Universidad de la República | **Cálculo diferencial e integral en varias variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Segundo Semestre 2020**

Solución Práctico 1 - Números complejos.

1. $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, por lo tanto tenemos

$$i^k = \begin{cases} 1 & si \quad k = 4r \\ i & si \quad k = 4r + 1 \\ -1 & si \quad k = 4r + 2 \\ -i & si \quad k = 4r + 3 \end{cases}$$

2. Expresar los siguientes números complejos en forma binómica ($a + bi$ con a, b reales) y en notación polar ($re^{i\theta}$ con $r > 0$ y θ real).

$a)$ $2i = 2e^{i\pi/2}$ $b)$ $-i = e^{-i\pi/2}$ $c)$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/4}$ $d)$ $18 + i = 5\sqrt{13}e^{i\arctan(1/18)}$

$e)$ $3 - i = \sqrt{10}e^{-i\arctan(1/3)}$ $f)$ $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ $g)$ $-1 = e^{i\pi}$ $h)$ $-3i = 3e^{-i\pi/2}$

$i)$ 0 $j)$ 0 $k)$ $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = e^{i\pi/4}$ $l)$ $-\frac{1}{2}i = \frac{1}{2}e^{-i\pi/2}$

3. Expresar en notación binómica:
$a)$ i $b)$ -3 $c)$ $-i$ $d)$ -2^{50}

4. Probar que para todo par de números complejos z_1 y z_2

$$a) \quad | z_1 | = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{a_1^2 + (-b_1)^2} = | \bar{z}_1 |$$

$$b) \quad | z_1 z_2 | = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = | z_1 |^2 | z_2 |^2$$

$$c) \quad | z_1 + z_2 |^2 = | z_1 |^2 + 2Re(z_1 \overline{z_2}) + | z_2 |^2 \leq | z_1 |^2 + 2 | z_1 || z_2 | + | z_2 |^2 = (| z_1 | + | z_2 |)^2$$

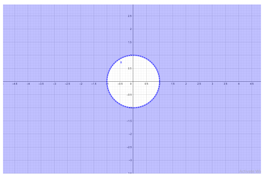
$$d) \quad 1 = \left| z_1 \frac{1}{z_1} \right| = | z_1 | \left| \frac{1}{z_1} \right|$$

8. $a)$ Falsa, ya que $(-2)^8 = 2^8$.
   $b)$ Verdadera, ya que 2 y -2 lo cumplen.
   $c)$ Verdadera, ya que $\overline{z}^8 = \overline{z^8}$.
   $d)$ Falsa, ya que la suma de los argumentos de las raices octavas de 2^8 es 7π, por lo que ese producto da -2^8.

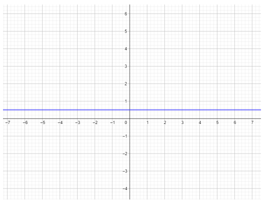
9. Tomemos $z = \cos(\pi/7) + i\,\mathrm{sen}(\pi/7) = e^{i\pi/7}$. Entonces se tiene que recien $z^{15} = z$, por lo que el conjunto A tiene 14 elementos.

10. Sea $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ con $a_i \in \mathbb{R};\ 0 \leq i \leq n$.
    $a)$ $P(\overline{z}) = a_n \overline{z}^n + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = a_n \overline{z^n} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = \overline{a_n z^n} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = \overline{a_n z + \cdots + a_1 z + a_0}$.
    $b)$ $P(\overline{z}) = P(z) = 0$.

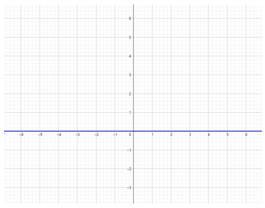
6 Encontrar, en cada caso, el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen las siguientes condiciones, y representar geométricamente.



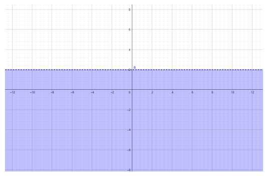
(a) $|z| > 1$



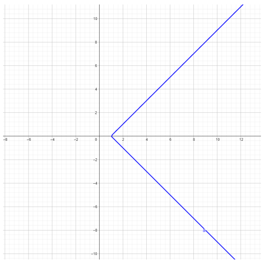
(b) $z - \overline{z} = i$



(c) $|z - i| = |z + i|$



(d) $Im(z) < 2$



(e) $|z - \bar{z}| = 2\, Re(z-1)$

11. Las raices son $\{2i, -2i, 1+i, 1-i\}$.

12. Observar que $z^3 - 2z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{1}{2} = (z-1)\left(z^2 - z + \frac{1}{2}\right) = (z-1)(z-(1/2+i1/2))(z-(1/2-i1/2))$.

    (I) Verdadero, ya que $(1/2 + i1/2) + (1/2 - i1/2) = 1$.

    (II) Falso, la distancia entre $(1/2+i1/2)$ y $(1/2-i1/2)$ es uno, pero la distancia entre $(1/2+i1/2)$ y 1 es $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

    (III) Verdadero, la suma de las racies da 2 y el producto $\frac{1}{2}$.

    Entonces:

    A) Solo las afirmaciones (I) y (III) son correctas.