SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (S.E.L.) 3x3

Se llama **ecuación lineal o de primer grado** a una ecuación de la forma:
$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$

Las incógnitas de la ecuación son: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y en cada ecuación las incógnitas pueden tomar cualquier número real.
Los coeficientes de las incógnitas son: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y en cada ecuación son números reales fijos.
El término independiente es: b y en cada ecuación es un número fijo.
La solución de la ecuación son los valores:
$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ que transforman la igualdad en una identidad numérica.
Discutir una ecuación es averiguar si tiene o no soluciones.
Resolver una ecuación es encontrar las soluciones de la ecuación

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto con varias ecuaciones lineales que se representa así:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

El sistema anterior es un **sistema de m ecuaciones lineales** con n incógnitas, donde la llave indica que las ecuaciones deben tratarse de forma simultánea.

- Los números reales a_{ij} se llaman **coeficientes** del sistema
- Los x_i se llaman **incógnitas** del sistema
- Y los números reales b_j se llaman **términos independientes**

La solución de este sistema es un conjunto ordenado de números reales $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tales que al sustituir las incógnitas por estos valores se verifican **a la vez** las m ecuaciones (es decir, se cumplen todas las ecuaciones del sistema **simultáneamente**).

DISCUTIR un sistema es averiguar si el sistema tiene o no soluciones.
RESOLVER un sistema es hallar todas sus soluciones
ESTUDIAR un sistema = DISCUTIR + RESOLVER

Las ecuaciones polinómicas de primer grado se llaman lineales. En ellas, las incógnitas no están elevadas a ningún exponente distinto de uno, ni multiplicadas entre sí, ni bajo radicales, ni en el denominador, ni situadas en el exponente, ni afectadas por operaciones logarítmicas o trigonométricas. Un sistema que esté formado por ecuaciones todas lineales, se denomina lineal.

Tipos de Sistemas

En relación con su solución, tenemos:

$$Sistemas\begin{cases} \underset{\text{(con solución)}}{Compatibles}\begin{cases} \underset{\text{(una solución)}}{Determinados} \\ \underset{\text{(infinitas soluciones)}}{Indeterminados} \end{cases} \\ \underset{\text{(sin solución)}}{Incompatibles} \end{cases}$$

En relación con sus términos independientes, tenemos:

$$Sist.\ homogéneos\begin{cases} Indeterminado\ \text{(con infinitas soluciones)} \\ Determinado\ \text{(con una solución impropia)} \\ \qquad x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \end{cases}$$

Para resolver un sistema hay que ir realizando transformaciones en las ecuaciones, de manera que nos resulte más fácil poder despejar todas las incógnitas.

Las distintas transformaciones que podemos hacer se basan en obtener sucesivos sistemas equivalentes aplicando ciertos criterios.

Un sistema que tiene una ecuación incompatible, es incompatible.

Sistemas Equivalentes

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones, es decir, cuando toda solución del primero es solución del segundo y viceversa.

Si dos s.e.l. son equivalentes entonces tienen el mismo número de incógnitas aunque no necesariamente igual número de ecuaciones.

Es evidente que si se cambia el orden de las ecuaciones, el sistema resultante no sólo es equivalente al inicial, sino que es el mismo.

Criterios de Equivalencia

1º Si se multiplican los dos miembros de una ecuación de un sistema por un número distinto de cero, resulta otro sistema equivalente al dado.
2º Si a una ecuación de un sistema se le suma o resta otra ecuación del mismo, resulta otro sistema equivalente.

Observaciones:

- Multiplicar una ecuación por cero equivale a suprimirla
- El 1º criterio se utiliza para conseguir que los coeficientes de una incógnita, en dos ecuaciones, sean iguales en valor absoluto (salvo el signo) y así poder eliminarla sumando ecuaciones (2º criterio).
- Si los números son enteros conviene elegir como coeficiente común de una incógnita el mcm (mín. común múltiplo) de los coeficientes para que los cálculos sean más sencillos.
- Si al sumar ecuaciones de un sistema resulta una ecuación incompatible, el sistema también lo es.

Teorema de Equivalencia

Si en un sistema lineal de ecuaciones sustituimos una ecuación cualquiera por la ecuación que resulta al multiplicarla por un número cualquiera no nulo y sumarla, miembro a miembro, a otras ecuaciones del sistema (después de multiplicar estas últimas por un número cualquiera) el nuevo sistema lineal que obtenemos es equivalente al primero (tiene las mismas soluciones que el primero).

Método de Gauss para Sistemas Lineales

Una generalización del método de reducción, utilizado para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, es el método de Gauss.

El método consiste en triangular el sistema, y para conseguirlo, utilizamos los criterios de equivalencia antes mencionados, de manera que consigamos hacer 0 los valores que están debajo de los elementos de la diagonal principal.

Esquema de un sistema **escalonado** o **triangular**:

$$\left.\begin{array}{r} \bullet x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \bullet z = \bullet \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \bullet x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet y + \bullet z = \bullet \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \bullet x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet z = \bullet \end{array}\right\}$$

(El punto azul representa cualquier número real)

Resolver un sistema dispuesto así resulta muy sencillo pues solo es necesario ir sustituyendo los valores de las incógnitas, comenzando por la última ecuación. Este proceso se extiende, de forma análoga, a sistemas de cuatro o más ecuaciones.

Si escribimos el sistema en notación matricial (matriz ampliada), todavía resulta más rápido resolverlo.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \end{array}\right)$$

Sistemas incompatibles (sin solución)

Si al aplicar el método de Gauss llegamos a una ecuación del tipo $0x+0y+0z=k \;\rightarrow\; k\neq 0,$ entonces el sistema es incompatible *(una ecuación de este tipo es absurda).*

Sistemas indeterminados (con infinitas soluciones)

Si al aplicar el método de Gauss llegamos a una ecuación del tipo $0x+0y+0z=0,$ se suprime. Si quedan menos ecuaciones que incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones y se conoce como sistema indeterminado *(una ecuación de este tipo no aporta nada).*

Observaciones:
En los ejemplos que siguen, si los representamos de forma clásica las ecuaciones se nombran como E_1, E_2 y E_3. En cambio, si utilizamos la notación matricial, las nombramos y enumeramos como filas F_1, F_2 y F_3. El símbolo $\leftrightarrow$ significa intercambiar una fila por otra. Un número delante de fila (F) o ecuación (E) indica multiplicar por dicho número.

Ejemplo 1

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=2\\ 2x-y+z=1\\ x-y+2z=2\end{array}\right\} \xrightarrow[E_3=E_3-E_1]{E_2=E_2-2E_1} \left.\begin{array}{r} x+y-z=2\\ -3y+3z=-3\\ -2y+3z=0\end{array}\right\} \xrightarrow{E_2=E_2/3}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=2\\ -y+z=-1\\ -2y+3z=0\end{array}\right\} \xrightarrow{E_3=E_3-2E_2} \left.\begin{array}{r} x+y-z=2\\ -y+z=-1\\ z=2\end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=1\\ y=3\\ z=2\end{array}}$$

El sistema es compatible determinado.

Ejemplo 2

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z=0\\ x+z=2\\ -x+y=3\\ x-y+z=4\end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 1 & 4\end{array}\right) \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 3\\ 3 & 2 & -1 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_3=F_3+F_1\\ F_4=F_4-3F_1}]{F_2=F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 7\\ 0 & 5 & -4 & -12\end{array}\right) \xrightarrow{F_4=F_4-5F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & -4 & -2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_4=F_4+4F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 26\end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=4\\ y=-2\\ z=7\\ 0=26\end{array}\right\}$$

La ecuación 4 (E_4) es incompatible, luego el sistema es incompatible.

Ejemplo 3

$$\left.\begin{array}{r} x+y+3z=2\\ 2x+3y+4z=1\\ -2x-y-8z=-7\end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ -2 & -1 & -8 & -7\end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3+2F_1]{F_2=F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & -2 & -3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3=F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+3z=2\\ y-2z=-3\end{array}\right\}$$

$$z=\lambda \;;\; y=2\lambda-3 \;;\; x+(2\lambda-3)+3\lambda=2 \;\rightarrow\; x=5-5\lambda$$

La ecuación 3 (E_3) se suprime, por tanto hay más incógnitas que ecuaciones y el sistema es indeterminado. Para cada valor del parámetro λ obtenemos una solución del sistema.

Ejemplo 4

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1\\ 2x+3y+z=-2\\ 5x-y+2z=4\end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 1 & -2\\ 5 & -1 & 2 & 4\end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-5F_1]{F_2=F_2-2F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -4\\ 0 & -6 & 7 & -1\end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3+6F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 25 & -25\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1\\ y+3z=-4\\ 25z=-25\end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=1\\ y=-1\\ z=-1\end{array}}$$

El sistema es compatible determinado.

Ejemplo 5

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y-2z=4\\ 4x+y-z=7\\ x+4y-4z=-2\end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & 4\\ 4 & 1 & -1 & 7\\ 1 & 4 & -4 & -2\end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & -2\\ 4 & 1 & -1 & 7\\ 3 & 2 & -2 & 4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3=F_3-3F_1]{F_2=F_2-4F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & -2\\ 0 & -15 & 15 & 15\\ 0 & -10 & 10 & 10\end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3/10]{F_2=F_2/15} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & -2\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3=F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & -2\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+4y-4z=-2\\ -y+z=1\end{array}\right\}$$

$$z=\lambda \;;\; y=\lambda-1 \;;\; x+4(\lambda-1)-4\lambda=-2 \;\rightarrow\; x=2$$

La ecuación 3 (E_3) se suprime, por tanto hay más incógnitas que ecuaciones y el sistema es indeterminado. Para cada valor del parámetro λ obtenemos una solución del sistema.

Ejemplo 6

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+4z=3\\ 2x+4y+8z=1\\ -y+z=-2\end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3\\ 2 & 4 & 8 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -2\end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2-2F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -5\\ 0 & -1 & 1 & -2\end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+4z=3\\ 0=-5\\ -y+z=-2\end{array}\right\}$$

La ecuación 2 (E_2) es incompatible, luego el sistema es incompatible.

Ejemplo 7

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=-10\\ x+2y+z=11\\ 2x-y+z=8\end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -10\\ 1 & 2 & 1 & 11\\ 2 & -1 & 1 & 8\end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-2F_1]{F_2=F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -10\\ 0 & 3 & 2 & 21\\ 0 & 1 & 3 & 28\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3\leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -10\\ 0 & 1 & 3 & 28\\ 0 & 3 & 2 & 21\end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3-3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -10\\ 0 & 1 & 3 & 28\\ 0 & 0 & -7 & -63\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=-10\\ y+3z=28\\ -7z=-63\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} x-1-9=-10\\ y+3\cdot 9=28\\ z=\dfrac{-63}{-7}=9\end{array} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=0\\ y=1\\ z=9\end{array}}$$

El sistema es compatible determinado.