Solución Práctico 5 - Integrales impropias

Ejercicio 1

a) Tenemos $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua no negativa y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

i) Por T.F.C sabemos que F es derivable y $\forall x \in [a, +\infty)$ $F'(x) = f(x) \geq 0$. Por lo tanto F es monótona creciente.

ii) Recordamos que definimos

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} F(x)$$

Queremos probar que dicho límite existe si y solo si F acotada superiormente.
Si $\lim_{x\to+\infty} F(x) = L \geq 0$, como F monótona creciente necesariamente $\forall x$ $F(x) \leq L$, lo que implica que L es cota superior.
Por otro lado, si F es acotada superiormente y llamamos L a la menor de las cotas superiores, vemos que necesariamente $\lim_{x\to+\infty} F(x) = L$. Basta con ver que por ser la menor de las cotas superiores, dado $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in [a, +\infty)$ tal que $F(x_0) \in (L-\epsilon, L]$. Como F es monótona creciente, si $x \geq x_0$, $F(x) \in (L-\epsilon, L]$, cumpliendo con la definición de límite, es decir:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists x_0 \text{ tal que } \forall x \geq x_0 \ |F(x) - L| < \epsilon$$

b) Tenemos ahora $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua que verifica $0 \leq f(t) \leq g(t)$ para todo $t \geq a$ y definimos $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. Observar que por la parte a) la función $G(x)$ también es monótona creciente.

i) Sea $L_g = \lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$. Como G monótona creciente, tenemos que $\forall x$ $F(x) \leq G(x) \leq L_g$. Es decir, F es monótona creciente y acotada superiormente. Por la parte a), concluímos que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ existe y es finito. Además, si llamamos L_f a dicho límite, se verifica $L_f \leq L_g$.

ii) Vemos que G es una función monótona creciente sin cota superior, pues si M fuera cota superior de G lo sería también de F, contradiciendo que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Esto implica que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$.

Ejercicio 2

a) **Converge sii** $\alpha > 1$, y en este caso converge a $\left(\frac{1}{\alpha - 1}\right)\left(\frac{1}{\log(2)^{\alpha-1}}\right)$. Para el cálculo considerar el cambio de variable $u(x) = \log(x)$.

b) **Converge** a $\frac{1}{2}$. Considerar cambio de variable $u(x) = x^2$.

c) **Oscila**. Considerar cambio de variable $u(x) = \frac{1}{x}$.

d) **Converge** a π.

e) **Converge** a $\pi/2$. Considerar cambio de variable $u(x) = e^x$.

Ejercicio 3

Buscamos el valor de $k > 0$ para que la siguiente integral sea convergente:

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2+2k} - \frac{k}{x+1} \right) dx$$

La función a integrar es

$$\frac{x}{2x^2+2k} - \frac{k}{x+1} = \frac{x^2+x-2kx^2-2k^2}{2x^3+2kx+2x^2+2k} = \frac{(1-2k)x^2+x-2k^2}{2x^3+2x^2+2kx+2k}$$

Observamos que si $k = \frac{1}{2}$, la integral es de la misma clase que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$, y por lo tanto converge. De lo contrario, sería de la clase $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}$ que diverge. Por lo tanto el único valor de k para el cual la integral converge es $k = \frac{1}{2}$.

Para calcular la integral, buscamos una expresión para la primitiva de $\frac{x}{2x^2+1} - \frac{1}{2(x+1)}$.

Una primitiva de $\frac{x}{2x^2+1}$ es $\frac{\log(2x^2+1)}{4}$ (basta con considerar el cambio de variable $u(x) = x^2$).

Una primitiva de $\frac{1}{(x+1)}$ es $\log(x+1)$.

Por lo tanto, una primitiva de la función a integrar es

$$\frac{1}{4}\log(2x^2+1) - \frac{1}{2}\log(x+1) = \frac{1}{4}\log\left(\frac{2x^2+1}{(x+1)^2}\right)$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{x}{2x^2+1} - \frac{1}{2(x+1)} dx &= \frac{1}{4}\log\left(\frac{2x^2+1}{(x+1)^2}\right)\Bigg|_1^{+\infty} \\
&= \frac{1}{4}\left(\log(2) - \log\left(\frac{3}{4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\log\left(\frac{8}{3}\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 4

a) Observar que $\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x} \to 0$ si $x \to +\infty$.

b) Observar que usando el cambio de variable $x = u^2$ tenemos

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{+\infty} \operatorname{sen}(u^2) du$$

y el termino de la derecha converge por el ejercicio 5).

Además, como

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x} dx \geq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$

tenemos que la segunda integral diverge.

c) El criterio de equivalentes no aplica ya que $\frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}$ y $\frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x}$ no son funciones no negativas.

Ejercicio 5

a) Sean f, g derivables con derivada de primer orden integrable, definidas en $[a, +\infty)$ tales que $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = L \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx &= \lim_{T\to+\infty} \int_a^T f'(x)g(x)dx \\ &= \lim_{T\to+\infty} f(x)g(x)\Big|_a^T - \lim_{T\to+\infty} \int_a^T f(x)g'(x)dx \\ &= \big(L - f(a)g(a)\big) - \int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx\end{aligned}$$

Por lo tanto es claro que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$ converge si y solo si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx$ converge.

b) 1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$ es **convergente** (en $x = 0$ es equivalente a 1, para la integral a partir de $x = 1$ se deduce de la parte *a*)).

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t^2}dt$ es **convergente** (converge absolutamente).

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(t^2)dt$ es **convergente** (escribir $\operatorname{sen}(t^2) = 2tsen(t^2)\frac{1}{2t}$ en el dominio $[1, +\infty)$ e integrar por partes).

$\displaystyle\int_1^{+\infty} |\operatorname{sen}(t^2)|$ es **divergente** (por comparación con la función poligonal que va conectando máximos y mínimos de la función $|\operatorname{sen}(t^2)|$).

Ejercicio 6

a) **Convergente** $\left(\text{observar que la función a integrar es par, y comparar con } \dfrac{1}{x^2} \text{ para } x > 1\right)$.

b) **Divergente** $\left(\text{equivalente a } \dfrac{1}{x}\right)$.

c) **Convergente** (integración por partes).

d) **Convergente** $\left(\text{converge absolutamente, pues } \dfrac{|\operatorname{sen}(x)|}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}\right)$.

e) **Divergente** (se integra una función periódica y positiva).

f) **Divergente** $\left(\text{equivalente en infinito a } \dfrac{1}{x}\right)$.

g) **Convergente** (observar primero que se integra una función impar y luego ver que en $+\infty$ es equivalente a $\dfrac{x}{e^x}$, cuya integral impropia es convergente).

h) **Divergente** (observar primero que se integra una función par, y luego ver que en $x = 1$ la función es equivalente a $\dfrac{1}{x-1}$).

i) **Convergente** $\left(\text{en } x = 0 \text{ es equivalente a } \frac{1}{\sqrt{x}}\text{, y para estudiar la convergencia en infinito se hace integración por partes}\right)$.

j) **Convergente** (utilizar cambio de variable $u(x) = \sqrt{x}$).

k) **Divergente** (la función que se integra está acotada en un entorno de 0, y en $+\infty$ es equivalente a e^{x^2}).

l) **Dvergente** $\left(\text{considerar el cambio de variable } u(x) = \frac{-1}{x-1}\right)$.

m) **Convergente si $\alpha < 1$ y $\beta < 1$, de lo contrario diverge** $\left(\text{en } x = 0 \text{ es equivalente a } \frac{1}{x^\alpha} \text{ y en } x = \pi/2 \text{ es equivalente a } \frac{1}{(\pi/2 - x)^\beta}\right)$.

Veamos en detalle los ejercicios **g)** e **i)**.

g) Estudiaremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} cosh(x)^{-1} x dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^{-1} x dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2x}{e^x + e^{-x}}\right) dx$$

La función que se integra es impar: si $f(x) = \cosh(x)x$, entonces $f(-x) = -f(x)$, por lo tanto, podemos afirmar que si la serie converge entre 0 y $+\infty$, la integral buscada será nula. La integral $\int_0^{+\infty} \cosh(x) x dx$ es de primera especie. Basta con probar que $\int_1^{+\infty} \cosh(x) x dx$ es convergente. Podemos ver que esta última integral es equivalente a $\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$, pues

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2x}\right) = 1$$

Vemos que $\forall x > 0$:

$$\frac{x}{e^x} \leq \frac{6x}{x^3} = \frac{6}{x^2}$$

Pues esta desigualdad ocurre si y solo si $\frac{x^3}{6} \leq e^x$, lo cual se verifica trivialmente si recordamos que $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + ...$

Como $\int_1^{+\infty} \frac{6}{x^2} dx$ converge, por criterio de comparación $\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$ converge y por lo tanto $\int_1^{+\infty} \cosh(x) x dx$ converge.

i) Estudiaremos

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$

Vemos que es una integral impropia mixta. Por lo tanto separamos su estudio en dos partes:

$A = \int_0^1 \cos(x) x^{-1/2} dx$

$B = \int_1^{+\infty} \cos(x) x^{-1/2} dx$

Primero vemos que A converge por criterio de equivalentes: la integral de $\cos(x)x^{-1/2}$ es equivalente a la de $x^{-1/2}$ en $x = 0$ ya que $\cos(0) = 1$, y sabemos que $\int_0^1 x^{-1/2}dx$ converge.

Por otro lado, para calcular B hacemos integración por partes:

$$\begin{aligned} B &= \operatorname{sen}(x)x^{-1/2}\Big|_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}(x)x^{-3/2}dx \\ &= (0 - \operatorname{sen}(1)) + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}}dx \end{aligned}$$

Como $\int_1^{+\infty} \frac{sen(x)}{x^{3/2}}dx$ converge absolutamente $\left(\text{pues } \frac{|sen(x)|}{x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}} \text{ y } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \text{ converge}\right)$, concluímos que B es una serie convergente.

Como A y B son convergentes, lo es la integral del ejercicio.

Ejercicio 7

a) **Converge sii** $\alpha \in (-1, 0)$. Observar que en $x = 0$ es equivalente a integrar x^α y en $+\infty$ es equivalente a integrar $x^{\alpha-1}$.

b) **Converge sii** $\alpha \in (0, 1/2)$. Observar que en $x = 0$ es equivalente a integrar $x^{-2\alpha}$, y que en $+\infty$ es equivalente a integrar $e^{-\alpha x^2}$.

Veamos en detalle el ejercicio **8b)**. La integral impropia a estudiar es

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(e^{x^2} - 1\right)^\alpha}dx$$

La integral es mixta, por lo tanto dividimos su estudio en dos partes:

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\left(e^{x^2} - 1\right)^\alpha}dx, \qquad B = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(e^{x^2} - 1\right)^\alpha}dx$$

Buscamos los valores de α para los cuales A y B sean convergentes simultáneamente, de forma que $I = A + B$ también sea convergete.

Recordamos que $\lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$, por lo tanto

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(e^{x^2} - 1\right)^\alpha}dx \quad \text{es equivaente a} \quad \int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha}}dx$$

Dicha integral converge si y solo si $\alpha < 1/2$.

Por otro lado:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(e^{x^2} - 1\right)^\alpha}dx \quad \text{es equivaente a} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{\alpha x^2}}dx$$

Esta última integral converge si y solo si $\alpha > 0$

Concluímos que para que las integrales A y B sean convergentes simultáneamente, $\alpha \in (0, 1/2)$.

Ejercicio 8

a) **Convergente** (considerar cambio de variable $u(x) = x^2$).

b) **Divergente** (considerar cambio de variable $u(x) = log(x)$).

c) **Convergente** (integración por partes).

Veamos en detalle el ejercicio **9c)**. Queremos clasificar usando el criterio integral la serie

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{\log(n)}{n^2}$$

Para ello consideramos la función $f(x) = \dfrac{\log(x)}{x^2}$.

Su derivada es $f'(x) = \dfrac{x - 2x\log(x)}{x^4}$. Observamos que si $x \geq 1$ $f(x) \geq 0$ y si $x \geq e^{1/2}$ $f'(x) \leq 0$. Es decir, la función es positiva y monótona decreciente a partir de $x = e^{1/2} < 2$, por lo que estamos dentro de las hipótesis del criterio serie-integral.

El comportamiento de la serie será el mismo que el de la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2} dx$$

Integrando por partes obtenemos que

$$\int_1^T \frac{\log(x)}{x^2} dx = \left. \frac{-\log(x)}{x} \right|_1^T + \int_1^T \frac{1}{x^2} dx$$

Tomando límite cuando $T \to +\infty$ obtenemos que la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ es convergente.

Ejercicio 9

Observamos primero que $f(x) = \dfrac{1}{x\log(x)}$ es positiva y monótona creciente para $x > 2$, por lo que estamos en condiciones de utilizar el criterio integral.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{\log(x)} dx = \lim_{T \to +\infty} \int_2^T \frac{1}{x} \frac{1}{\log(x)} dx$$

Para calcular una primitiva, basta con considerar el cambio de variable $u(x) = \log(x)$:

$$\int \frac{1}{x} \frac{1}{\log(x)} dx = \int \frac{1}{u} du = \log(u) = \log(\log(x))$$

Entonces:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{\log(x)} dx = \lim_{T \to +\infty} \log(\log(T)) - \log(\log(2)) = +\infty$$

Por lo tanto, por criterio integral, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log(n)} = +\infty$.

Ejercicio 10

Calulemos

$$\int_0^{+\infty} \log\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) dx$$

Observamos que

$$\int_{x_1}^{x_2} 1.\log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)dx = x\log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x\Big(\frac{1}{1+a^2/x^2}\Big)\Big(\frac{-2a^2}{x^3}\Big)dx$$
$$= x\log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{2a^2}{x^2+a^2}dx$$
$$= x\log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} + 2a\int_{x_1}^{x_2} \frac{1/a}{(\frac{x}{a})^2+1}dx$$
$$= x\log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} + 2a\int_{x_1/a}^{x_2/a} \frac{1}{u^2+1}dx$$
$$= x\log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} + (2a)\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_{x_1}^{x_2}$$

Queremos estudiar los límites cuando $x_1 \to 0$ y cuando $x_2 \to +\infty$.

Es claro que el sumando de la derecha tiende a $2a\Big(\operatorname{arc\,tg}(+\infty) - \operatorname{arc\,tg}(0)\Big) = 2a\frac{\pi}{2} = a\pi$. Para calcular el sumando de la izquierda, debemos calcular dos límites:

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\frac{a}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-2a^2}{x^3+a^2x}\right)\Big(-x^2\Big) = 0$$

(Observar que en el cálculo del límite en $+\infty$ se utilizó la regla de l'Hôpital).

Por lo tanto concluímos que la integral converge y además

$$\int_0^{+\infty} \log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)dx = a\pi$$

Ejercicios Complementarios

Ejercicio 1

Este ejercicio se encuentra en detalle en las notas del curso.

Se prueba que el área es infinita y el volumen es π.

Ejercicio 2

Se define para $x \in (0, +\infty)$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$

Observamos lo siguiente: Si $n > 1$ es un natural, $T > 0$:

$$\int_0^T e^{-t}t^{n-1}dt = -e^{-t}t^{n-1}\Big|_0^T + (n-1)\int_0^T e^{-t}t^{n-1-1}$$

a) Probemos que $\Gamma(n)$ es convergente por inducción. Es claro que $\Gamma(1)$ converge. Suponemos que también es cierto para $n > 1$ y probemos que se cumple para $n+1$.

$$\Gamma(n+1) = \lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-t}t^n dt = (0-0) + (n)\Big(\lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-t}t^{n-1}\Big)$$

Como $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-t}t^{n-1}$ existe por hipótesis de inducción, $\Gamma(n+1)$ es convergente.

Por inducción completa $\Gamma(n)$ converge para todo n natural.

b) De la última igualdad se deduce que $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$.

c) Se deduce fácilmente por inducción completa, utilizando la relación dada en b), que $\Gamma(x)$ es una generalización del factorial a los reales, es decir, que $\Gamma(n) = (n-1)!$.