Universidad de la República **Cálculo diferencial e integral en varias variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2020**

Solucion Práctico 2 - Ecuaciones Diferenciales.

Ejercicio 1

a) Las soluciones constantes son $x(t) = \pm 1$. Si $x(0) \neq \pm 1$, entonces $x(t) = \frac{2}{1-ce^{2t}} - 1 = \frac{1+ce^{2t}}{1-ce^{2t}}$ con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Observar que $c = \frac{x_0-1}{x_0+1}$ por lo que $c \in (-1,0) \cup (0,1)$

Además: si $|x_0| > 1$, $c \in (0,1)$ y $c = e^{-2k}$ para cierto $k > 0$, entonces $x(t) = \frac{1}{\tanh(k-t)}$

Y si $|x_0| < 1$, $c \in (-1,0)$ y $c = -e^{-2k}$ para cierto $k > 0$, entonces $x(t) = \tanh(k-t)$

Donde tanh es la función *tangente hiperbólico*: $\tanh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$

b) $x(t) = \pm\sqrt{2(-t+k)}$ con $k \in \mathbb{R}$. Para cada k, hay "dos soluciones": una tomando la raíz positiva y otra la negativa. Ambas están definidas en $(-\infty, k)$

c) $x(t) = \log(\sqrt{kt^2-1}$ con $k > 0$. Para cada k, hay "dos soluciones": una solución está definida para $t < -\frac{1}{\sqrt{k}}$, y la otra para $t > \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Veamos con detalle el ejercicio **1b**
(a) Buscamos una solución general a la ecuación diferencial

$$\Big(1 + x(t)^2\Big)x(t)x(t)' + \Big(1 + x(t)^2\Big) = 0$$

Observar que resolver dicha ecuación es equivalente a resolver

$$x(t)x'(t) = -1$$

Primero vemos que la ecuación no admite soluciones constantes. Más aún, no admite soluciones tales que se anulen o su derivada se anule en algún punto.

Procedemos a resolver la ecuación por el método de separación de variables (en este caso, la variable t no aparece aislada en la ecuación)

Tenemos que

$$\int x(t)x'(t)dt = \int -1dt$$

$$\int xdx = -t + k$$

$$\frac{1}{2}x(t)^2 = -t + k$$

$$x(t) = \pm\sqrt{2(-t+k)}$$

Observamos que para cada k real existen dos soluciones distintas y cada una de ellas se define en el intervalo $(-\infty, k)$. Como habíamos dicho, tanto la solución como su derivada no se anulan en ningún punto.

Ejercicio 2

a) $x(t) = \frac{t}{\log|t| - k}$.

b) $x(t) = -t \pm \sqrt{k + 2t^2}$.

Ejercicio 3

a)
1) $x(t) = ke^{-\operatorname{sen}(t)}$ con $k \in \mathbb{R}$.
2) $x(t) = kt(t-1)$ con $k \in \mathbb{R}$.
3) $x(t) = kt^2$ con $k \in \mathbb{R}$

b)
1) $x(t) = ke^{-\operatorname{sen}(t)} + \operatorname{sen}(t) - 1$ con $k \in \mathbb{R}$
2) $x(t) = kt(t-1) + t$ con $k \in \mathbb{R}$.
3) $x(t) = kt^2 + \frac{1}{3}t^5$ con $k \in \mathbb{R}$

Ejercicio 4

a)
a) La solución general es $x(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{2t}$
b) La solución general es $x(t) = c_1 + c_2e^{-t}$
c) La solución general es $x(t) = c_1e^{-2t}\cos(t) + c_2e^{-2t}\operatorname{sen}(t)$

b)
a) Para las condiciones iniciales $x(1) = e^2$, $x'(1) = 3e^2$, tenemos $c_1 = \frac{1}{e}$ y $c_2 = 0$. Es decir $x(t) = \frac{1}{e}e^{3t}$.
b) La solución general es $x(t) = c_1e^{5t} + c_2e^t$. Para las condiciones iniciales $x(0) = 3$, $x'(0) = 11$, tenemos $c_1 = 2$ y $c_2 = 1$. Es decir $x(t) = 2e^{5t} + e^t$.
c) Para las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, tenemos $c_1 = 1$ y $c_2 = 2$. Es decir $x(t) = 2e^{-2t}\cos(t) + e^{-2t}\operatorname{sen}(t)$.
d) La solución general es $x(t) = c_1e^t + c_2e^{-9t}$ Para las condiciones iniciales $x(1) = 2$, $x'(1) = 0$, tenemos $c_1 = \frac{9}{5e}$ y $c_2 = \frac{e^9}{5}$. Es decir $x(t) = \frac{9}{5e}e^t + \frac{e^9}{5}e^{-9t}$.

Ejercicio 5

Solución: $a = -2$ y $a = 1$.
Veamos en detalle el ejercicio:

Buscamos los valores de a para los cuales las siguientes ecuaciones tienen soluciones comunes (además de la función nula):

$$\text{I) } x'' + ax' - 2x = 0, \qquad \text{II) } x'' - 2x' + ax = 0$$

Observación: El conjunto de soluciones de cada una de las ecuaciones es un espacio vectorial de dimensión 2. Por lo tanto, la intersección de estos espacios (las soluciones comunes) será también un espacio vectorial cuya dimensión podrá ser 0, 1 *o* 2. *El caso de dimensión* 0 *es cuando ambos tienen como única solución en común* $x = 0$, *el caso de dimensión* 1 *es cuando existe cierta* x_c *solución común no nula y por lo tanto todos sus múltiplos. El caso de dimensión* 2 *es cuando todas las soluciones son comunes.*

Vemos que si $a = -2$, ambas ecuaciones resultan ser la misma, y por lo tanto tendrán las mismas soluciones. El polinomio característico de ambas ecuaciones es $\lambda^2 - 2\lambda - 2$, cuyas raíces son $\lambda = 1 \pm \sqrt{3}$. Por lo tanto, las soluciones se escriben como

$$x(t) = c_1e^{t(1+\sqrt{3})} + c_2e^{t(1-\sqrt{3})} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Supongamos ahora que $a \neq -2$ y que x_c es una solución común. Entonces,

$$x_c'' + ax_c' - 2x_c = 0 = x_c'' - 2x_c' + ax_c$$

$$\Rightarrow (a+2)x_c' = (a+2)x_c$$

$$\Rightarrow x_c(t) = ke^t, \ \ k \in \mathbb{R}$$

Hasta ahora concluímos que para que exista una solución común necesariamente tiene que ser múltiplo de e^t. Esto implica que 1 tiene que ser raíz, simultáneamente, de los polinomios característicos asociados a cada una de las ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 + a - 2 & = 0 \\ 1 - 2 + a & = 0 \end{cases}$$

De donde obtenemos que necesariamente $a = 1$ y las soluciones comunes son el subespacio vectorial generado por e^t, es decir, $x_c(t) = ke^t$ con $k \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 6

Solución: $a = -3$.
Las soluciones se pueden escribir como $x(t) = c_1e^{2t} + c_2e^t$, donde c_1 y c_2 son constantes reales.
Para la condiciones iniciales $x(0) = 1 = x'(0)$, tenemos $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$. Es decir $x(t) = e^t$.

Resumen de prueba:
Para hallar el valor de a basta con ver que 1 tiene que ser raíz del polinomio característico.
Conocido el valor de a, por métodos ya conocidos, se hallan las soluciones.

Ejercicio 7

Solución: $a = -4$ y $b = 5$.
La solución general de la ecuación es $x(t) = c_1e^{2t}\cos(t) + c_2e^{2t}\operatorname{sen}(t)$.
Para las condiciones iniciales $x(0) = 1 = x'(0)$, tenemos $c_1 = 1$ y $c_2 = -1$.
Es decir $x(t) = e^{2t}\cos(t) - e^{2t}\operatorname{sen}(t)$

Resumen de prueba:
Para hallar los valores de a y b basta con observar que $(2 + i)$ y $(2 - i)$ son raíces del polinomio característico, y por lo tanto este se escribe como $\big(\lambda - (2 + i)\big)\big(\lambda - (2 - i)\big) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$.

Luego se halla la solución general por métodos conocidos y en función de las condiciones iniciales se calculan las constantes c_1 y c_2.

Ejercicio 8

Denotaremos en este ejercicio a x_H como solución a la ecuación homogénea (es decir a la ecuación igualada a 0), y como x_p a una solución particular de la ecuación. Recordamos que una solución general se puede escribir como $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$.

Si bien hay casos en los que podemos formular expresiones genéricas para soluciones particulares en una ecuación $x(t)'' + ax(t)' + bx(t) = c(t)$, una buena opción es buscar candidatos "similares" a $c(t)$. Por ejemplo, si $c(t)$ es una función trigonométrica, buscamos funciones trigonométricas como posible solución, si es un polinomio buscamos un polinomio como solución, etc.

En todos los incisos de este ejercicio, las condiciones iniciales son $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

a) $x_H(t) = c_1e^{-t}\cos(t) + c_2e^{-t}\operatorname{sen}(t)$.
$x_p(t) = \frac{-1}{10}\cos(2t) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(2t)$
Para las c.i dadas, $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$ tomando $c_1 = 1 + \frac{1}{10}$ y $c_2 = 1 - \frac{3}{10}$

b) $x_H(t) = c_1e^{-t}\cos(t) + c_2e^{-t}\operatorname{sen}(t)$.
$x_p(t) = \frac{-1}{5}\cos(2t) - \frac{1}{10}\operatorname{sen}(2t)$
Para las c.i dadas, $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$ tomando $c_1 = 1 + \frac{1}{5}$ y $c_2 = 1 + \frac{2}{5}$

c) $x_H(t) = c_1e^{-t}\cos(t) + c_2e^{-t}\operatorname{sen}(t)$.
$x_p(t) = \frac{-3}{10}\cos(2t) + \frac{1}{10}\operatorname{sen}(2t)$
Para las c.i dadas, $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$ tomando $c_1 = 1 + \frac{3}{10}$ y $c_2 = 1 + \frac{1}{10}$

d) $x_H(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t)$.
$x_p(t) = 3t^2 - 5t - 6$
Para las c.i dadas, $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$ tomando $c_1 = 7$ y $c_2 = 5$

e) $x_H(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$.
$x_p(t) = \frac{3}{8} e^t + \frac{1}{3} t - \frac{4}{9}$
Para las c.i dadas, $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$ tomando $c_1 = \frac{5}{4}$ y $c_2 = \frac{-13}{72}$

f) $x_H(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t)$.
$x_p(t) = t^2 + 2t - 1$
Para las c.i dadas, $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$ tomando $c_1 = 2$ y $c_2 = -2$

Veamos en detalle el ejercicio **8b)**:
(b) Buscamos una solución, con condiciones iniciales dadas, a la siguiente ecuación:

$$x'' + 2x' + 2x = \operatorname{sen}(2t)$$

Primero buscamos una solución a la ecuación homogénea. Para ello, buscamos las raíces del polinomio característico $\lambda^2 + 2\lambda + 2$. Estas son $-1 \pm i$, por lo que la solución a la homogénea es

$$x_H(t) = c_1 e^{-t} \cos(t) + c_2 e^{-t} \operatorname{sen}(t)$$

Luego buscamos una solución particular. En este caso probaremos con buscar alguna de la forma $x_p(t) = a\cos(2t) + b \operatorname{sen}(2t)$ con a, b constantes.

Como $x_p'(t) = 2b\cos(2t) - 2a\operatorname{sen}(2t)$ y $x_p''(t) = -4a\cos(2t) - 4b\operatorname{sen}(2t)$, x_p es solución si se cumple lo siguiente:

$$\Big(-4a\cos(2t) - 4b\operatorname{sen}(2t)\Big) + 2\Big(2b\cos(2t) - 2a\operatorname{sen}(2t)\Big) + 2\Big(a\cos(2t) + b\operatorname{sen}(2t)\Big) = \operatorname{sen}(2t)$$

Dicha igualdad se cumple si y solo si a, b verifican

$$\begin{cases} -2a + 4b & = 0 \\ -4a - 2b & = 1 \end{cases}$$

De aquí concluímos que tomando $a = \frac{-1}{5}$ y $b = \frac{-1}{10}$, la función x_p es solución particular:

$$x_p(t) = \frac{-1}{5}\cos(2t) - \frac{1}{10}\sin(2t)$$

Por lo tanto, podemos escribir a la solución general de la ecuación:

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t) = c_1 e^{-t}\cos(t) + c_2 e^{-t}\operatorname{sen}(t) + \frac{-1}{5}\cos(2t) - \frac{1}{10}\operatorname{sen}(2t)$$

Las condiciones iniciales son $x(0) = 1, x'(0) = 0$. Buscamos las constantes c_1 y c_2 que determinan la solución que verifica dichas condiciones iniciales.

$$\begin{cases} 1 & = x(0) & = c_1 - \frac{1}{5} \\ 0 & = x'(0) & = -c_1 + c_2 - \frac{1}{5} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, concluímos que los valores de las constantes son $c_1 = 1 + \frac{1}{5}$ y $c_2 = 1 + \frac{2}{5}$

Ejercicio 9

En este ejercicio denotamos por v a la función velocidad, dependiente del tiempo t.

a) $v(t) = ce^{\frac{-k}{m}t} + \frac{mg}{k}$ con $c = V_0 - \frac{mg}{k}$.

b) $\lim_{t\to+\infty} v(t) = v_\infty = \frac{mg}{k}$

c) El tiempo que se demora es $T_f = \frac{m}{k}log(2)$

d) La distancia recorrida es $\Delta x = x(T_f) - x(0) = \int_0^{T_f} x'(s)ds = \int_0^{T_f} v(s)ds = \frac{m^2 g}{k^2}\big(\log(2) - \frac{1}{2}\big)$

Veamos en detalle este ejercicio:

(a) La ecuación diferencial en cuestión es

$$v' + \frac{k}{m}v = g$$

Primero, buscamos la solución general a la ecuación homogénea (ver ejercicio 3):

$$v_H(t) = ce^{\frac{-k}{m}t}$$

Donde c es una constante arbitraria.

Luego, buscamos una solución particular. En este caso, podemos corroborar fácilmente que admite una solución constante cuyo valor se despeja de la ecuación diferencial:

$$v_p(t) = \frac{mg}{k}$$

Por lo tanto la solución general se escribe como $v(t) = ce^{\frac{-k}{m}t} + \frac{mg}{k}$. Como $v(0) = v_0 = c + \frac{mg}{k}$, despejando escribimos a c en función de v_0 y por lo tanto podemos escribir a una solución en función de su condición inicial (en este caso velocidad inicial):

$$v(t) = \Big(v_0 - \frac{mg}{k}\Big)e^{\frac{-k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

(b)

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty} \Big(v_0 - \frac{mg}{k}\Big)e^{\frac{-k}{m}t} + \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k} = v_\infty$$

(c) Llamamos T_f al tiempo que se demora en alcanzar la velocidad $\frac{v_\infty + v_0}{2}$. Entonces:

$$v(T_f) = \Big(v_0 - \frac{mg}{k}\Big)e^{\frac{-k}{m}T_f} + \frac{mg}{k} = \frac{mg/k + v_0}{2}$$

Luego, $(v_0 - \frac{mg}{k})e^{\frac{-k}{m}T_f} = (v_0 - \frac{mg}{k})\frac{1}{2} \Rightarrow e^{\frac{-k}{m}T_f} = \frac{1}{2}$, por lo tanto

$$T_f = \frac{-m}{k}\log(1/2) = \frac{m}{k}\log(2)$$

(d) Si escribimos como $x(t)$ a la posición del cuerpo, entonces su velocidad es $x'(t) = v(t)$. Consideramos a 0 el tiempo inicial, y T_f el tiempo transcurrido hasta que se alcanza una velocidad $\frac{v_\infty + v_0}{2}$. Suponemos, como dice la letra, que $v_0 = 0$. Queremos hallar la distancia recorrida: $\Delta x = x(T_f) - x(0)$

Por el teorema fundamental del cálculo, $x(T_f) - x(0) = \int_0^{T_f} x'(s)ds = \int_0^{T_f} v(s)ds$. Entonces

$$\Delta x = \int_0^{T_f} \Big(\frac{-mg}{k}e^{\frac{-k}{m}s} + \frac{mg}{k}\Big)ds = \Big(\frac{m^2 g}{k^2}e^{\frac{-k}{m}s} + \frac{mgs}{k}\Big)\Big|_0^{T_f} = \frac{mg}{k}\Big(\frac{m}{k}e^{\frac{-k}{m}T_f} + T_f - \frac{m}{k}\Big)$$

Como vimos en c), $T_f = \frac{m}{k}\log(2)$. Por lo tanto

$$\Delta x = \frac{mg}{k}\Big(\frac{m}{k}\frac{1}{2} + \frac{m}{k}\log(2) - \frac{m}{k}\Big) = \frac{m^2 g}{k^2}\Big(\log(2) - \frac{1}{2}\Big)$$

Ejercicio 10

a) Sea φ una solución de la ecuación diferencial no constante.

Por lo tanto tenemos que $0 = \varphi'(t) = \alpha\varphi(t)(A - \varphi(t))$ pasa si y solamente si $\varphi(t) = 0$ o $\varphi(t) = A$. Se sigue, usando la unicidad de las soluciones, que como φ no es una solución constante, no puede tomar los valores 0 ni A.

b) Sea $\varphi_{A/2}$ la solución de condiciones iniciales $x(0) = A/2$.

Entonces $\lim_{t \to +\infty} \varphi_{A/2}(t) = \begin{cases} 0 & si \quad \alpha > 0 \\ A & si \quad \alpha < 0 \end{cases}$

c) Por lo visto en la parte anterior, para que la población presente crecimiento tenemos que tener $\alpha < 0$.

Tenemos entonces que $t = \frac{\log(3/4)}{\alpha A}$.

Ejercicio 11

En este ejercicio denotamos por u a la función "cantidad de agua", dependiente del tiempo t.

a) $u(t) = \frac{1}{\lambda t^2 + \frac{1}{u_0}}$

b) $\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0$

c) Para que $u(T) = u_1 < u_0$, se necesita $\lambda = \frac{1}{T^2}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_0}\right)$

d) $\lambda = \frac{1}{150}$

Ejercicio 12

Recordar que a la ecuación diferencial $x'' + ax' + bx = 0$ con a, b constantes, le asociamos el polinomio característico $\lambda^2 + a\lambda + b$. En función de las raíces de dicho polinomio escribimos la solución general a la ecuación:

- *α y β raíces reales distintas: $x(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\beta t}$*
- *α raíz doble: $x(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\alpha t}$*
- *$a \pm ib$ raíces complejas conjugadas: $x(t) = c_1 e^{at}\cos(bt) + c_2 e^{at}\sin(bt)$*

  Donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

a) I) $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{t}$ solución general.
x_1 corresponde a los valores $c_1 = -1$, $c_2 = 2$
x_2 corresponde a los valores $c_1 = 1$ y $c_2 = -1$.

II) $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$ solución general.
x_1 corresponde a los valores $c_1 = 1$, $c_2 = 2$
x_2 corresponde a los valores $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$.

III) $x(t) = c_1 e^{\frac{-t}{2}}\cos(\frac{t}{2}) + c_2 e^{\frac{-t}{2}}\sin(\frac{t}{2})$ solución general.
x_1 corresponde a los valores $c_1 = 1$, $c_2 = 1$
x_2 corresponde a los valores $c_1 = 0$ y $c_2 = 2$.

b) Basta con corroborar que, para cualquiera de los casos, $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ es solución del problema con $x(0) = a$, $x'(0) = b$ (es decir, hay que verificar que cumple la ecuación diferencial y que tiene dichas condiciones iniciales).

c) Esta conclusión es inmediata a partir de b): Toda solución de la ecuación diferencial es una combinación lineal de dos vectores linealmente independientes del espacio de soluciones (que es un espacio vectorial).

Veamos en detalle el ejercicio **12a)** correspondiente a la ecuación I:
(a) La ecuación a estudiar es
$$x'' - 3x' + 2x = 0$$
Su polinomio característico es $\lambda^2 - 3\lambda + 2$, cuyas raíces son 2 y 1. Por lo tanto, la solución general se escribe como
$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t$$

Dadas las condiciones iniciales, buscamos los únicos valores c_1 y c_2 para los cuales la solución verifica dichas condiciones.

Primero buscamos la solución $x_1(t)$ que cumple $x_1(0) = 1$ y $x_1'(0) = 0$. Observamos que $x'(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^t$. Entonces:

$$\begin{cases} x_1(0) & = 1 & = c_1 + c_2 \\ x_1'(0) & = 0 & = 2c_1 + c_2 \end{cases}$$

De donde se concluye que $c_1 = -1$ y $c_2 = 2$

Ahora buscamos la solución $x_2(t)$ que cumple $x_2(0) = 0$ y $x_2'(0) = 1$. De forma análoga obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_2(0) & = 0 & = c_1 + c_2 \\ x_2'(0) & = 1 & = 2c_1 + c_2 \end{cases}$$

De donde se concluye $c_1 = 1$ y $c_2 = -1$.
Entonces
$$\begin{cases} x_1(t) = -e^{2t} + 2e^t \\ x_2(t) = e^{2t} - e^t \end{cases}$$

Por último, es claro que las funciones x_1 son x_2 son linealmente independientes (es decir, que una no es múltiplo de la otra). Una forma fácil de ver esto es encontrar un punto (en este caso, por ejemplo, $t = 0$) en la cual una se anula y la otra no. Formalmente: si existiera $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $x_1 = \alpha x_2$ (es decir, $x_1(t) = \alpha x_2(t)$ para todo t), entonces $1 = x_1(0) = \alpha x_2(0) = \alpha 0 = 0$, que es una contradicción.

Otra forma de pensar esto: Las funciones e^{2t} y e^t son claramente vectores l.i en el espacio vectorial formado por las soluciones de la ecuación diferencial, más aún, son una base (ver teórico). Por lo tanto, x_1 y x_2 no son más que combinaciones lineales de elementos de esta base. En concreto, las coordenadas de x_1 en esta base ordenada son $(-1, 2)$, y las coordenadas de x_2 son $(1, -1)$. Por lo tanto, para ver que x_1 y x_2 son l.i, alcanza con ver que $\{(-1, 2), (1, -1)\}$ es un conjunto l.i.