Universidad de la República **Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Noviembre 2019**

Segundo Parcial – SOLUCIÓN

Ejercicio 1. Versión 1.(5 pts.) Sea $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\pi x^2 y - e^x}{(log(x/y))^2+1} & \text{si } (x,y) \neq (1,1) \\ a & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si f es continua, entonces:

$$\boxed{a = \pi - e}$$

La función es continua si

$$a = \lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \pi - e$$

Ejercicio 1. Versión 2.(5 pts.) Sea $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{17} x^2 y - e^x}{(log(x/y))^2+1} & \text{si } (x,y) \neq (1,1) \\ a & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si f es continua, entonces:

$$\boxed{a = \sqrt{17} - e}$$

La función es continua si

$$a = \lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \sqrt{17} - e$$

Ejercicio 2. Versón 1.(10 pts.) Se considera $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{1}{3}\sin(x) + \frac{2}{3}\sin(y)$. La ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(\pi/2, \pi/2, 1)$ es:

$$\boxed{z = 1}$$

La ecuación del plano es

$$z = f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + f_x(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) + f_y(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})(y - \frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{1}{3}\cos(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{2}{3}\cos(\frac{\pi}{2})(y - \frac{\pi}{2}) = 1$$

Ejercicio 2. Versión 2.(10 pts.) Se considera $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{2}{3}\sin(x) + \frac{4}{3}\sin(y)$. La ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(\pi/2, \pi/2, 2)$ es:

$$\boxed{z = 2}$$

$$z = f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + f_x(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) + f_y(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})(y - \frac{\pi}{2}) = 2 + \frac{2}{3}\cos(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{4}{3}\cos(\frac{\pi}{2})(y - \frac{\pi}{2}) = 2$$

Ejercicio 3. Versión 1.(5 pts.) Sea $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \frac{1}{xy}$. El polinomio de Taylor de grado 3 de la función f en el punto $(1, 1)$ es:

$$\boxed{P(x, y) =}$$

Tenemos $f(x, y) = x^{-1}y^{-1}$, entonces la derivada de orden k de f, α veces respecto a x y β veces respecto a y $(\alpha + \beta = k)$ es

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x, y) = (-1)^\alpha \alpha! x^{-1-\alpha}(-1)^\beta \beta! x^{-1-\beta} = (-1)^k \alpha!\beta! x^{-1-\alpha}y^{-1-\beta}.$$

Evaluando en $(1, 1)$ tenemos $\frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(1, 1) = (-1)^k \alpha!\beta!$, entonces los diferenciales primero, segundo y tercero son:

$$\begin{aligned} df_{(1,1)}(\Delta x, \Delta y) &= -(\Delta x + \Delta y) \\ d^2 f_{(1,1)}(\Delta x, \Delta y) &= 2(\Delta x^2 + \Delta x \Delta y + \Delta y^2) \\ d^3 f_{(1,1)}(\Delta x, \Delta y) &= -6(\Delta x^3 + \Delta x^2 \Delta y + \Delta x \Delta y^2 + \Delta y^3) \end{aligned}$$

Observando que $f(1, 1) = 1$, tenemos finalmente que el polinomio buscado en coordenadas x, y es:

$$\begin{aligned} P(x, y) = 1 &- \Big((x-1) + (y-1)\Big) + \Big((x-1)^2 + (x-1)(y-1) + (y-1)^2\Big) \\ &- \Big((x-1)^3 + (x-1)^2(y-1) + (x-1)(y-1)^2 + (y-1)^3\Big) \end{aligned}$$

Ejercicio 3.Versión 2.(5 pts.) Sea $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \frac{x}{y}$. El polinomio de Taylor de grado 3 de la función f en el punto $(1, 1)$ es:

$P(x,y) =$

Tenemos $f(x,y) = xy^{-1}$, entonces la derivada de orden k de f, α veces respecto a x y β veces respecto a y $(\alpha + \beta = k)$ es

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x,y) = \begin{cases} x(-1)^\beta \beta! y^{-1-\beta} & \text{si } \alpha = 0 \\ (-1)^\beta \beta! y^{-1-\beta} & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x(-1)^k k! y^{-1-k} & \text{si } \alpha = 0 \\ (-1)^{k-1}(k-1)! y^{-1-(k-1)} & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha \geq 2 \end{cases}$$

Evaluando en $(1,1)$ tenemos

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(1,1) = \begin{cases} (-1)^k k! & \text{si } \alpha = 0 \\ (-1)^{k-1}(k-1)! & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha \geq 2, \end{cases}$$

entonces los diferenciales primero, segundo y tercero son:

$$df_{(1,1)}(\Delta x, \Delta y) = \Delta x - \Delta y$$
$$d^2 f_{(1,1)}(\Delta x, \Delta y) = 2(-\Delta x \Delta y + \Delta y^2)$$
$$d^3 f_{(1,1)}(\Delta x, \Delta y) = 6(\Delta x \Delta y^2 - \Delta y^3)$$

Observando que $f(1,1) = 1$, tenemos finalmente que el polinomio buscado en coordenadas x, y es:

$$P(x,y) = 1 + \Big((x-1) - (y-1)\Big) + \Big(-(x-1)(y-1) + (y-1)^2\Big) + \Big((x-1)(y-1)^2 - (y-1)^3\Big)$$

Ejercicio 4.Versión 1.(10 pts.) Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{7}{8}\}$. El valor de $\iint_D \sqrt{7/8 - x^2 - y^2}\,dxdy$ es:

$(2\pi/3)(7/8)^{3/2}$

Observar que se trata del volumen de media esfera, por lo tanto podemos aplicar (si la conocemos) la fórmula para el volumen V de la esfera de radio r, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. De todas maneras inclúimos los cálculos más abajo.

Haciendo un cambio de coordenadas a polares y aplicando iteradas nos queda:

$$\iint_D \sqrt{\frac{7}{8} - x^2 - y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}(\int_0^{\sqrt{7/8}} \sqrt{\frac{7}{8} - \rho^2}\,\rho d\rho)d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}((-1/2)\int_0^{\sqrt{7/8}} \sqrt{\frac{7}{8} - \rho^2}\,(-2\rho)d\rho)d\theta =$$

hacemos el cambio $u = \frac{7}{8} - \rho^2$

$$\int_0^{2\pi}(-1/2)(\int_{7/8}^{0} \sqrt{u}du)d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}(-1/2)((2/3)u^{3/2}\ \ |_{7/8}^{0})d\theta = (2\pi/3)(7/8)^{3/2}$$

Ejercicio 4. Versión 2(10 pts.) Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 9\pi^2\}$. El valor de $\iint_D \sqrt{9\pi^2 - x^2 - y^2}dxdy$ es:

$$\boxed{(2\pi/3)(3\pi)^{3/2}}$$

Haciendo un cambio de coordenadas a polares y aplicando iteradas nos queda:

$$\iint_D \sqrt{9\pi^2 - x^2 - y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}(\int_0^{3\pi} \sqrt{9\pi^2 - \rho^2}\,\rho d\rho)d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}((-1/2)\int_0^{3\pi} \sqrt{9\pi^2 - \rho^2}\,(-2\rho)d\rho)d\theta =$$

hacemos el cambio $u = 9\pi^2 - \rho^2$

$$\int_0^{2\pi}(-1/2)(\int_{9\pi^2}^{0} \sqrt{u}du)d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}(-1/2)((2/3)u^{3/2}\ |_{9\pi^2}^{0})d\theta = (2\pi/3)(9\pi^2)^{3/2} = (2\pi/3)(3\pi)^{3/2}$$

Ejercicios de desarrollo

Ejercicio 1.(10 pts.) Consideremos $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probar que existen todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$, pero sin embargo f no es continua en $(0,0)$.

Solución: Primero veamos que f no es continua en $(0,0)$ y para ello hagamos trayectorias basándonos en la forma en que está dividido el dominio.

$$Para\ y = x, \lim_{x\to 0} f(x,x) = 0.$$

$$Para\ y = x^4, \lim_{x\to 0} f(x,x^4) = 1.$$

A continuación analicemos la existencia de las derivadas direccionales. Sea $w = (u,v) \in \mathbb{R}^2$, por definición

$$\frac{\partial f}{\partial w}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hu,hv)}{h}.$$

Hay varias formas de analizar este límite y una de ellas es a través de los límites laterales. Tomemos primero el caso $h \to 0^+$:

- Si $v \le 0$, entonces $hv \le 0$ y $f(hu,hv) = 0$.
- Si $v > 0$, entonces existe $\delta(u,v) > 0$ tal que si $0 < h < \delta(u,v)$ se cumple que $v > hu^2 \Rightarrow hv > h^2u^2$. Para estos valores de h tenemos entonces que $f(hu,hv) = 0$.

En conclusión, sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (no es otro que el $\delta(u,v)$ que está más arriba) tal que si $0 < h < \delta$, entonces $\mid \dfrac{f(hu,hv)}{h} \mid < \varepsilon$ (en particular ese cociente es igual a cero), luego

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(hu,hv)}{h} = 0.$$

De forma análoga se muestra que el límite por la izquierda es también cero, luego $\dfrac{\partial f}{\partial w}(0,0) = 0$, para cualquier dirección $w \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2.(10 pts.)

(1) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, $a \in \mathbb{R}^n$ y $v \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Definir diferenciabilidad de f en el punto a.
   (b) Definir $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$.
   (c) Demostrar que si f es diferenciable en el punto a, entonces para todo $v \in \mathbb{R}^n$ existe $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ y además $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = D_af(v)$ (Aquí $D_af : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denota el diferencial de f en el punto a).

(2) Se considera ahora $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable en el punto $(1,1,1)$. Se sabe que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = (3,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = (\pi,5)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = (2,1)$, y que $f(1,1,1) = (\sqrt{5},2)$. Calcular:

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h\pi, 1+eh, 1-\pi h) - (\sqrt{5},2)}{h}$$

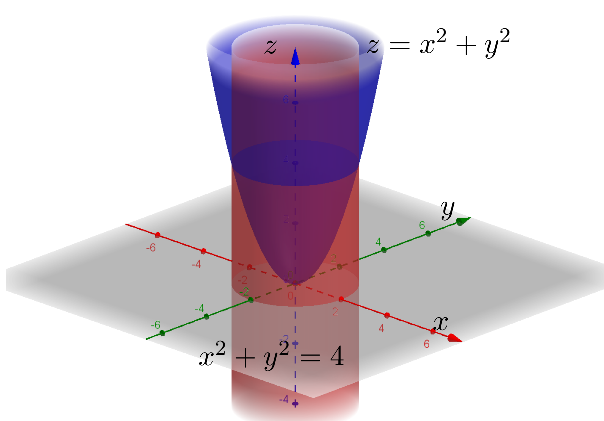
(1) a) Ver teórico
 b) Ver teórico
 c) Ver teórico

(2) Observar que

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h\pi, 1+eh, 1+\pi h) - (\sqrt{5},2)}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}(1,1,1)$$

donde $v = (\pi, e, -\pi)$. Por lo tanto $L = D_{(1,1,1)}f(v)$. Utilizando los datos, la matriz asociada a $D_{(1,1,1)}f$ es $\begin{pmatrix} 3 & \pi & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, y por lo tanto $L = (\pi + e\pi, 5e - \pi)$

Ejercicio 3.(10 pts.) Sea $D = \{(x,y,z) : -1 \leq z \leq x^2+y^2;\ x^2+y^2 \leq 4\}$. Calcular el volumen de D. Para calcular el volumen del conjunto D utilizaremos la siguiente figura como referencia.



Realicemos un cambio de coordenadas a coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Utilizando que $\rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\sin(\theta) = \rho^2$, las condiciones

$$\begin{cases} -1 \leq z \leq x^2+y^2 \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$$

se transforman en las condiciones

$$\begin{cases} -1 \leq z \leq \rho^2 \\ \rho^2 \leq 4 \end{cases}$$

Como en coordenadas cilíndricas fijamos $\rho > 0$, las condiciones que determinan el conjunto D son

$$\theta \in [0, 2\pi), \quad 0 < \rho \leq 2 \quad \text{y} \quad -1 \leq z \leq \rho^2.$$

Luego, el volumen podemos calcularlo mediante la integral:

$$\begin{aligned} \iiint_D dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{-1}^{\rho^2} \rho \, dzd\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \rho(\rho^2 + 1) \, d\rho \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_0^2 \rho^3 + \rho \, d\rho \\ &= 2\pi \left(\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=2} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{16}{4} + \frac{4}{2} \right) = 12\pi \end{aligned}$$

Otra posibilidad: El mismo volumen se puede calcular como la integral doble

$$\iint_{D'} x^2 + y^2 + 1,$$

donde $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Haciendo el cambio a coordenadas polares se obtiene exactamente el mismo resultado.