Teoría de Circuitos - Práctico 6

Transformada de Laplace

2023 - Semestre par

En el presente práctico se espera que el alumno se familiarice con la transformada de Laplace, manejando las principales propiedades y realizando algunas transformadas concretas.

Tener presente siempre chequear la consistencia dimensional de las expresiones que van encontrando!!! Se sugiere reflexionar sobre las dimensiones de la Transformada de Laplace cuando la variable t refiere al tiempo.

Para tener una referencia, acompañamos cada ejercicio con un tiempo estimado para su resolución. Si algo lleva mucho más tiempo, avisen!!

Ejercicio 1. (30 min)

Probar siguiente las propiedades de la Tansformada de Laplace.

a) Linealidad.

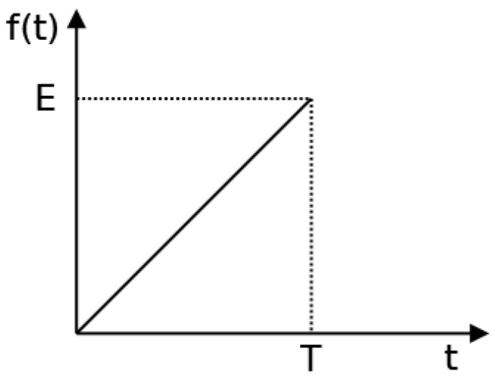
b) Traslación temporal.

c) Traslación *en frecuencia.*

d) Derivada en el tiempo.

e) Derivada *en frecuencia.*

Ejercicio 2. (40 min)



Hallar la Transformada de Laplace de las siguientes funciones:

a) $f(t) = Y(t) - Y(t-T)$, T positivo (pulso).

b) Triángulo de la figura. Calcularla integrando y luego recalcularla observando que

$$f(t) = Y(t).\frac{E}{T}t - Y(t-T)\frac{E}{T}(t-T) - Y(t-T).E$$

.

c) $Y(t).e^{-at}.\sin(\omega_0 t)$.

Ejercicio 3. (45 min)

Calcular $f(t)$, siendo $F(s)$ su transformada de Laplace:
(a) $\frac{s+2}{2(s^2-1)}$, (b) $\frac{e^{-4s}}{s^3}$, (c) $\frac{1}{s(s^2+1)}$ (recordar que $\mathcal{L}[Y(t).sen(t)](s) = \frac{1}{s^2+1}$).
(d) $F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$, con $|\zeta|$ menor que 1.

¿En qué casos es posible aplicar el teorema del valor final? En los que se pueda, aplíquelo.

Ejercicio 4. (60 min)

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales aplicando la transformada de Laplace:

a) $x(t) + 5\dot{x}(t) + 4\ddot{x}(t) = 1$, con $x(0) = 3$, $\dot{x}(0) = 1$, $t \geq 0$.

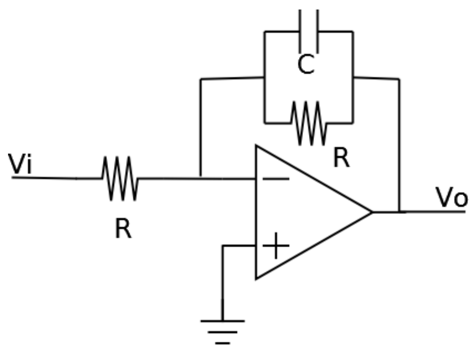
b) $\dot{x}(t) + a.x(t) = u(t)$, con $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ y a positivo, para los siguientes casos de $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$:

   i) $u(t) = 0$.
   ii) $u(t) = Y(t)$.
   iii) $u(t) = Y(t).\cos(\omega_0 t)$, $\omega_0 > 0$.
   iv) Para $x_0 = 0$, hallar $H(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$, bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$ y reflexionar sobre el resultado de la parte c)-iii.

Ejercicio 5. (40 min)

Se consideran las siguientes componentes interconectadas, siendo $v(t)$ e $i(t)$ las tensiones y corrientes en bornes, medidas de acuerdo a la ley de Ohm. A partir de las relaciones diferenciales, calcular las impedancias $\frac{V(s)}{I(s)}$ para cada caso, asumiendo condiciones iniciales nulas:
(a) resistencia R , (b) inductancia L , (c) condensador C , (d) serie de R y L , (e) paralelo de R y C.

Ejercicio 6. (60 min)



a) Mostrar que la ecuación diferencial que vincula $v_o(t)$ con $v_i(t)$ es $\dot{v}_o + \omega_0.v_o = -\omega_0.v_i$, con $\omega_0 = 1/RC$.

b) Hallar la función de transferencia del circuito $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$, para condiciones iniciales nulas.

c) Bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$.

d) Calcular por Laplace la respuesta al escalón y bosquejarla.

e) Obtener los valores iniciales y finales de $v_o(t)$, aplicando los teoremas respectivos a $V_o(s)$.

f) Hallar la respuesta completa a una entrada sinusoidal $v_i(t) = A\cos(\omega_1 t)$ y comparar el resultado con la respuesta en régimen obtenida mediante fasores:

$$v_{o,reg}(t) = A.|H(j\omega_1)|.\cos(\omega_1 t + arg\, H(j\omega_1))$$