

# Trabajo Final de Análisis y Control de Sistemas no Lineales Control Geométrico de un quadrotor UAV en SE(3)

Leopoldo Agorio

9 de agosto de 2020

## Resumen

El presente trabajo se dedica a la comprensión del artículo *Geometric Tracking Control of a Quadrotor UAV on SE(3)* [1] utilizando herramientas aprendidas en el curso de CNL. El artículo modela el seguimiento o *tracking* para un quadrotor UAV, es decir, lograr que el vuelo de dron se aparte lo menos posible de una trayectoria deseada. El control se hace a través de un modelado geométrico del problema en espacio de matrices. Fue posible entender la matemática geométrica así como la prueba basada en Lyapunov para el desvanecimiento asintótico del error de *tracking* angular.

## 1. Introducción

Como proyecto monográfico de la asignatura Análisis y Control de Sistemas no Lineales, me propongo trabajar sobre el artículo [1]. Dicho artículo es de gran importancia para mi Maestría en Ingeniería Eléctrica, para la cual me propongo implementar en la práctica algoritmos en drones. Si bien en principio no tengo planes de modificar el control de vuelo incorporado, explorar el funcionamiento permite una comprensión más acabada del problema general.

El artículo introduce el modelo geométrico del quadrotor, procede a definir los errores en posición, velocidad, actitud (rotación) y velocidad de giro, y luego define un controlador realimentando estos errores. Como anexo del artículo se demuestra que el controlador propuesto tiene propiedades de convergencia y garantiza bajo ciertas hipótesis el desvanecimiento del error de *tracking*.

En este trabajo se explican los conceptos desarrollados en el artículo, profundizando a partir de otras fuentes en el modelado geométrico del problema [2] y el manejo de diferenciales[3]. Por último se explica la prueba de convergencia basada en Lyapunov, para la cual se recurrió a los trabajos de tesis doctoral de los autores[4] [5]. La estructura del trabajo es la siguiente:

En la Sección 2 y Sección 3 se detallan los fundamentos matemáticos estudiados para entender el modelo, a saber: La formulación de la mecánica rígida desde un enfoque geométrico matricial, y el cálculo de diferenciales en este contexto. En la Sección 4 se formula el problema de estudio y se presenta el modelo a utilizar. La Sección 5 define el problema de seguimiento, los errores asociados y el controlador propuesto. En la Sección 6 se realiza la prueba de estabilidad para el *tracking* de actitud. En la Sección 7 se comentan otros resultados interesantes del artículo así como simulaciones llevadas adelante en este. Por último la Sección 8 corresponde con las conclusiones y la Sección 9 con el anexo, donde se realizan la mayoría de las pruebas matemáticas.

## 2. Fundamento matemático: Mecánica geométrica para cuerpos rígidos

Esta sección resume la teoría necesaria extraída del libro *Geometric mechanics and symmetry: from finite to infinite dimensions* [2] para modelar la dinámica geométrica de un cuerpo rígido.

Para esto, se fija un sistema de coordenadas inercial, llamado el **sistema de coordenadas espacial**, cuyo origen se ubica en el centro de masa del objeto (el sistema es fijo en el entendido que no rota, pero sí acompaña traslacionalmente al centro de masa). La posición y velocidad de una partícula dada del cuerpo en el tiempo

$t$  se denotan  $x(t)$  y  $\dot{x}(t)$ . Ambos son vectores de coordenadas en  $\mathbb{R}^3$ . También fijamos una **configuración de referencia** para el cuerpo (sistema del cuerpo o *body-based*). La posición de una partícula dada cuando el cuerpo se encuentra en la configuración de referencia es denotada  $X$  y se conoce como la **etiqueta** de la partícula.

De esta forma, la configuración del cuerpo en un tiempo  $t$  queda determinada por una matriz de rotación  $R(t)$  que lleva cada etiqueta  $X$  a la posición  $x(t)$  (in coordenadas espaciales) de la partícula correspondiente en tiempo  $t$ .

$$x(X, t) = R(t)X \quad (1)$$

Esto se ilustra en la Figura 1. En lo que sigue, se suprime por simplicidad la dependencia de  $x$  con su la etiqueta  $X$  que persigue. Para un instante particular  $t$ , el mapa  $X \mapsto x = RX$  se conoce como el mapa *body-to-space* y consiste de la rotación  $R$ .

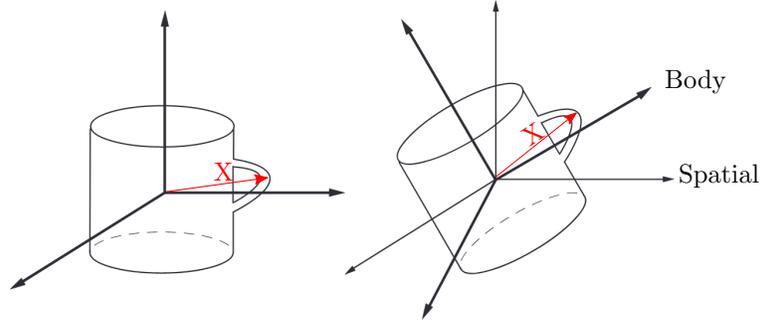


Figura 1: En la primer figura se ve un cuerpo en la configuración de referencia, cuando el sistema de coordenadas espacial y el *body base* coinciden. En la segunda figura se observa el sistema espacial -fijo- y el sistema *body-based* que acompaña al cuerpo. Las coordenadas *body*  $X$  de una partícula (por ejemplo un punto del asa) permanecen siempre fijas mientras que las coordenadas espaciales  $x$  de esa misma partícula varían a medida que el cuerpo se mueve.

Fuente de figura: [2], modificada.

La matriz  $R$  es una matriz de rotación perteneciente al espacio de matrices ortogonales  $SO(3)$ , por lo que verifica  $R^T = R^{-1}$ . Además, para cada instante de tiempo  $t$  existe un único **vector de velocidad angular**  $\omega(t)$  tal que cualquier partícula del cuerpo rígido verifica

$$\dot{x} = \omega \times x \quad (2)$$

Esta ecuación está expresada en coordenadas espaciales, es decir,  $\omega$  es el vector de velocidad angular *espacial*. Es de interés llegar a una expresión que involucre las derivadas temporales de  $R$ . Para esto, se parte de  $x = RX$  y utilizando que las etiquetas son invariantes en el tiempo, se tiene:

$$\dot{x} = \dot{R}X = \dot{R}R^{-1}x = \dot{R}R^T x \quad (3)$$

A su vez, para todo tiempo la matriz  $R$  satisface  $RR^T = I$ , de donde al derivar temporalmente y aplicar la regla del producto se obtiene:

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0$$

es decir,  $\dot{R}R^T$  es una matriz anti-simétrica (notaremos  $\dot{R}R^T \in \mathfrak{so}(3)$ ) por lo que necesariamente tiene la siguiente estructura:

$$\dot{R}R^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde definiendo  $\omega := [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$  se verifica directamente que :

$$\dot{x} = \dot{R}R^T x = \omega \times x$$

Lo que induce la introducción del *hat map* (mapa gorro), que mapea el vector  $\omega$  a su matriz  $\mathfrak{so}(3)$  asociada

$$\hat{\omega} := \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Se define también el operador inverso *vee map* (mapa ve) que mapea una matriz antisimétrica a un vector  $((\hat{\omega})^\vee = \omega)$ .

Con esta notación, se ve que

$$\dot{R}R^T = \hat{\omega} \quad (5)$$

Entendiendo que multiplicar a la izquierda por  $R$  lleva a un vector de coordenadas *body* a espaciales y multiplicar a la izquierda por  $R^{-1} = R^T$  lo lleva de coordenadas espaciales a *body*, introducimos la velocidad angular solidaria al cuerpo (*body angular velocity*)  $\Omega = R^{-1}\omega$ .<sup>1</sup> Es posible plantear el producto vectorial  $\Omega \times X$  y analizar el resultado:

$$\Omega \times X = R^{-1}\omega \times R^{-1}x = R^{-1}(\omega \times x) = R^{-1}\dot{R}R^{-1}x = R^{-1}\dot{R}X$$

para la segunda igualdad se utilizó la propiedad de la Subsección 9.1. De la deducción se desprende  $\hat{\Omega} = R^{-1}\hat{R}$  o, análogamente

$$\dot{R} = R\hat{\Omega} \quad (6)$$

Nota: la velocidad angular propia (*body based*)  $\Omega$  es la que permite definir el momento de inercia y demostrar la segunda ecuación cardinal de la mecánica. Esto es:

$$L := J\Omega$$

donde  $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de inercia del cuerpo (calculable en la base *body based* e invariante en el tiempo). La segunda ecuación cardinal es la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt}L = J\dot{\Omega} + \Omega \times J\Omega = M \quad (7)$$

Donde  $M$  es el momento de fuerzas total en el sistema *body-based*.

Más propiedades del uso del operador gorro son demostradas en la Subsubsección 9.1.1 y utilizadas a lo largo de varias pruebas.

### 3. Fundamento matemático: Manejo de diferenciales en $SO(3)$

Ya que trabajaremos sobre una función  $\Psi(R, R_d) : SO(3) \times SO(3) \mapsto \mathbb{R}$ , es necesario clarificar el concepto de *derivada* en ese contexto. Para esto se debe definir el diferencial de un *smooth map* (en español usaremos el anglicismo *mapa suave*).

La intuición del diferencial es que lleva el espacio tangente en el dominio de origen al espacio tangente en el dominio de llegada. En términos más exactos, dado un mapa suave  $\varphi : M \mapsto N$  entre las variedades  $M$  y  $N$  y un punto  $x \in M$  (cuya imagen es  $\varphi(x) \in N$ ), el diferencial de  $\varphi$  en  $x$  es un mapa *lineal* entre los espacios tangentes:

$$D_x\varphi : T_xM \mapsto T_{\varphi(x)}N$$

Esto se muestra esquemáticamente en la Figura 2. A su vez, los vectores tangentes (a  $M$  en  $x$ ) que definen el espacio tangente son las derivadas de las curvas contenidas en  $M$  que pasan por  $x$ . De esta manera, una definición operativa para el diferencial es:

$$D_x\varphi\gamma'(0) = (\varphi \circ \gamma)'(0) \quad (8)$$

---

<sup>1</sup>Es preciso remarcar que la velocidad angular solidaria al cuerpo es el vector de velocidad angular como fue definido en el sistema de coordenadas espacial y *luego* convertido a coordenadas *body*. Esto *no* es equivalente a escribir la Ecuación 2 en las coordenadas solidarias al cuerpo, ya que  $\dot{X} = \Omega \times X = 0$  llevaría a  $\Omega = 0$  dado que las etiquetas son constantes en el tiempo.

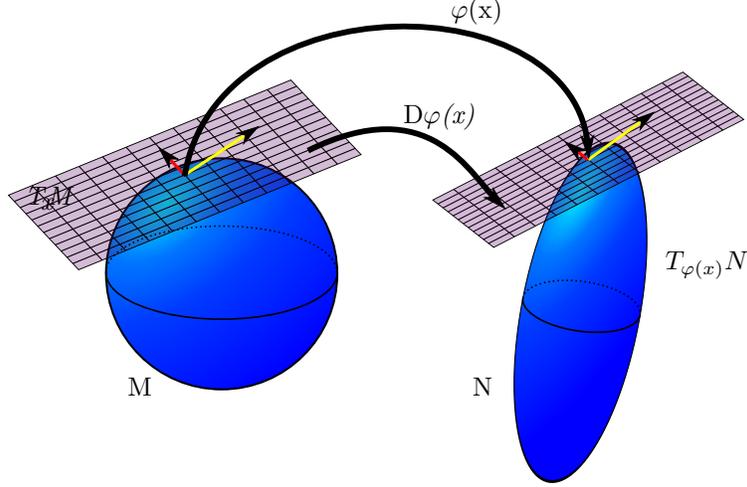


Figura 2: Dado un mapa  $\varphi$  que lleva cada punto de la variedad  $M$  a la variedad  $N$ , el diferencial  $D_x\varphi$  lleva vectores del espacio tangente de  $M$  en  $x$  a vectores en el espacio tangente de  $N$  en  $\varphi(x)$ .

*Fuente de figura:* Figura de licencia libre de wikipedia/Pushforward(differential)

donde  $\gamma$  es una curva que pasa por  $x$  en el instante  $t = 0$  (no se pierde generalidad por definir este instante). Hay varias formulaciones análogas de la Ecuación 8, particularmente nos interesa notar  $v = \gamma'(0)$  al vector tangente a ser mapeado por el diferencial, y abusando de notación, si  $\gamma(t) = x(t)$  resulta la expresión:

$$D_x\varphi v = \frac{d}{dt}\varphi(x(t))$$

Utilizando esta conveniente notación para nuestro problema de estudio, resulta

$$D_R\Psi v = \frac{d}{dt}\Psi(R(t))$$

Es decir, dada una curva  $R(t)$  en el espacio de matrices ortogonales  $SO(3)$ , el diferencial asociado a un vector tangente  $v$  (perteneciente al espacio tangente de  $SO(3)$  que como ya veremos son las matrices de la forma  $R\hat{\eta}$ , con  $R$  ortogonal y  $\eta$  vector) es la derivada temporal del mapeo a  $\mathbb{R}$  dado por  $\Psi(R(t))$ .

### 3.1. Vectores tangentes en $SO(3)$

Primero es instructivo estudiar el espacio tangente asociado a una curva  $\gamma : \mathbb{R} \mapsto SO(3)$  que verifica  $\gamma(t = 0) = I_{3 \times 3}$ . Debido a que en cualquier instante se verifica que  $\gamma(t)$  es ortogonal, tenemos

$$\gamma(t)^T \gamma(t) = I_{3 \times 3}$$

de donde derivando y aplicando regla del producto:

$$\gamma(t)^T \gamma'(t) + \gamma'(t)^T \gamma(t) = 0$$

por último de evaluar en 0,

$$v = \gamma'(0) = -\gamma'(0)^T$$

es decir, el vector tangente, que habíamos definido como la derivada de la curva en 0 pertenece a  $\mathfrak{so}(3)$ . Con la definición del operador gorro de la Sección 2, es posible definir  $\gamma'(0) = \hat{\eta}$  para algún vector  $\eta$

Sin embargo, nos interesa el caso  $\delta(t = 0) = R$ , con  $R \in SO(3)$ . Para esto basta ver que de tomar  $\delta(t) = R\gamma(t)$  derivar y evaluar en 0 se obtiene:

$$\delta'(0) = R\gamma'(0) = R\hat{\eta}$$

Es decir, los vectores del espacio tangente a  $R$  son de la forma  $R\hat{\eta}$ .

### 3.2. Volviendo al problema de $\Psi$

Con todo lo anterior resulta que el diferencial asociado a  $\Psi$  en  $R(t)$  para el vector tangente  $v$  de la forma  $v = R\hat{\eta} = \dot{R}(t)$  es el dado por:

$$D_R\Psi R\hat{\eta} = \frac{d}{dt}\Psi(R(t))$$

Se llega a una expresión para esta derivada en la Subsección 9.2.

## 4. Definición del problema

Para el problema de control de vuelo es necesario modelar la dinámica del quadrotor. El sistema de quadrotor se ilustra en la Figura 3. El mismo consiste en cuatro rotores propulsores idénticos localizados en los vértices de un cuadrado que son capaces de generar empuje y torque normal al plano del cuadrado. Los rotores 1 y 3 giran en sentido horario mientras que los 2 y 4 giran en sentido antihorario.

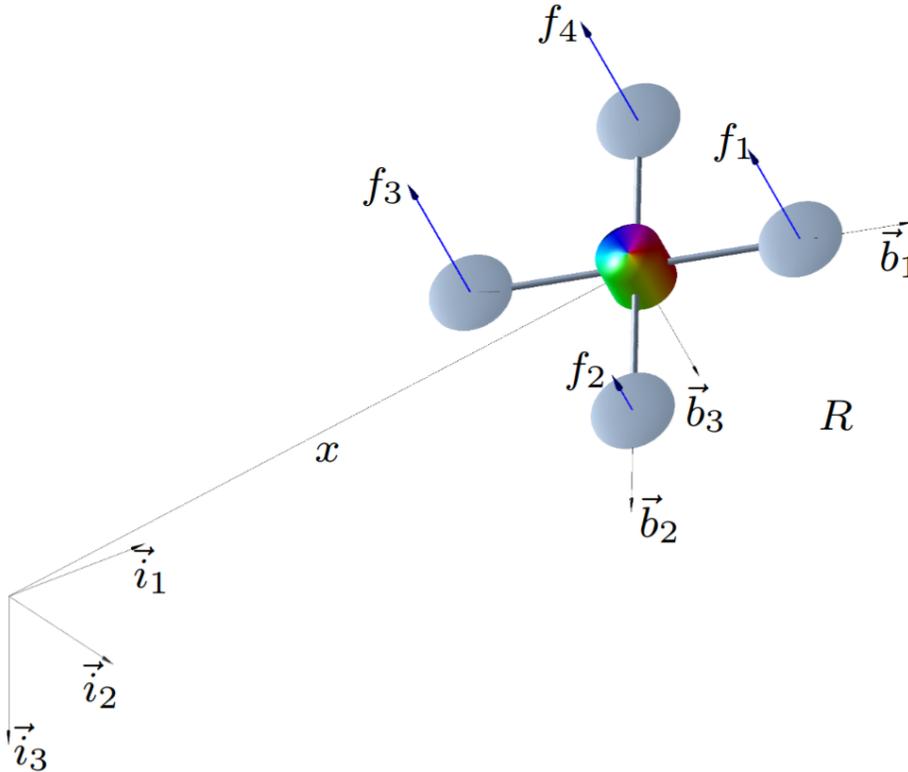


Figura 3: Diagrama mostrando los sistemas de referencia con los que se trabajará y cantidades relevantes del modelo.

Fuente de figura: [1].

Es necesario definir un marco de referencia inercial  $\{i_1, i_2, i_3\}$  y un marco de referencia centrado en el cuerpo (*body based/body fixed*)  $\{b_1, b_2, b_3\}$  que acompaña al dron. Los primeros dos ejes del referencial *body* yacen en el plano definido por los centros de los rotores y el tercer eje es normal a este plano y apunta hacia abajo (contrario a la dirección del empuje), como se ilustra en la misma figura.

Se definen:

- $m \in \mathbb{R}$  es la masa del dron,  $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  la matriz de inercias propia y  $d \in \mathbb{R}$  es la distancia del centro de masa a cualquiera de los rotores.

- $x, v, \Omega \in \mathbb{R}^3$  son -respectivamente- la posición del centro de masa en el sistema inercial, la velocidad del centro de masa en el sistema inercial, la velocidad angular en el sistema *body* (ver definición exacta en Sección 2)
- $R \in SO(3)$  es la matriz de rotación del referencial *body-fixed* al inercial. Es una matriz ortogonal que consiste en los vectores  $b_i$  colgados (es decir,  $Re_i = b_i$  con  $e_i$  el versor canónico). A la posición del referencial propio del dron respecto al inercial se la conoce como actitud, y a  $R$  nos referiremos también como matriz de actitud.
- $f_i \in \mathbb{R}$  es el empuje generado por cada propulsor según el eje  $-b_3$ .  $f = \sum_{i=1}^4 f_i$  es el empuje total.
- $M \in \mathbb{R}^3$  es el momento de torques total en el referencial *body-fixed*.

#### 4.1. Dinámica rígida del problema

De acuerdo a las definiciones anteriores, el empuje total expresado en el sistema inercial resulta ser  $-fRe_3 \in \mathbb{R}$ . Por otra parte, se asume que el torque generado por cada propulsor es proporcional al empuje generado (dicha constante de proporcionalidad se llamará  $c$ ). De esta manera, y contemplando los sentidos de giro de los rotores, se tiene el siguiente modelo para el torque generado en el eje 3:

$$M_3 = -cf_1 + cf_2 - cf_3 + cf_4$$

Los momentos en los otros ejes salen directamente de la consideración del torque de las fuerzas de empuje. De aquí que resulta:

$$\begin{bmatrix} f \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -d & 0 & d \\ d & 0 & -d & 0 \\ -c & c & -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

Ya que la matriz anterior tiene por determinante  $8cd^2$ , es invertible y es posible despejar los empujes por motor  $f_i$  para un empuje total  $f$  y un momento total  $M$  dado. De aquí que de ahora en más se consideran  $f$  y  $M$  como las entradas del sistema de control a estudiar.

Finalmente, las ecuaciones que gobiernan la dinámica del cuerpo rígido son:

$$\dot{x} = v \tag{9}$$

$$m\dot{v} = mge_3 - fRe_3 \tag{10}$$

$$\dot{R} = R\hat{\Omega} \tag{11}$$

$$J\dot{\Omega} + \Omega \times J\Omega = M \tag{12}$$

Donde 9 es cinemática, 10 es balance de fuerzas, 12 es balance de torques y 11 es la evolución de la matriz de actitud desarrollada en la Sección 2.

### 5. Control Geométrico

El problema es el de seguir una trayectoria predefinida (comando), que es definida instante a instante por la posición comandada/deseada  $x_d(t)$  y la dirección deseada del eje principal  $b_{1_d}(t)$  del quadrotor. Esto define en principio un sistema de 6 grados de libertad, pero como se verá, se optará por priorizar el comando de posición reduciendo el problema a 4 grados de libertad.

La dinámica traslacional se controla a través del empuje total  $-fRe_3$ . Dado un comando de posición  $x_d(t)$ , se elige la dirección del eje 3 del dron de manera de estabilizar esta dinámica. Llamaremos a este eje elegido  $b_{d_3}$ . Se utiliza el subíndice  $d$  a pesar de que  $b_{d_3}$  no es un comando en sentido estricto. La matriz de actitud deseada  $R_d = [b'_{1_d}, b_{2_d}, b_{3_d}]$  se define de manera tal de estabilizar la dinámica traslacional y a su vez contemplar el comando  $b_{1_d}$ , como se verá.

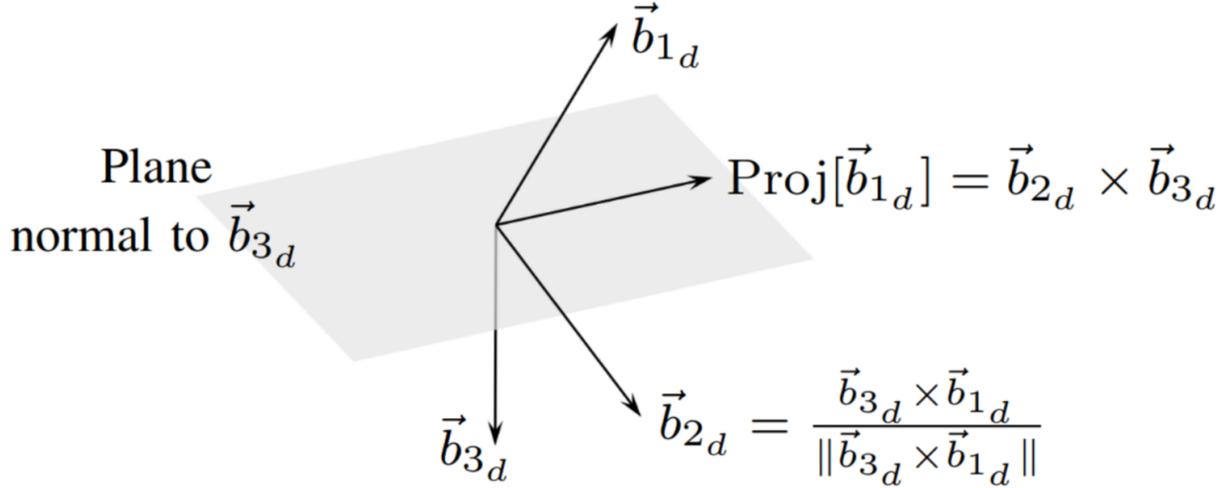


Figura 4: Definición de ejes de actitud deseada. El eje  $b_{3_d}$  se definió para estabilizar la trayectoria, el eje  $b_{2_d}$  se definió normal al eje comando  $b_{1_d}$  y a  $b_{3_d}$ . Por último el eje 1 de la actitud deseada  $R_d$  es el que completa la base. Nótese que  $b'_{1_d}$  -el primer eje de la matriz de actitud deseada- no coincidirá con el comando  $b_{1_d}$   
Fuente de figura: [1]

Con esta dirección elegida, se procede a completar la actitud deseada  $R_d$  utilizando el comando  $b_{1_d}$ . Esto se logra proyectando  $b_{1_d}$  en el plano normal a  $b_{3_d}$ . Para esto se define el eje 2 deseado  $b_{2_d} = (b_{3_d} \times b_{1_d}) / \|b_{3_d} \times b_{1_d}\|^2$ , y por último se completa el primer vector de  $R_d$  para que  $R_d$  resulte ortogonal:  $R_d = [b_{2_d} \times b_{3_d}, b_{2_d}, b_{3_d}]$ . Esto se representa en la Figura 4.

En resumen, los cuatro comandos de control para los que se diseña son,  $x_d(t)$ , y la proyección de  $b_{1_d}(t)$  sobre el plano normal a  $b_{3_d}$ . Se dirá que se cumplió el objetivo de *tracking* si  $x(t) \rightarrow x_d(t)$  y  $\text{Proj}[b_1(t)] \rightarrow \text{Proj}[b_{1_d}(t)]$ , donde la proyección es sobre el plano normal a  $b_{3_d}$ . La intuición de la cantidad de grados de libertad al haber fijado el eje  $b_{3_d}$  es que lo único que falta para determinar el resto de la base es un ángulo en el plano normal a  $b_{3_d}$ .

En la Figura 5 se muestra esquemáticamente la lógica de control propuesta. A partir del comando  $x_d$  y el estado actual  $x, v, R, \Omega$ , se define el vector estabilizante deseado  $b_{3_d}$  y el empuje a aplicar. Con  $b_{3_d}$  y  $b_{1_d}$  se define la actitud deseada, y a partir de esta y el estado actual se define el momento  $M$  a aplicar.

## 5.1. Errores de *tracking*

Antes de diseñar el controlador, es preciso definir los errores de *tracking* con los que se realimentará. El error de posición y velocidad tienen una definición canónica para un error vectorial dada por la diferencia entre los vectores:

$$e_x = x - x_d \quad (13)$$

$$e_v = v - v_d \quad (14)$$

Sin embargo, la actitud y velocidad angular viven en el espacio no lineal  $SO(3)$  y su espacio tangente, por lo que requieren una definición más cuidadosa. Para esto se define la función de error de actitud en  $SO(3)$  como:

$$\Psi(R, R_d) = \frac{1}{2} \text{tr} [I - R_d^T R] \quad (15)$$

<sup>2</sup>Se asume que  $b_{1_d}$  y  $b_{3_d}$  no son colineales

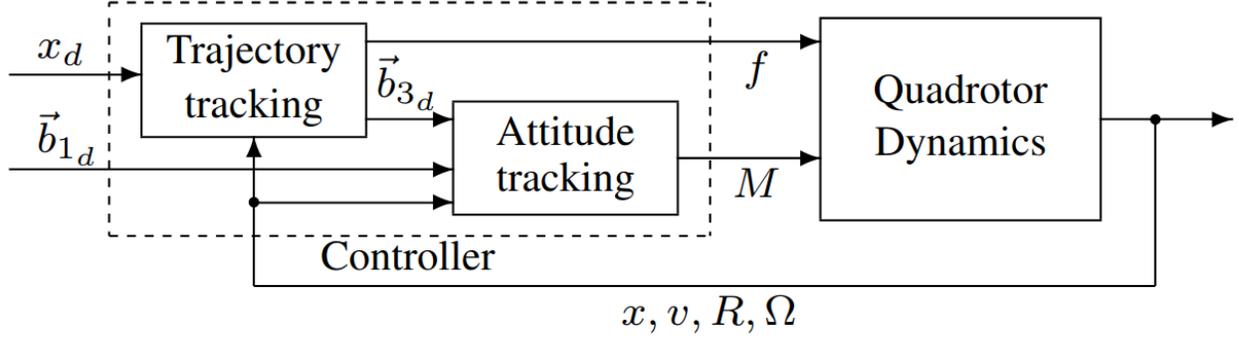


Figura 5: Diagrama de flujo del sistema de control. A partir del comando  $x_d$  y el estado actual  $x, v, R, \Omega$ , se define el vector estabilizante deseado  $\vec{b}_{3_d}$  y el empuje a aplicar. Con  $\vec{b}_{3_d}$  y  $b_{1_d}$  se define la actitud deseada, y a partir de esta y el estado actual se define el momento  $M$  a aplicar.

Fuente de figura: [1]

Esta función mide que tan distinto es rotar con  $R$  y luego con  $R_d^{-1}$  con aplicar la identidad y cumple propiedades deseables, como ser semi-definida positiva en un entorno de  $R = R_d$ . En la Subsección 9.3 se prueba además que la función verifica

$$0 \leq \Psi \leq 2$$

Con el valor 0 correspondiendo a un ángulo nulo entre la base  $R$  y la  $R_d$ , y el valor 2 correspondiendo a un ángulo  $180^\circ$ .

Como se desarrolló en la Sección 3, el diferencial asociado a  $\Psi$  para un vector tangente que pasa por  $R(t)$  es:

$$D_R \Psi R \hat{\eta} = \frac{d}{dt} \Psi(R(t)) \quad (16)$$

El desarrollo de la derivada de esa función se encuentra en la Subsección 9.2, y de interpretar el resultado se observa que el diferencial de  $\Psi$  resulta un vector producto escalar por el vector tangente. De aquí que se defina el error de *tracking* de actitud:

$$e_R = \frac{1}{2} (R_d^T R - R^T R_d)^\vee \quad (17)$$

Por otra parte el error para la velocidad angular se elige como:

$$e_\Omega = \Omega - R^T R_d \Omega_d \quad (18)$$

Esta expresión surge de calcular la velocidad angular de giro de la matriz de rotación  $R_d^T R$ , es decir  $\frac{d}{dt} (R_d^T R) = (R_d^T R) \hat{e}_\Omega$ , como se prueba en la Subsección 9.4.

## 5.2. Controlador propuesto

El controlador propuesto tiene la forma de una realimentación de errores. Para esto se definen constantes positivas  $k_x, k_v, k_R, k_\Omega$  y se eligen las entradas de control como:

$$f = -(-k_x e_x - k_v e_v - m g e_3 + m \ddot{x}_d) \cdot R e_3 \quad (19)$$

$$M = -k_R e_R - k_\Omega e_\Omega + \Omega \times J \Omega - J \left( \hat{\Omega} R^T R_d \Omega_d - R^T R_d \dot{\Omega}_d - R^T R_d \hat{\Omega}_d R_d^T R \Omega_d \right) \quad (20)$$

Para la actitud deseada implícitamente se tomó

$$b_{3_d} = - \frac{-k_x e_x - k_v e_v - m g e_3 + m \ddot{x}_d}{\| -k_x e_x - k_v e_v - m g e_3 + m \ddot{x}_d \|}$$

Para lo que se asume que el denominador no se anula.

El control de actitud  $M$  es un seguidor en  $SO(3)$ , y como se probará logra estabilizar el equilibrio a 0 del error de actitud. El último término está pensado para anular un término en la derivada de  $e_\Omega$ , como se verá.

El control traslacional  $f$  es un seguidor para la dinámica traslacional y garantiza convergencia a error de traslación nulo si el error de actitud es nulo. Cabe notar que la Ecuación 19 cuenta con un producto escalar de la forma  $R_d e_3 \cdot R e_3$ , que permite que si el error de actitud es alto ( $R_d$  y  $R$  difieren mucho) la magnitud del empuje que se pasa como entrada disminuye.

## 6. Estabilidad exponencial de la Dinámica de Actitud

Se desea probar la siguiente proposición del artículo:

**Proposición 1 (Estabilidad exponencial de la Dinámica de actitud)** *Utilizando la ley de control para el momento  $M$  definida en la Ecuación 20, y cumpliendo las siguientes condiciones iniciales:*

$$\Psi(R(0), R_d(0)) < 2 \quad (21)$$

$$\|e_\Omega\|^2 \leq \frac{2}{\lambda_{\min}(J)} k_R (2 - \Psi(R(0), R_d(0))) \quad (22)$$

*se puede garantizar que el equilibrio a 0 de los errores de tracking de actitud  $e_R, e_\Omega$  es exponencialmente estable. Más aún, existen constantes positivas tales que :*

$$\Psi(R(t), R_d(t)) \leq \min \{2, \alpha_2 e^{-\beta_2 t}\} \quad (23)$$

Notar que la restricción en la función de error actitud excluye únicamente el valor  $\Psi = 2$ , por lo que la proposición afirma que la región de atracción para la actitud es casi global.

### 6.1. Prueba

Para probar la proposición, definiremos una función de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} e_\Omega \cdot J e_\Omega + k_R \Psi(R, R_d) + c_2 e_R \cdot e_\Omega \quad (24)$$

Para derivar esta función de Lyapunov son necesarios los resultados de la Subsección 9.5 y la Subsección 9.6 donde se deducen las derivadas de  $e_R, e_\Omega$ . Sustituyendo estos resultados y operando se llega a:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_\Omega \cdot J \dot{e}_\Omega - \frac{1}{2} k_R \text{tr} \left[ -\hat{\Omega}_d R_d^T R + R_d^T R \hat{\Omega} \right] + c_2 \dot{e}_R \cdot e_\Omega + c_2 e_R \cdot \dot{e}_\Omega \\ &= -k_\Omega \|e_\Omega\|^2 - k_r e_r \cdot e_\Omega - \frac{1}{2} k_R \text{tr} \left[ R_d^T R \hat{e}_\Omega \right] + c_2 C(R_d^T R) e_\Omega \cdot e_\Omega + c_2 e_R \cdot J^{-1} (-k_r e_r - k_\Omega e_\Omega) \end{aligned}$$

A su vez, se puede ver que el segundo y tercer término de la expresión de arriba cancelan. Para esto escribir el tercer término como:

$$\text{tr} \left[ R_d^T R \hat{e}_\Omega \right] = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ R_d^T R \hat{e}_\Omega - \hat{e}_\Omega R^T R_d \right] = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \hat{e}_\Omega (R_d^T R - R^T R_d) \right] = \text{tr} \left[ \hat{e}_\Omega \hat{e}_R \right] = -2 e_\Omega \cdot e_R$$

de donde se llega a

$$\dot{V} = -k_\Omega \|e_\Omega\|^2 - c_2 k_R e_R \cdot J^{-1} e_R + c_2 C(R_d^T R) e_\Omega \cdot e_\Omega - c_2 k_\Omega e_R \cdot J^{-1} e_\Omega$$

Utilizando que  $\|C(R_d^T R) e_\Omega\| \leq \|e_\Omega\|$  y que  $\|J^{-1} e_R\| \leq -\left\| \frac{e_R}{\lambda_{\max}(J)} \right\|$  se puede llegar a la forma cuadrática en  $z = [\|e_R\|, \|e_\Omega\|]^T$  definida por:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -z^T W z \\ W &= \begin{bmatrix} \frac{c_2 k_R}{\lambda_{\max}(J)} & -\frac{c_2 k_\Omega}{2\lambda_{\min}(J)} \\ -\frac{c_2 k_\Omega}{2\lambda_{\min}(J)} & k_\Omega - c_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 6.1.1. Cota en $e_R$

Se pueden aprovechar las expresiones de  $V, \dot{V}|_{c_2=0}$  para probar que la  $\Psi$  es no creciente. Ver que

$$V|_{c_2=0} = \frac{1}{2} e_\Omega \cdot J e_\Omega + k_R \Psi(R, R_d)$$

$$\dot{V}|_{c_2=0} = -k_\Omega \|e_\Omega\|^2$$

Por lo que en primer lugar  $V|_{c_2=0}$  es no creciente ya que su derivada es no positiva. Aprovechando las hipótesis de la proposición (Ecuación 21 y Ecuación 22) se tiene:

$$k_R \Psi(R(t), R_d(t)) \stackrel{\text{def } V}{\leq} V|_{c_2=0}(t) \stackrel{V \text{ no creciente}}{\leq} V|_{c_2=0}(0) \stackrel{\text{hip}}{<} 2k_R$$

Esto quiere decir que se cumple la desigualdad estricta  $\Psi(R(t), R_d(t)) < 2$ , por lo que se puede definir una constante  $\varphi_2$  tal que  $\Psi(R(t), R_d(t)) \leq \varphi_2 < 2 \forall t$ . Esta hipótesis es necesaria para probar la ecuación:

$$\frac{1}{2} \|e_R\| \leq \Psi \leq \frac{1}{2 - \varphi_2} \|e_R\|$$

desarrollada en la Subsección 9.7. Aprovechando estas dos desigualdades se llega a una cota sobre la propia función de Lyapunov  $V$ :

$$z^T M_{21} z \leq V \leq z^T M_{22} z$$

$$M_{21} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} k_R & -c_2 \\ -c_2 & -c_2 \lambda_{\min}(J) \end{bmatrix}, M_{22} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{2k_R}{2 - \varphi_2} & c_2 \\ c_2 & -c_2 \lambda_{\max}(J) \end{bmatrix}$$

Las matrices  $M_{21}, M_{22}, W$  requieren que  $c_2 < m_{21}, c_2 < m_{22}, c_2 < w$  respectivamente para ser definidas positivas, con  $m_{21}, m_{22}, w$  valores positivos específicos para cada matriz que no resultan de interés. Basta elegir un valor de  $c_2$  que satisfaga todas las restricciones para garantizar que las matrices son definidas positivas. En estas condiciones se tiene:

$$\lambda_{\min}(M_{21}) \|z\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(M_{22}) \|z\|^2$$

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(W) \|z\|^2$$

Por lo que definiendo  $\beta = \frac{\lambda_{\min}(W)}{\lambda_{\max}(M_{22})}$  se cumple

$$\dot{V} \leq -\beta V$$

Es decir, la función de Lyapunov decrece exponencialmente. Como la misma depende tanto de  $e_R$  como de  $e_\Omega$  y no puede llegar a cero sin que ambos lleguen a cero, se puede garantizar que ambos errores tienden exponencialmente a cero, así como  $\Psi$   $\square$ .

## 7. Resultados complementarios (sin prueba)

Se probó únicamente la estabilidad exponencial de la dinámica de actitud. Con ideas similares es posible probar que la dinámica completa es estable. Los resultados en este sentido son:

**Proposición 2 (Estabilidad exponencial de la Dinámica de traslación)** *Utilizando las leyes de control para  $M, f$ , si la condición inicial satisface*

$$\Psi_0 \leq \varphi_1 < 1$$

*y además se cumplen una serie de restricciones sobre los parámetros, se puede garantizar que el equilibrio a 0 de todos los errores de tracking del sistema completo es estable.*

Esta proposición garantiza estabilidad de la dinámica completa si se cumple una condición inicial más restrictiva  $\Psi_0 < 1$ . La proposición 1 imponía  $\Psi_0 < 2$  lo que implicaba un ángulo de error inicial menor a  $\theta < 180^\circ$ , mientras que para controlar la traslación se requiere  $\theta < 90^\circ$ . La intuición atrás de este resultado es que para controlar la dinámica traslacional se debe poder realizar empuje en la dirección del destino deseado.

Sin embargo, es claro que como la dinámica de actitud es exponencialmente estable para  $\Psi_0 < 2$ , basta controlar la actitud hasta llegar al umbral de  $\Psi < 1$  y allí aprovechar el resultado de control de traslación. Por lo tanto, el resultado general del trabajo es:

**Proposición 3 (Estabilidad casi-global de la Dinámica de tracking)** *Utilizando las leyes de control para  $M, f$  para cualquier condición inicial que verifique*

$$\Psi_0 < 2$$

*y además cumpla una serie de restricciones sobre los parámetros, se puede garantizar que el equilibrio a 0 de todos los errores de tracking del sistema completo es estable.*

Este poderoso resultado asegura la estabilidad exponencial de la dinámica del sistema controlado salvo para el caso de dimensión nula  $\Psi_0 = 2$  correspondiente a comenzar dado vuelta respecto a la posición a seguir. Sin embargo esto tiene poca relevancia práctica, ya que como se verá en el ejemplo siguiente el control logra estabilizar una condición inicial prácticamente invertida.

## 7.1. Recuperación de un dron boca abajo

El ejemplo de la Figura 6 es la estabilización de un dron inicialmente boca abajo. Esta simulación mostrada en el artículo[1] estabiliza un dron con un error de actitud inicial de  $178^\circ$ . La función de error de actitud decae exponencialmente. Para  $t = 0,88s$  cae por debajo de 1, momento a partir de donde los errores de *tracking* de posición y velocidad angular convergen a cero.

## 8. Conclusiones

El presente trabajo sirvió para tener una mejor comprensión de un trabajo de actualidad en teoría de control. Fue necesario comprender el modelado geométrico en  $SO(3)$ , y la utilización de operadores y reglas de derivación y operación algebraica en este contexto.

Además fue posible aplicar los conocimientos del curso para comprender la prueba de estabilidad basada en Lyapunov y entender cómo se diseñó el controlador en base a la función de Lyapunov.

## 9. Anexo

### 9.1. $R(a \times b) = (Ra \times Rb)$

Basta probarla componente a componente:

$$\begin{aligned} (R(a \times b))_j &= e_j \cdot R(a \times b) \\ &= e_j^T R(a \times b) \\ &= (R^T e_j)^T (a \times b) \\ &= \det(R^T e_j, a, b) = \det R \det(R^T e_j, a, b) \\ &= \det(RR^T e_j, Ra, Rb) = \det(e_j, Ra, Rb) \\ &= e_j \cdot (Ra \times Rb) \\ &= (Ra \times Rb)_j \end{aligned}$$

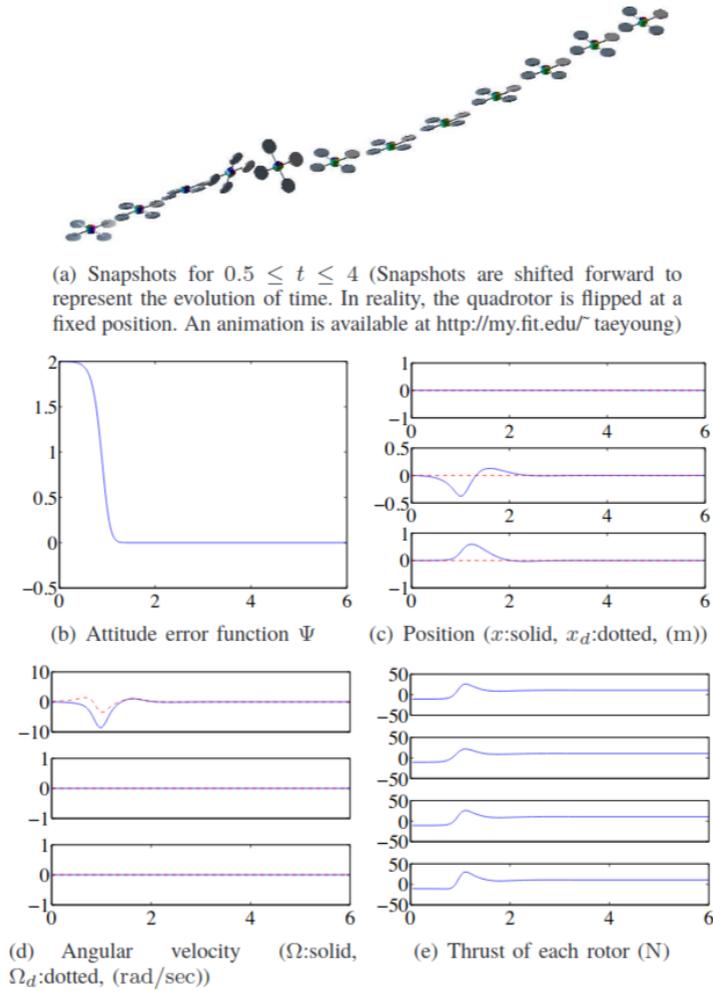


Figura 6: Evolución temporal del control de un dron inicialmente boca abajo. Se observa el decrecimiento de la función de error en actitud, la evolución de la posición, la velocidad angular y la acción de cada rotor. Fuente de figura: [1]

### 9.1.1. Corolario: Gorro de producto de matrices

Esta propiedad permite probar el siguiente corolario:

$$\widehat{R\Omega} = R\hat{\Omega}R^T \quad (25)$$

Para esto, partamos de aplicar el lado derecho del corolario a un vector  $v$ :

$$R\hat{\Omega}R^T v \stackrel{\text{def gorro}}{=} R(\Omega \times R^T v) \stackrel{9.1.}{=} (R\Omega) \times (RR^T v) \stackrel{R \in SO(3)}{=} (R\Omega) \times v \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{R\Omega}v \quad \square$$

## 9.2. Diferencial de función $\Psi$

Cabe notar que el diferencial  $D_R$  se está tomando pensando  $\Psi$  como una función solo de  $R$ , por lo cual se asume  $R_d$  constante en esta prueba. Debido a la linealidad de la traza, la Ecuación 16 resulta:

$$\frac{d}{dt}\Psi(R(t)) = \frac{1}{2}\text{tr} \left[ \frac{d}{dt} (I - R_d^T R) \right] = \frac{1}{2}\text{tr} \left[ -R_d^T \dot{R} \right] = -\frac{1}{2}\text{tr} [R_d^T R \hat{\eta}] \quad (26)$$

por otro lado,

$$\text{tr} [R_d^T R \hat{\eta}] = \text{tr} [(R_d^T R \hat{\eta})^T] = \text{tr} [\hat{\eta}^T R^T R_d]$$

Por ser matriz antisimétrica,  $\hat{\eta}^T = -\hat{\eta}$ , por lo que

$$\text{tr} [\hat{\eta}^T R^T R_d] = -\text{tr} [\hat{\eta} R^T R_d] = -\text{tr} [R^T R_d \hat{\eta}]$$

Donde el último paso es la invarianza de la traza ante conmutación en producto de matrices. Por linealidad de la traza, es posible escribir:  $\text{tr} [R_d^T R \hat{\eta}] = \text{tr} [\frac{1}{2} (R_d^T R - R^T R_d) \hat{\eta}]$ . Utilizando la identidad  $-\frac{1}{2} \text{tr} [\hat{x} \hat{y}] = x^T y$  con  $\hat{x} = \frac{1}{2} (R_d^T R - R^T R_d)$  e  $\hat{y} = \hat{\eta}$ , la Ecuación 26 se reescribe como:

$$\frac{d}{dt} \Psi(R(t)) = \frac{1}{2} \left( (R_d^T R - R^T R_d)^\vee \right)^T \eta \quad (27)$$

De esta ecuacion se interpreta que

$$D_R \Psi = e_R \cdot \eta$$

Por lo que se define

$$e_R = \frac{1}{2} (R_d^T R - R^T R_d)^\vee$$

Nota:  $(R_d^T R - R^T R_d)^\vee$  existe, ya que  $A^T B - B^T A$  es una matriz trivialmente anti-simétrica.

### 9.3. Cota para la función $\Psi$

Para la prueba, se puede adoptar sin perdida de generalidad una forma genérica para  $A = R^T R_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix}$  donde  $c \stackrel{def}{=} \cos(\theta)$  y  $s \stackrel{def}{=} \sin(\theta)$ , correspondiente a un giro de ángulo  $\theta$  en el plano  $\{e_2, e_3\}$ .  
Por lo que

$$\Psi(R^T R_d) = \Psi(A) = \frac{1}{2} \text{tr} [I - A] = \frac{1}{2} (0 + 1 - c + 1 - c) = 1 - c = 1 - \cos(\theta)$$

De donde se deduce la cota

$$0 \leq \Psi \leq 2 \quad (28)$$

Nota: uno podría tender a querer colocar  $A = -I$  para pensar la cota de peor caso en  $\Psi$ . Notar que esta transformación de la base no resulta *dextrógira*, es decir, no es posible obtener a partir de rotar una terna de vectores su reflejo especular.

### 9.4. Definición de $e_\Omega$

Se desea probar que existe un vector  $e_\Omega$  para el cual se cumple

$$\frac{d}{dt} (R_d^T R) = (R_d^T R) \hat{e}_\Omega$$

Por lo que  $e_\Omega$  es la velocidad angular de la matriz de giro  $(R_d^T R)$ . Para esto, planteamos:

$$\frac{d}{dt} (R_d^T R) = \dot{R}_d^T R + R_d^T \dot{R}$$

En el primer término,  $(\dot{R}_d)^T = (R_d \hat{\Omega}_d)^T = \hat{\Omega}_d^T R_d^T = -\hat{\Omega}_d R_d^T$ , por lo que:

$$\frac{d}{dt} (R_d^T R) = -\hat{\Omega}_d R_d^T R + R_d^T R \hat{\Omega} \stackrel{I=R^T R}{=} R_d^T R \hat{\Omega} - R_d^T R R^T R_d \hat{\Omega}_d R_d^T R = R_d^T R (\hat{\Omega} - R^T R_d \hat{\Omega}_d R_d^T R)$$

En virtud de la Ecuación 25 se reconoce:

$$(\hat{\Omega} - R^T R_d \hat{\Omega}_d R_d^T R) = (\Omega - R^T R_d \Omega_d)^\wedge$$

de donde se concluye:

$$e_\Omega = (\Omega - R^T R_d \Omega_d) \quad (29)$$

## 9.5. Derivada temporal de $e_R$

Para analizar la estabilidad del sistema es necesario estudiar la derivada temporal de  $e_R = \frac{1}{2} (R_d^T R - R^T R_d)^\vee$ . En particular escribiremos  $\dot{e}_R$  como función del error en velocidad angular  $e_\Omega$ .

En primer lugar, debido a la linealidad de los distintos operadores, vale notar que la derivada, la trasposición, y el operador *vee* son todos intercambiables. Además hay que recordar que:

$$\frac{d}{dt} (R_d^T R) = (R_d^T R) \hat{e}_\Omega$$

Trasponiendo y usando la anti-simetría de  $\hat{e}_\Omega$ , se tiene:

$$\frac{d}{dt} (R_d^T R)^T = ((R_d^T R) \hat{e}_\Omega)^T = -\hat{e}_\Omega (R^T R_d^T)$$

Entonces, derivando  $e_R$ :

$$\dot{e}_R = \frac{1}{2} (R_d^T R \hat{e}_\Omega + \hat{e}_\Omega R^T R_d)^\vee \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} (\text{tr} [R^T R_d] I - R^T R_d) e_\Omega$$

Para la prueba de la segunda igualdad se elegirá notar para claridad  $A = R^T R_d$  y  $v = e_\Omega$ . A su vez, por linealidad se puede probar la igualdad únicamente para  $v = [1 \ 0 \ 0]^T$ , resultando análoga para cualquier otro vector canónico.

### 9.5.1. Identidad vectorial

Se desea probar entonces:

$$(A^T \hat{v} + \hat{v} A)^\vee \stackrel{?}{=} (\text{tr} [A] I - A) v$$

Escribiendo además  $A = \begin{bmatrix} \dots & f_1 & \dots \\ \dots & f_2 & \dots \\ \dots & f_3 & \dots \end{bmatrix}$  y  $A^T = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ , se tiene:

$$(A^T \hat{v} + \hat{v} A)^\vee = \left( \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & f_3 & -f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots \\ \dots & -f_3 & \dots \\ \dots & f_2 & \dots \end{bmatrix} \right)^\vee = \left( \begin{bmatrix} 0 & a_{31} & -a_{21} \\ -a_{31} & 0 & -a_{22} - a_{33} \\ a_{21} & a_{22} + a_{33} & 0 \end{bmatrix} \right)^\vee = \begin{bmatrix} a_{22} + a_{33} \\ -a_{21} \\ -a_{31} \end{bmatrix}$$

Del lado derecho de la identidad, en cambio:

$$(\text{tr} [A] I - A) v = \begin{bmatrix} a_{22} + a_{33} & \dots & \dots \\ -a_{21} & \dots & \dots \\ -a_{31} & \dots & \dots \end{bmatrix} v$$

por lo que efectivamente

$$(\text{tr} [A] I - A) v = \begin{bmatrix} a_{22} + a_{33} \\ -a_{21} \\ -a_{31} \end{bmatrix} \square$$

Demostrada la identidad y retomando el resultado, se tiene:

$$\dot{e}_R = \frac{1}{2} (\text{tr} [R^T R_d] I - R^T R_d) e_\Omega = C(R_d^T R) e_\Omega$$

Donde  $C$  resulta una matriz dependiente de  $(R, R_d)$ . Se puede probar a su vez que la matriz  $C$  resulta contractiva, es decir  $\|\dot{e}_R\| \leq \|e_\Omega\|$ .

### 9.5.2. Contractividad de $C(R_d^T R)$

Para la prueba, se puede adoptar sin pérdida de generalidad una forma genérica para  $A = R^T R_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix}$  donde  $c \stackrel{def}{=} \cos(\theta)$  y  $s \stackrel{def}{=} \sin(\theta)$ , correspondiente a un giro de ángulo  $\theta$  en el plano  $\{e_2, e_3\}$ . No se toman hipótesis adicionales para  $v = e_\Omega = [x \ y \ z]^T$ .

La propiedad a probar es entonces

$$\|(\text{tr}[A]I - A)v\| \leq 2\|v\|$$

Con la notación adoptada, de operar se obtiene:

$$\|(\text{tr}[A]I - A)v\| = \sqrt{4c^2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2y^2c + 2z^2c} \stackrel{c \leq 1}{\leq} \sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)} = 2\|v\| \quad \square$$

### 9.6. Derivada temporal de $e_\Omega$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e_\Omega) &= \dot{\Omega} - \frac{d}{dt}(R_d^T R)^T \Omega_d - R^T R_d \dot{\Omega}_d = \dot{\Omega} - \hat{e}_\Omega R^T R_d \Omega_d - R^T R_d \dot{\Omega}_d \\ &= \dot{\Omega} + \hat{\Omega} R^T R_d \Omega_d - R^T R_d \dot{\Omega}_d - R^T R_d \hat{\Omega}_d R_d^T R \Omega_d \end{aligned}$$

A partir de la Ecuación 12 y Ecuación 20 se obtiene:

$$J\dot{e}_\Omega = -k_R e_R - k_\Omega e_\Omega \quad (30)$$

### 9.7. Desigualdades entre $e_R$ y $\Psi$

A efectos de la prueba de Lyapunov, es útil ver que la función de error  $\Psi$  está acotada inferior y superiormente por factores de la norma de error de actitud  $\|e_R\|$ , de forma que si  $e_R$  tiende a 0,  $\Psi$  también. En concreto se probará en esta sección:

$$\frac{1}{2} \|e_R\| \leq \Psi \leq \frac{1}{2 - \varphi_2} \|e_R\|$$

Donde  $\varphi_2$  es una cota para  $\Psi$  definida por  $\Psi \leq \varphi_2 < 2$ . Esto a efectos prácticos es prohibir el valor  $\Psi = 2$ . Para la prueba nuevamente tomaremos formas particulares de las matrices de giro sin pérdida de generalidad correspondientes a un giro de ángulo  $\theta$  en el plano  $\{e_2, e_3\}$ , es decir:

$$A = R^T R_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

De esta manera,  $e_R = \frac{1}{2} (A - A^T)^\vee = \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s \\ 0 & s & 0 \end{bmatrix} \right)^\vee = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  Por lo que  $\|e_R\|^2 = \sin(\theta)^2$ .

Por otro lado, como ya se probó

$$\Psi(A) = 1 - \cos(\theta)$$

Por lo tanto, las dos desigualdades trigonométricas a probar resultan:

1.  $\sin(\theta)^2 \leq 2 - \cos(\theta)$ , ecuación reescribible como  $4 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 \geq 0$ , cierto para cualquier valor de  $\theta$ .
2.  $(2 - \varphi_2)(1 - \cos(\theta)) \leq 4 \sin(\theta)^2$ , sujeto a  $1 - \cos(\theta) \leq \varphi_2$  reescribible como:  $\cos(\theta) \geq \frac{-2 - \varphi_2}{4}$  sujeto a  $\cos(\theta) \geq 1 - \varphi_2$ . Es posible ver gráficamente que para valores de  $\varphi_2$  menores a 2, la cota  $\cos(\theta) \geq 1 - \varphi_2$  es más restrictiva, por lo que se demuestra lo deseado  $\square$ .

## Referencias

- [1] Taeyoung Lee, Melvin Leok, and N Harris McClamroch. Geometric tracking control of a quadrotor uav on se (3). In *49th IEEE conference on decision and control (CDC)*, pages 5420–5425. IEEE, 2010.
- [2] Darryl D Holm, Tanya Schmah, and Cristina Stoica. *Geometric mechanics and symmetry: from finite to infinite dimensions*, volume 12. Oxford University Press, 2009.
- [3] John M Lee. Smooth manifolds. In *Introduction to Smooth Manifolds*, pages 1–31. Springer, 2013.
- [4] Taeyoung Lee. *Computational Geometric Mechanics and Control of Rigid Bodies*. PhD thesis, 2008.
- [5] Melvin Leok. *Foundations of computational geometric mechanics*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2004.