Sea $\mathcal{C}$ un código lineal binario con matriz generatriz

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notación. Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ un vector binario arbitrario de largo 4, $\mathbb{1}$ el vector $\mathbb{1} = (1,1,1,1)$, y $\mathbf{e}_i$ un vector unidad con el valor 1 en la coordenada i, p.ej., $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,0)$. Para un vector binario arbitrario $\mathbf{v}$, sea $\mathrm{wt}(\mathbf{v})$ el peso de Hamming de $\mathbf{v}$.

1. Escriba los parámetros $[n, k]$ de $\mathcal{C}$.
2. Demuestre que toda palabra de código $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ tiene la forma siguiente:

   $$\mathbf{c} = \begin{cases} (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{u}) & \mathrm{wt}(\mathbf{u}) \text{ es par,} \\ (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{u}+\mathbb{1}) & \mathrm{wt}(\mathbf{u}) \text{ es impar,} \end{cases}$$

   donde la adición de vectores es sobre el cuerpo $\mathbb{F}_2$ (o sea, XOR coordenada por coordenada), y $(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v})$ representa la concatenación de los vectores binarios $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

   Pista. Observe que las filas de la matriz G tienen la forma $(\mathbf{e}_i \,|\, \mathbf{e}_i+\mathbb{1})$.
3. Demuestre que la distancia mínima de $\mathcal{C}$ es $d = 4$.
4. ¿Cuántos errores puede corregir $\mathcal{C}$? ¿Cuántos puede detectar?
5. Escriba una matriz de chequeo de paridad para $\mathcal{C}$.
6. [Puntos extra.] Demuestre que $\mathcal{C}$ es dual a sí mismo.