v_o = +V_{CC}$	$e^+ > e^-$
$v_o = -V_{CC}$	$e^+ < e^-$

Su estado depende del resto del circuito.

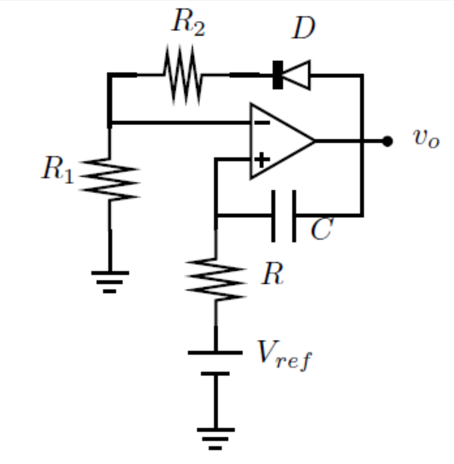
Elementos lineales a tramos

Ejemplo



Elementos lineales a tramos

Ejemplo



Análisis de circuitos lineales por tramos

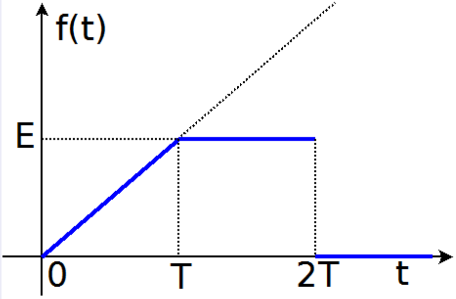
Idea general

- Muchas veces nos vamos a enfrentar a un circuito que funciona por tramos.
- La palabra *tramo* refiere a un intervalo de tiempo.
- Rescatamos lo que vimos antes para diodos, comparadores, llaves y fusibles:
  - en cada estado de estas componentes, tenemos un circuito lineal;
  - al cambiar de estado, comienza un nuevo tramo;
  - el cambio puede ser por:
    - una acción externa (se cierra una llave);
    - por un cambio intrínseco en el comportamiento de una componente (se corta un diodo, salta un fusible, conmuta un comparador);
  - extendemos la idea a cuando cambia la entrada (por ejemplo, una entrada tipo rampa pasa a ser constante).

Análisis de circuitos lineales por tramos

Método de análisis por tramos

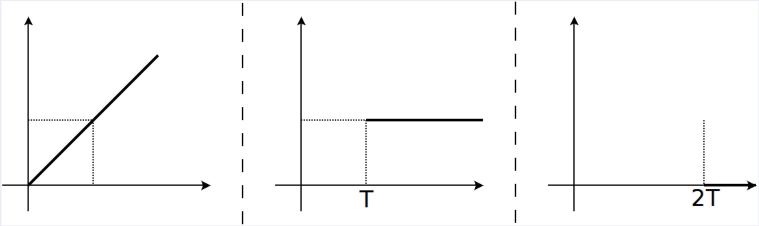
- **Primero:** tratamos de definir tramos a priori (mirando si la entrada, complicada, puede ser pensada como la *sucesión* de entradas sencillas).
- A modo de ejemplo, consideremos la entrada $f(t)$:



- Si no usáramos tramos, tendríamos que hallar la transfomada de Laplace de $f(t) = Y(t).\frac{E}{T}t + \left[-Y(t-T)\frac{E}{T}(t-T)\right] - Y(t-2T)E$.

Análisis de circuitos lineales por tramos

Método de análisis por tramos



Cada señal tiene transformada sencilla.

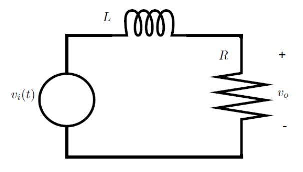
Análisis de circuitos lineales por tramos

Método de análisis por tramos

- **Segundo:** para cada tramo
  - denotamos por $t = 0$ su instante de comienzo;
  - identificamos sus datos previos (serán los valores finales del tramo anterior);
  - resolvemos el circuito, encontrando las soluciones en el tiempo, las cuales son válidas en el tramo;
  - identificamos el final del tramo (puede ser conocido a priori o depender del estado de una componente);
- De esa manera, vamos construyendo la respuesta, concatenando soluciones por tramos.

Ejemplo

Resolver el circuito de la figura, inicialmente descargado, siendo la entrada la señal $f(t)$ anterior.

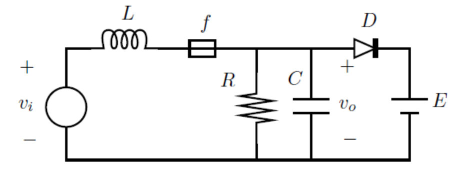


- Los tramos los define la entrada.
- Tramo 1 ($t = 0$): circuito descargado, entrada igual a $Y(t).\frac{E}{T}t$.
- Tramo 2 ($t' = 0$): circuito con datos previos no nulos, entrada igual a $Y(t').E$.
- Tramo 3 ($t'' = 0$): circuito con datos previos y entrada nula.

Análisis de circuitos lineales por tramos

Ejemplo

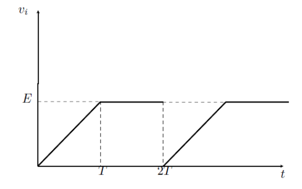
Resolver el circuito de la figura, inicialmente descargado.

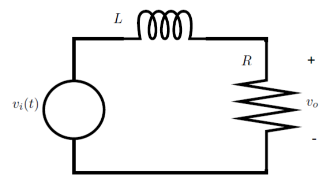


- Además de los tramos obtenidos de la entrada, tenemos que monitorear el fusible y el diodo, para ver si introducen nuevos tramos.
- El fusible sólo puede aportar un tramo.
- El diodo puede aportar más tramos, ya que puede alternar entre sus dos estados todas las veces que el circuito se lo imponga.

Ejemplo: respuesta en régimen periódico

Hallar la respuesta en régimen periódico cuando se aplica la entrada periódica de la figura.

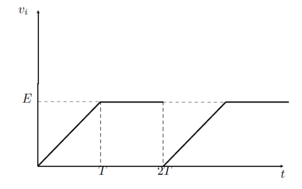


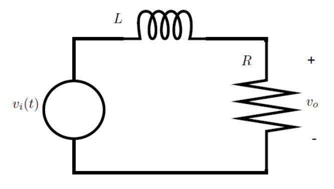


- Buscamos resolver un único tramo: un periodo (en régimen).
- Ponemos $t = 0$ al comienzo de un periodo.
- Los datos previos al comienzo de un periodo serán los valores finales del periodo anterior, que no conocemos.
- Los ponemos como parámetros. En este caso, la corriente i_{L0} de la bobina.

Ejemplo: respuesta en régimen periódico

Hallar la respuesta en régimen periódico cuando se aplica la entrada periódica de la figura.



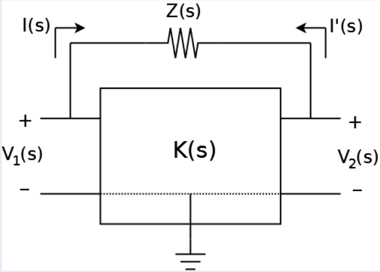


- Resolvemos el circuito para la entrada en un periodo y para el dato previo (superposición, análisis conjunto, como sea...).
- Imponemos que al final del periodo, la corriente por la bobina valga i_{L0}. Esto dará una ecuación para resolver la incógnita i_{L0}.
- Observar que para resolver el circuito en un periodo, podemos suponer dos tramos, definidos por la entrada.

Teorema de Miller

Hipótesis

- Consideremos una caja negra con dos terminales de entrada (lado 1) y dos terminales de salida (lado 2), realimentada con una impedancia $Z(s)$.

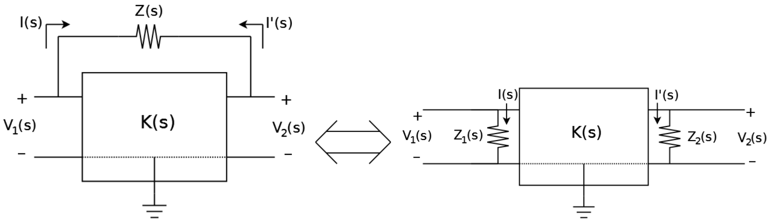


- Sea $K(s)$ la ganancia en tensión: $K(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$, con V_1 y V_2 medidos respecto de la misma referencia.
- Suponemos que $K(s)$ es independiente de $Z(s)$.

Teorema de Miller

Tesis

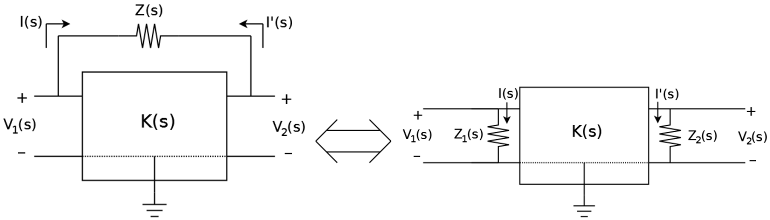
Los siguientes circuitos son equivalentes:



con

$$Z_1(s) = \frac{Z(s)}{1-K} \qquad , \qquad Z_2(s) = \frac{K.Z(s)}{K-1}$$

Teorema de Miller



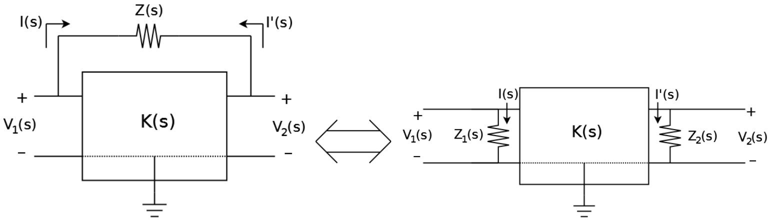
Prueba

- Calculemos primero la corriente I_1:

$$I_1(s) = \frac{V_1(s) - V_2(s)}{Z(s)} = \frac{V_1(s) - KV_1(s)}{Z(s)} = \frac{V_1(s)}{\frac{Z(s)}{1-K}}$$

- Definiendo $Z_1(s) = \frac{Z(s)}{1-K}$, preservamos el nudo a la entrada de la caja negra.

Teorema de Miller



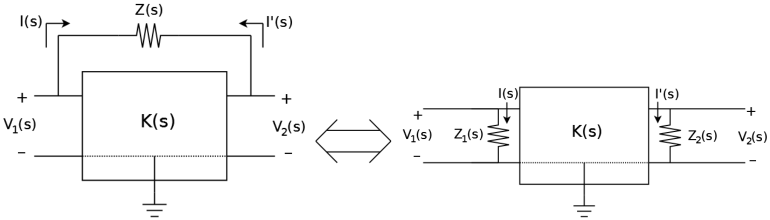
Prueba

- Veamos ahora la corriente $I_1' = -I$:

$$I_1'(s) = \frac{V_2(s) - V_1(s)}{Z(s)} = \frac{V_2(s) - \frac{V_2(s)}{K}}{Z(s)} = \frac{(K-1)V_2(s)}{KZ(s)}$$

- Definiendo $Z_2(s) = \frac{KZ(s)}{K-1}$, preservamos el nudo a la salida de la caja negra.

Teorema de Miller

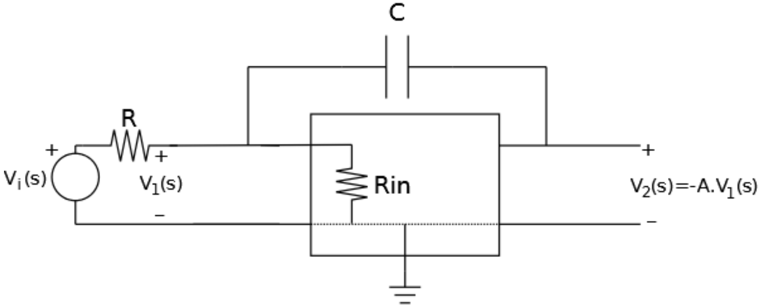


Comentarios

- Este resultado es muy útil en áreas como el diseño de amplificadores operacionales.
- El caso particular de $Z(s) = 1/Cs$ (condensador), implica que al realimentar por un condensador, éste puede verse como una capacidad en paralelo con la entrada.

$$Z_1(s) = \frac{Z(s)}{1-K} = \frac{1}{(1-K)Cs}$$

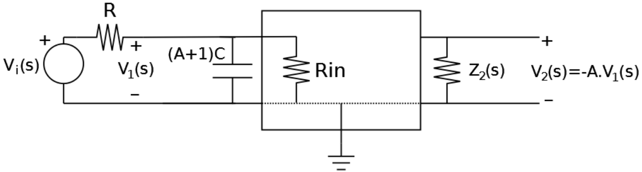
Teorema de Miller



Ejemplo

- Supongamos un bloque amplificador de ganancia $K(s) = -A$, constante y positiva, con impedancia de entrada R_{in} y realimentado por un condensador C.
- Usaremos Miller para ver la impedancia de entrada que se presenta a la fuente V_i.

Teorema de Miller



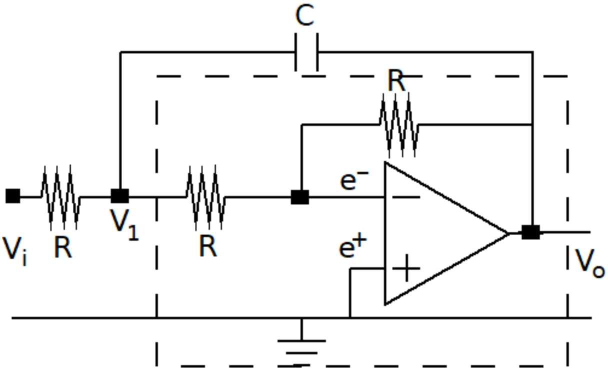
Ejemplo

- La impedancia que ve la fuente es:

$$Z_v(s) = R + R_{in} || \frac{1}{(A+1)Cs} = R + \frac{1}{(A+1)C} . \frac{1}{s + \frac{1}{(A+1)R_{in}C}}$$

- La realimentación introduce un polo a la frecuencia $\omega_0 = \frac{1}{(A+1)R_{in}C}$, que si A es grande, puede comprometer el ancho de banda del sistema.

Teorema de Miller



Ejemplo

- Hallar la ganancia del bloque recuadrado.
- Aplicar el teorema de Miller.
- Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

Relación Laplace-fasores

Fasores

- Herramienta para hallar la respuesta en régimen de un sistema lineal ante una entrada sinusoidal pura.
- Asume que la respuesta propia del sistema es transitoria.
- Si la transferencia es $H(j\omega)$, para una entrada $v_i(t) = A.\cos(\omega_0 t + \varphi)$, la respectiva respuesta en régimen es

$$v_{oR}(t) = A.|H(j\omega_0)|.\cos\left(\omega_0 t + \varphi + argH(j\omega_0)\right)$$

- No tiene en cuenta el transitorio.

Relación Laplace-fasores

Cálculo por Laplace

- Consideremos un sistema de transferencia $H(s)$ (real racional estríctamente propia) y pongamos una entrada sinusoidal pura $v_i(t) = A.\cos(\omega_0 t)$.
- Calculemos la respuesta completa mediante Laplace.
- Luego tomemos límite para t tendiendo a infinito y comparemos con lo que obtenemos por fasores.

Relación Laplace-fasores

Cálculo por Laplace

- Denotemos por $v_o(t)$ la respuesta completa.
- Entonces

$$V_o(s) = H(s).V_i(s) = H(s).\frac{As}{s^2+\omega_0^2}$$

- Antitransformamos para obtener $v_o(t)$.
- Al ser $H(s)$ real racional, aplicamos fracciones simples.
- Por simplicidad, supongamos que

$$H(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s+p_i}$$

(el resultado al que llegaremos es bien general)

Relación Laplace-fasores

Cálculo por Laplace

$$V_o(s) = H(s).V_i(s) = H(s).\frac{As}{s^2+\omega_0^2}$$

- Aplicamos fracciones simples:

$$V_o(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{s+p_i} + \frac{c}{s+j\omega_0} + \frac{d}{s-j\omega_0}$$

$$c = \lim_{s\to -j\omega_0} (s+j\omega_0)V_o(s) = \lim_{s\to -j\omega_0} H(s).\frac{As}{s-j\omega_0} = H(-j\omega_0).\frac{-Aj\omega_0}{-2j\omega_0}$$

$$d = \lim_{s\to j\omega_0} (s-j\omega_0)V_o(s) = \lim_{s\to j\omega_0} H(s).\frac{As}{s+j\omega_0} = H(j\omega_0).\frac{Aj\omega_0}{2j\omega_0}$$

Entonces: $c = \frac{A}{2}.H(-j\omega_0)$, $d = \frac{A}{2}.H(j\omega_0)$ (son conjugados!!!).

Relación Laplace-fasores

Cálculo por Laplace

$$V_o(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{s+p_i} + \frac{A}{2}.\left[\frac{\overline{H(j\omega_0)}}{s+j\omega_0} + \frac{H(j\omega_0)}{s-j\omega_0}\right]$$

Antitransformando:

$$v_o(t) = Y(t)\left[\sum_{i=1}^{n} b_i e^{-p_i t} + \frac{A}{2}.\left[\overline{H(j\omega_0)}e^{-j\omega_0 t} + H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}\right]\right]$$

$$v_o(t) = Y(t)\left[\sum_{i=1}^{n} b_i e^{-p_i t} + A.re\left[H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}\right]\right]$$

$$\boxed{v_o(t) = Y(t)\left[\sum_{i=1}^{n} b_i e^{-p_i t} + A.|H(j\omega_0)|.\cos\left(\omega_0 t + arg\ H(j\omega_0)\right)\right]}$$

Relación Laplace-fasores

$$\boxed{v_o(t) = Y(t)\left[\sum_{i=1}^{n} b_i e^{-p_i t} + A.|H(j\omega_0)|.\cos\left(\omega_0 t + arg\ H(j\omega_0)\right)\right]}$$

Comentarios

- Si los polos de $H(s)$ tiene parte real negativa $(re(p_i) > 0)$, entonces el sistema admite respuesta en régimen.
- Esto está relacionado con la estabilidad del sistema.
- La respuesta en régimen coincide con la que hallamos por fasores!!!
- $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$ nos da la respuesta en frecuencia del sistema.
- Podemos representarla mediante los diagramas de Bode.