

Práctico 4 – Series

1. Indicar si las siguientes series son convergentes o no, hallando sus suma en caso de serlo.

$$\begin{array}{llll}
 a) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n & b) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+3} & c) \sum_{n=1}^{+\infty} 5^{n+1} & d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n(n+3)} \\
 e) \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right) & f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} & g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{arc\,tg}(n+1) - (n+1) \operatorname{arc\,tg}(n)}{n(n+1)}
 \end{array}$$

2. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes aplicando el criterio de comparación.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n+1}}$$

3. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes aplicando el criterio del equivalente.

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3} \quad c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1) - \log(n)}{10n+1}$$

4. Usar el criterio del cociente para estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

5. Usar el criterio de la raíz para estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$$

6. Sabiendo que $a_n \geq 0$ y que $\sum a_n$ converge, indicar si las siguientes series son convergentes o no, explicando por qué.

$$a) \sum \frac{1}{a_n} \quad b) \sum a_n^2 \quad c) \sum \sqrt{a_n} \quad d) \sum \log(1+a_n)$$

7. Estudiar la convergencia de las siguientes series alternadas. En caso de que sean convergentes, estudiar si también lo son absolutamente.

$$\begin{array}{ll}
 a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} & b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1} \\
 c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{6n-5} & d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n^3+2n^2+8n+5)}{n^5+4n^3+15}
 \end{array}$$

8. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)\log(n+1)} \quad c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n} \quad d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

9. Sea R un rectángulo de lado 1. Se trazan líneas de forma de dividir R en 9 rectángulos iguales de lado $\frac{1}{3}$, y se pinta el rectángulo del centro. Inductivamente, se divide cada rectángulo sin pintar en 9 rectángulos y se pinta el del centro.

- Calcular el área pintada luego de realizar el procedimiento n veces.
- Calcular el área pintada luego de realizar el procedimiento infinitas veces.

Realice el mismo tipo de estudio pero ahora con el perímetro del área pintada.

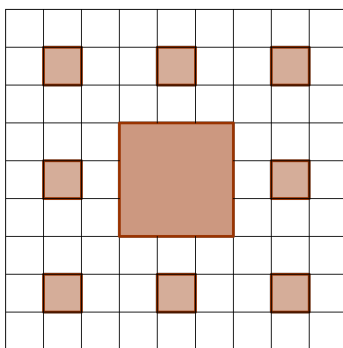


Figura 1: Figura que se obtiene en el paso 2.

Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores

1. (*Primer parcial segundo semestre 2022*) Considere las siguientes afirmaciones sobre series:

- (1) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$ es convergente.
- (2) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$ es absolutamente convergente.
- (3) La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log(2) \cdot \log(3) \cdot \log(4) \cdots \log(n)}{n!}$ es convergente.

Entonces:

- (A) Solamente las afirmaciones (1) y (2) son verdaderas.
- (B) Solamente las afirmaciones (2) y (3) son verdaderas.
- (C) Todas las afirmaciones son verdaderas.
- (D) Solamente la afirmación (2) es verdadera.
- (E) Solamente las afirmaciones (1) y (3) son verdaderas.

2. (*Primer parcial segundo semestre 2021*) La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + e^{-(n+1)^2} - e^{-n^2} \right)$$

- (A) converge a $\frac{3}{2}$.

- (B) converge a $\frac{1}{2}$.
- (C) converge a 1.
- (D) converge a $3 - e$.
- (E) diverge.

3. (**Primer parcial segundo semestre 2020 turno matutino**) Sea a_n una sucesión de términos positivos tal que $\sum a_n$ es convergente. Considere las siguientes series

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{a_n^2} - 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(a_n) \operatorname{sen}(a_n)$$

Entonces:

- (A) Ambas series son divergentes.
- (B) Ambas series son convergentes.
- (C) Solo la primera serie es convergente.
- (D) Solo la segunda serie es convergente.
- (E) La segunda serie no se puede clasificar a priori, por no ser de signo constante.

4. (**Primer parcial segundo semestre 2019**)

- (1) Probar que si $\sum a_n$ es convergente entonces $\lim_n a_n = 0$.
- (2) Enunciar y probar el criterio del cociente.
- (3) Clasificar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 5n + 1}{\pi n^3 + 2n}$$

- (4) Clasificar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

5. (**Primer parcial primer semestre 2018**) Una pelota de goma se deja caer desde una altura de 2 metros. Cada vez que toca el piso rebota y se eleva hasta una altura de $\frac{2}{3}$ de la distancia desde la que cae.

Interpretando la distancia que recorre la pelota luego de infinitos rebotes como suma de una serie infinita, indicar la opción correcta.

- (A) Luego de infinitos rebotes la pelota recorre 4 metros.
- (B) Luego de infinitos rebotes la pelota recorre 6 metros.
- (C) Luego de infinitos rebotes la pelota recorre 8 metros.
- (D) Luego de infinitos rebotes la pelota recorre 10 metros.
- (E) Para rebotar infinitas veces la pelota debe recorrer una distancia infinita (i.e. la serie no converge).