



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA



TRABAJO FINAL
ANÁLISIS Y CONTROL DE SISTEMAS
NO LINEALES

AÑO 2020

Estudiantes:
Agustín Castro
Guillermo Cabrera

Índice general

1.	Descripción del Problema y Resumen del Trabajo	2
2.	Modelo	2
3.	Control Deslizante	4
3.1.	Controlador para ángulos y altura	4
3.2.	Controlador de posición	8
3.3.	Elección de constantes	15
3.4.	Simulaciones	17
3.5.	Eliminación de Chattering	21
4.	Controladores lineales	25
4.1.	Controlador para ángulos y altura	25
4.2.	Controlador de posición	26
4.3.	Elección de constantes	28
4.4.	Simulaciones	29
5.	Comparación de controladores	33
6.	Conclusiones	37

1. Descripción del Problema y Resumen del Trabajo

Se busca diseñar un controlador de posición para un dron quadcopter como realimentación de las posiciones, los ángulos y las derivadas de estas variables.

Para ello procedemos primero controlando la altura z y los tres ángulos (ϕ , θ y ψ), correspondientes a los de la figura 1. Diseñamos estos controladores por dos métodos, en primer lugar control deslizante y luego se implementa un controlador lineal.

Luego para controlar (x, y, z, ψ) . se diseñan controladores para (x, y) a partir de los controladores previamente construidos, tomando como entradas los ángulos ϕ y θ . Es decir, asumiendo que los ángulos están bien controlados, podemos asumir entonces ϕ y θ como entradas al sistema en la dinámica de x e y , entonces buscamos diseñar estos ángulos como realimentación de los estados para obtener la posición deseada (es decir, se recurre a una suerte de *Backstepping*).

Para diseñar los ángulos ϕ y θ como realimentación, haremos un cambio de base en el plano xy , de manera de que la nueva base sea solidaria al ángulo ψ . De este modo se obtienen ecuaciones más sencillas para la dinámica de las coordenadas de (x, y) . Con este nuevo sistema de coordenadas, se volverán a aplicar los métodos de control deslizante y control lineal para diseñar los ángulos ϕ y θ que nos permitan alcanzar la posición deseada.

Finalmente, se lleva a cabo una comparación de los resultados obtenidos mediante los dos métodos utilizados para resolver el problema.

2. Modelo

A lo largo de todo el documento, denominaremos:

- (x, y, z) la posición absoluta del centro de masa del dron.
- (ϕ, θ, ψ) al ángulo de rotación del dron según los ejes x , y y z respectivamente (ángulos de Euler). Se supone que $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$ y que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, mientras que ψ puede tomar cualquier valor.
- m es la masa total del dron.

- I_x, I_y, I_z son los principales momentos de inercia del dron, desde el centro de masa en las direcciones x, y y z respectivamente.
- l es la distancia entre el eje de las hélices y el centro de masa del dron.
- w_1, w_2, w_3 y w_4 son las velocidades angulares de las hélices del dron.
- T_1, T_2, T_3 y T_4 son las fuerzas de empuje de las hélices del motor (entradas del sistema).
- J_r es la inercia de las hélices.
- $\Omega = w_2 + w_4 - w_3 - w_1$ es la velocidad residual del rotor.

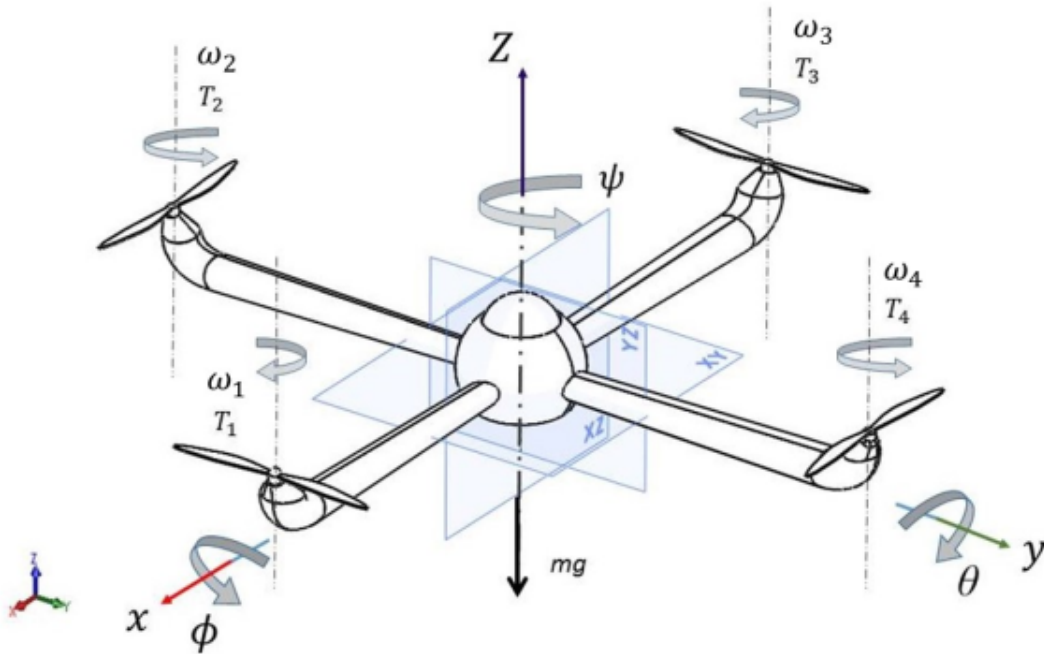


Figura 1: Esquema del dron y su sistema de coordenadas [1]

El modelo en variables de estados que domina al dron [1] es de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ x'' \\ y' \\ y'' \\ z' \\ z'' \\ \phi' \\ \phi'' \\ \theta' \\ \theta'' \\ \psi' \\ \psi'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ [\cos(\psi)\text{sen}(\theta)\cos(\phi) + \text{sen}(\psi)\text{sen}(\phi)]\frac{U_1}{m} \\ y' \\ [\text{sen}(\psi)\text{sen}(\theta)\cos(\phi) - \cos(\psi)\text{sen}(\phi)]\frac{U_1}{m} \\ z' \\ \cos(\theta)\cos(\phi)\frac{U_1}{m} - g \\ \phi' \\ \frac{1}{I_x}[(I_y - I_z)\psi'\theta' - J_r\theta'\Omega + U_2l] \\ \theta' \\ \frac{1}{I_y}[(I_z - I_x)\psi'\phi' + J_r\phi'\Omega + U_3l] \\ \psi' \\ \frac{1}{I_z}[(I_x - I_y)\theta'\phi' + U_4] \end{pmatrix} \quad (1)$$

Siendo

$$\begin{cases} U_1 := T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = K_T(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2) \\ U_2 := T_4 - T_2 = K_T(w_4^2 - w_2^2) \\ U_3 := T_3 - T_1 = K_T(w_3^2 - w_1^2) \\ U_4 := \frac{d}{K_T}(T_1 + T_3 - T_2 - T_4) = d(w_1^2 + w_3^2 - w_2^2 - w_4^2) \end{cases} \quad (2)$$

Siendo $d > 0$ una constante que depende de la densidad del aire, del radio y de la forma de las hélices, y K_T es el coeficiente de empuje de las hélices.

3. Control Deslizante

3.1. Controlador para ángulos y altura

Supongamos que queremos obtener la altura z_d , y los ángulos $(\phi_d, \theta_d, \psi_d)$. Definimos entonces:

$$\begin{cases} \hat{z} := z - z_d \\ \hat{\phi} := \phi - \phi_d \\ \hat{\theta} := \theta - \theta_d \\ \hat{\psi} := \psi - \psi_d \end{cases} \quad (3)$$

Es claro entonces que:

$$\begin{cases} \hat{z}'' = z'' - z_d'' \\ \hat{\phi}'' = \phi'' - \phi_d'' \\ \hat{\theta}'' = \theta'' - \theta_d'' \\ \hat{\psi}'' = \psi'' - \psi_d'' \end{cases}$$

Entonces usando las ecuaciones de (1), y sustituyendo $z = \hat{z} + z_d$, $\phi = \hat{\phi} + \phi_d$, $\theta = \hat{\theta} + \theta_d$ y $\psi = \hat{\psi} + \psi_d$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \hat{z}' \\ \hat{z}'' \\ \hat{\phi}' \\ \hat{\phi}'' \\ \hat{\theta}' \\ \hat{\theta}'' \\ \hat{\psi}' \\ \hat{\psi}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{z}' \\ \cos(\hat{\theta} + \theta_d)\cos(\hat{\phi} + \phi_d)\frac{U_1}{m} - g - z_d'' \\ \hat{\phi}' \\ \frac{1}{I_x}[(I_y - I_z)(\hat{\psi}' + \psi_d')(\hat{\theta}' + \theta_d') - J_r(\hat{\theta}' + \theta_d')\Omega + U_2l] - \phi_d'' \\ \hat{\theta}' \\ \frac{1}{I_y}[(I_z - I_x)(\hat{\psi}' + \psi_d')(\hat{\phi}' + \phi_d') + J_r(\hat{\phi}' + \phi_d')\Omega + U_3l] - \theta_d'' \\ \hat{\psi}' \\ \frac{1}{I_z}[(I_x - I_y)(\hat{\theta}' + \theta_d')(\hat{\phi}' + \phi_d') + U_4] - \psi_d'' \end{pmatrix} \quad (4)$$

Queremos entonces definir las realimentaciones U_i de modo que \hat{z} , $\hat{\phi}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\psi}$ tiendan a 0. Definamos entonces:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(\hat{\theta} + \theta_d)\cos(\hat{\phi} + \phi_d)\frac{U_1}{m} - g - z_d'' \\ \frac{1}{I_x}[(I_y - I_z)(\hat{\psi}' + \psi_d')(\hat{\theta}' + \theta_d') - J_r(\hat{\theta}' + \theta_d')\Omega + U_2l] - \phi_d'' \\ \frac{1}{I_y}[(I_z - I_x)(\hat{\psi}' + \psi_d')(\hat{\phi}' + \phi_d') + J_r(\hat{\phi}' + \phi_d')\Omega + U_3l] - \theta_d'' \\ \frac{1}{I_z}[(I_x - I_y)(\hat{\theta}' + \theta_d')(\hat{\phi}' + \phi_d') + U_4] - \psi_d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{z}'' \\ \hat{\phi}'' \\ \hat{\theta}'' \\ \hat{\psi}'' \end{pmatrix} \quad (5)$$

Observar que para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, se tiene que podemos escribir:

$$v_i = \alpha_i U_i + \beta_i \quad (6)$$

siendo α_i y β_i funciones de los estados y de la salida deseada.

Con esto, nuestros problemas se resumen en diseñar v_i tales que lleven a 0 a funciones T_i que verifican sistemas de la forma:

$$\begin{cases} T_i' = T_i' \\ T_i'' = v_i \end{cases} \quad (7)$$

Para resolver esto usaremos, en primer lugar, control deslizante. Observemos que si logramos hacer que a partir de un cierto instante t_i se verifique siempre la ecuación $T_i'(t) + c_i T_i(t) = 0$ para alguna constante $c_i > 0$ y para todo $t > t_i$, entonces tendremos que T_i convergerá a 0 exponencialmente.

Definamos $s_i = T_i' + c_i T_i$. Entonces:

$$s_i' = T_i'' + c_i T_i' = v_i + c_i T_i' \quad (8)$$

Supongamos que queremos hacer que $s_i(t)$ sea en $[0, t_i]$ una recta que se anula en tiempo t_i , y luego precisaremos que $s_i(t) = 0$ en $[t_i, +\infty)$.

Entonces, como $s_i(t)$ es una recta que se anula en tiempo $t_i > 0$, tendremos que la pendiente de esa recta tiene signo contrario al de $s_i(0)$ (si tuvieran igual signo, entonces $s_i(t) \neq 0$ para todo $t > 0$). Es decir que en $[0, t_i]$ podemos escribir:

$$s_i'(t) = -a_i \cdot \text{sg}(s_i(t)) \quad \text{para algún } a_i > 0$$

siendo $\text{sg} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ la función signo. Observar que como $\text{sg}(0) = 0$, y nosotros queremos que $s_i(t) = 0$ para todo $t > t_i$ (lo que en particular implica que $s_i'(t) = 0 = -a_i \cdot \text{sg}(s_i(t))$ para todo $t > t_i$), tenemos que entonces

$$s_i'(t) = -a_i \text{sg}(s_i(t)) = -a_i \text{sg}(T_i'(t) + c_i T_i(t)) \quad \forall t \geq 0 \quad (9)$$

Entonces, igualando los resultados de las ecuaciones (9) y (8), tenemos:

$$s_i' = v_i + c_i T_i' = -a_i \text{sg}(T_i' + c_i T_i) \Rightarrow v_i = -a_i \text{sg}(T_i' + c_i T_i) - c_i T_i' \quad (10)$$

Donde a_i y c_i son constantes positivas que debemos diseñar con cierto criterio. Observemos que c_i nos determinará la velocidad con que T_i tenderá a 0, pues a partir de tiempo t_i (como se verificará $T_i' + c_i T_i = 0$) tendremos $T_i(t) = T_i(t_i) \cdot e^{-c_i(t-t_i)}$. También podemos observar que a_i determina el tiempo t_i a partir del cual s_i vale 0, pues en $[0, t_i]$ tenemos que s_i es una recta con pendiente $-a_i \cdot \text{sg}(s_i) = -a_i \cdot \text{sg}(s_i(0))$, entonces s_i se anulará en el instante $t_i = \frac{s_i(0)}{a_i \cdot \text{sg}(s_i(0))} = \frac{|s_i(0)|}{a_i}$.

Entonces, usando las ecuaciones (6) y (10), podemos despejar U_i , obteniendo:

$$v_i = \alpha_i U_i + \beta_i = -a_i \cdot \text{sg}(T'_i + c_i T_i) - c_i T'_i$$

$$\Rightarrow U_i = \frac{-a_i \cdot \text{sg}(T'_i + c_i T_i) - c_i T'_i - \beta_i}{\alpha_i}$$

A partir de la ecuación (5) podemos conocer para cada $T_i \in \{\hat{z}, \hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}\}$ su α_i y β_i correspondiente, y entonces podemos escribir explícitamente las realimentaciones de estados:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\cos(\hat{\theta} + \theta_d) \cos(\hat{\phi} + \phi_d)}{m} \\ \beta_1 = -g - z''_d \end{cases} \Rightarrow U_1 = m \frac{-a_z \cdot \text{sg}(\hat{z}' + c_z \hat{z}) - c_z \hat{z}' + g + z''_d}{\cos(\hat{\theta} + \theta_d) \cos(\hat{\phi} + \phi_d)}$$

Luego para U_2 :

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{l}{I_x} \\ \beta_2 = \frac{1}{I_x} [(I_y - I_z)(\hat{\psi}' + \psi'_d)(\hat{\theta}' + \theta'_d) - J_r(\hat{\theta}' + \theta'_d)\Omega] - \hat{\psi}''_d \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_2 = I_x \cdot \frac{-a_\phi \cdot \text{sg}(\hat{\phi}' + c_\phi \hat{\phi}) - c_\phi \hat{\phi}' - \frac{1}{I_x} [(I_y - I_z)(\hat{\psi}' + \psi'_d)(\hat{\theta}' + \theta'_d) - J_r(\hat{\theta}' + \theta'_d)\Omega] + \hat{\phi}''_d}{l}$$

Para U_3 :

$$\begin{cases} \alpha_3 = \frac{l}{I_y} \\ \beta_3 = \frac{1}{I_y} [(I_z - I_x)(\hat{\psi}' + \psi'_d)(\hat{\phi}' + \phi'_d) + J_r(\hat{\phi}' + \phi'_d)\Omega] - \theta''_d \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_3 = I_y \cdot \frac{-a_\theta \cdot \text{sg}(\hat{\theta}' + c_\theta \hat{\theta}) - c_\theta \hat{\theta}' - \frac{1}{I_y} [(I_z - I_x)(\hat{\psi}' + \psi'_d)(\hat{\phi}' + \phi'_d) + J_r(\hat{\phi}' + \phi'_d)\Omega] + \theta''_d}{l}$$

Finalmente para U_4 :

$$\begin{cases} \alpha_4 = \frac{1}{I_z} \\ \beta_4 = \frac{1}{I_z} [(I_x - I_y)(\hat{\theta}' + \theta'_d)(\hat{\phi}' + \phi'_d)] - \psi''_d \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_4 = I_z \cdot \left(-a_\psi \cdot \text{sg}(\hat{\psi}' + c_\psi \hat{\psi}) - c_\psi \hat{\psi}' - \frac{1}{I_z} [(I_x - I_y)(\hat{\theta}' + \theta'_d)(\hat{\phi}' + \phi'_d)] + \psi''_d \right)$$

Observar por como definimos $\hat{z}, \hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}$ en las ecuaciones (3), podemos escribir estas realimentaciones como:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(\theta)\cos(\phi)} \left(-a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d \right) \\ U_2 = \frac{I_x}{I} \cdot \left(-a_\phi \cdot \text{sg}(\phi' + c_\phi \phi - \phi'_d - c_\phi \phi_d) - c_\phi(\phi' - \phi'_d) - \frac{1}{I_x} [(I_y - I_z)\psi'\theta' - J_r\theta'\Omega] + \phi''_d \right) \\ U_3 = \frac{I_y}{I} \cdot \left(-a_\theta \cdot \text{sg}(\theta' + c_\theta \theta - \theta'_d - c_\theta \theta_d) - c_\theta(\theta' - \theta'_d) - \frac{1}{I_y} [(I_z - I_x)\psi'\phi' + J_r\phi'\Omega] + \theta''_d \right) \\ U_4 = I_z \cdot \left(-a_\psi \cdot \text{sg}(\psi' + c_\psi \psi - \psi'_d - c_\psi \psi_d) - c_\psi(\psi' - \psi'_d) - \frac{1}{I_z} [(I_x - I_y)(\theta')(\phi')] + \psi''_d \right) \end{cases} \quad (11)$$

3.2. Controlador de posición

3.2.1. Aproximación para $\psi' \approx 0$

Ahora supongamos que queremos controlar las coordenadas (x, y, z) y al ángulo ψ del dron. Podemos aprovechar entonces los controladores diseñados anteriormente, y pensar a los ángulos ϕ y θ como entradas. Es decir, si sustituímos los controladores en la ecuación (1), obtenemos para x e y las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x'' = [\cos(\psi)\text{sen}(\theta)\cos(\phi) + \text{sen}(\psi)\text{sen}(\phi)] \cdot \frac{[-a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d]}{\cos(\theta)\cos(\phi)} \\ y'' = [\text{sen}(\psi)\text{sen}(\theta)\cos(\phi) - \cos(\psi)\text{sen}(\phi)] \cdot \frac{[-a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d]}{\cos(\theta)\cos(\phi)} \end{cases} \quad (12)$$

Una observación que puede ser de ayuda para comprender la idea del paso siguiente, es observar que si tuvieramos $\psi = 0$ el sistema quedaría de forma muy sencilla. Es decir, si $\psi = 0$ tendríamos las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} x'' = \text{tg}(\theta) \cdot [-a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d] \\ y'' = -\text{tg}(\phi) \cdot \frac{[-a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d]}{\cos(\theta)} \end{cases} \quad (13)$$

y en este caso, sería sencillo diseñar θ y ϕ de una manera similar a como contruimos los controladores de la parte anterior.

Ahora, como se busca controlar al ángulo ψ , basta observar que si escribimos la dinámica en coordenadas solidarias a ψ entonces las ecuaciones del nuevo sistema deberían parecerse a las de (13). Es decir, consideremos un sistema de coordenadas en el plano (x, y) que sea solidario al ángulo ψ .

Por ejemplo, consideremos los vectores $e_1 = \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ \text{sen}(\psi) \end{pmatrix}$, y $e_2 = \begin{pmatrix} -\text{sen}(\psi) \\ \cos(\psi) \end{pmatrix}$.

En este caso la matriz que pasa de las coordenadas $B = \{e_1, e_2\}$ a la antigua base (llamémosla base canónica) es:

$${}_C(I)_B = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) \\ \text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

Como esta matriz es unitaria, entonces su matriz inversa (la cual convierte las coordenadas en la base canónica a las coordenadas en la base solidaria a ψ) es la transpuesta:

$${}_B(I)_C = {}_C(I)_B^T = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

Llamemos entonces (x_ψ, y_ψ) a las coordenadas del punto (x, y) en la base B solidaria a ψ . Es decir, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} x_\psi \\ y_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Supongamos que el ángulo ψ no cambia bruscamente, es decir $\psi' \approx 0$ y $\psi'' \approx 0$. De esta manera, podemos aproximar la derivada de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x'_\psi \\ y'_\psi \end{pmatrix} = \psi' \begin{pmatrix} -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \\ -\cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Y de forma similar podemos aproximar:

$$\begin{pmatrix} x''_\psi \\ y''_\psi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

Si llamamos $\eta = \frac{[-a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d]}{\cos(\theta)\cos(\phi)}$ y usamos la ecuación (12), podemos entonces reescribir la ecuación de evolución de estas coordenadas como:

$$\begin{pmatrix} x''_\psi \\ y''_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi)\text{sen}(\theta)\cos(\phi) + \text{sen}(\psi)\text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\psi)\text{sen}(\theta)\cos(\phi) - \cos(\psi)\text{sen}(\phi) \end{pmatrix} \eta = \\
&= \begin{pmatrix} \text{sen}(\theta)\cos(\phi)(\cos^2(\psi) + \text{sen}^2(\psi)) + \text{sen}(\psi)\text{sen}(\phi)\cos(\psi) - \cos(\psi)\text{sen}(\phi)\text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi)\cos(\psi)\text{sen}(\theta)\cos(\phi) + \cos(\psi)\text{sen}(\psi)\text{sen}(\theta)\cos(\phi) - \text{sen}(\phi)(\text{sen}^2(\psi) + \cos^2(\psi)) \end{pmatrix} \eta = \\
&= \begin{pmatrix} \text{sen}(\theta)\cos(\phi) \\ -\text{sen}(\phi) \end{pmatrix} \eta = \\
&= \begin{pmatrix} \text{sen}(\theta)\cos(\phi) \\ -\text{sen}(\phi) \end{pmatrix} \frac{[-a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d]}{\cos(\theta)\cos(\phi)} = \\
&= \begin{pmatrix} \text{tg}(\theta) \\ -\frac{\text{tg}(\phi)}{\cos(\theta)} \end{pmatrix} [-a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d]
\end{aligned}$$

Es decir, finalmente obtuvimos

$$\begin{pmatrix} x''_\psi \\ y''_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{tg}(\theta) \\ -\frac{\text{tg}(\phi)}{\cos(\theta)} \end{pmatrix} [-a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d] \quad (14)$$

lo cual es exactamente lo mismo que se tenía en la ecuación (13), como esperábamos.

Entonces, diseñaremos la realimentación en este sistema de coordenadas solidario a ψ .

Supongamos que en la base canónica, deseamos alcanzar la posición (x_d, y_d) . Entonces, en la base solidaria a ψ , tenemos que la posición objetivo tiene las coordenadas:

$$\begin{pmatrix} x_{\psi,d} \\ y_{\psi,d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix}$$

Llamemos entonces $\hat{x}_\psi = x_\psi - x_{\psi,d}$, y $\hat{y}_\psi = y_\psi - y_{\psi,d}$ a los errores de estas coordenadas respecto de las deseadas. Al igual que en la parte anterior, queremos que \hat{x}_ψ y \hat{y}_ψ tiendan a 0. Es claro que verifican:

$$\begin{cases} \hat{x}''_\psi = x''_\psi - x''_{\psi,d} \\ \hat{y}''_\psi = y''_\psi - y''_{\psi,d} \end{cases}$$

Usando entonces la ecuación (14) podemos escribir:

$$\begin{cases} \hat{x}''_{\psi} = tg(\theta).[-a_z.sg(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d] - x''_{\psi,d} \\ \hat{y}''_{\psi} = -\frac{tg(\phi)}{\cos(\theta)}.[-a_z.sg(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d] - y''_{\psi,d} \end{cases}$$

Procediendo de manera similar, podemos definir:

$$\begin{cases} v_1 = tg(\theta).[-a_z.sg(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d] - x''_{\psi,d} \\ v_2 = -\frac{tg(\phi)}{\cos(\theta)}.[-a_z.sg(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d] - y''_{\psi,d} \end{cases} \quad (15)$$

donde se obtienen los sistemas de la forma:

$$\begin{cases} \hat{x}'_{\psi} = \hat{x}'_{\psi} \\ \hat{x}''_{\psi} = v_1 \\ \hat{y}'_{\psi} = \hat{y}'_{\psi} \\ \hat{y}''_{\psi} = v_2 \end{cases}$$

Estos sistemas son de la forma que habíamos obtenido al diseñar la realimentación en la primer parte, y podemos usar la realimentación que obtuvimos en la ecuación (10).

Es decir, que tomaremos a_x, a_y, c_x, c_y constantes positivas, y definimos:

$$\begin{cases} v_1 = -a_x.sg(\hat{x}'_{\psi} + c_x \hat{x}_{\psi}) - c_x \hat{x}'_{\psi} \\ v_2 = -a_y.sg(\hat{y}'_{\psi} + c_y \hat{y}_{\psi}) - c_y \hat{y}'_{\psi} \end{cases} \quad (16)$$

Entonces usando las ecuaciones (15) y (16), tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} tg(\theta).[-a_z.sg(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d] - x''_{\psi,d} = -a_x.sg(\hat{x}'_{\psi} + c_x \hat{x}_{\psi}) - c_x \hat{x}'_{\psi} \\ -\frac{tg(\phi)}{\cos(\theta)}.[-a_z.sg(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d] - y''_{\psi,d} = -a_y.sg(\hat{y}'_{\psi} + c_y \hat{y}_{\psi}) - c_y \hat{y}'_{\psi} \end{cases}$$

Despejando de la primer ecuación θ obtenemos:

$$\theta = Arctg\left(\frac{-a_x.sg(\hat{x}'_{\psi} + c_x \hat{x}_{\psi}) - c_x \hat{x}'_{\psi} + x''_{\psi,d}}{-a_z.sg(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d}\right) \quad (17)$$

Luego, podemos usar este θ en la segunda ecuación y despejar ϕ :

$$\phi = \text{Arctg} \left(\cos(\theta) \cdot \frac{-a_y \cdot \text{sg}(\hat{y}'_\psi + c_y \hat{y}_\psi) - c_y \hat{y}'_\psi + y''_{\psi,d}}{a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)) + c_z(z' - z'_d) - g - z''_d} \right) \quad (18)$$

donde θ es la expresión de la ecuación (17).

Recordando que

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_\psi \\ \hat{y}_\psi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_\psi \\ y_\psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{\psi,d} \\ y_{\psi,d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix} \right)$$

podemos escribir las realimentaciones ϕ y θ en función de las coordenadas originales.

Ahora, para obtener estos ángulos, debemos usar los controladores de la primer parte, usando los ángulos conseguidos de las ecuaciones (17) y (18) como ángulos deseados.

Es decir que el controlador para este caso (para conseguir el ángulo ψ_d y las posiciones (x_d, y_d, z_d)) tiene la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_{\psi,d} \\ y_{\psi,d} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{x}_\psi \\ \hat{y}_\psi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix} \right) \\ \theta_d = \text{Arctg} \left(\frac{-a_x \cdot \text{sg}(\hat{x}'_\psi + c_x \hat{x}_\psi) - c_x \hat{x}'_\psi + x''_{\psi,d}}{-a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d} \right) \\ \phi_d = \text{Arctg} \left(\cos(\theta_d) \cdot \frac{-a_y \cdot \text{sg}(\hat{y}'_\psi + c_y \hat{y}_\psi) - c_y \hat{y}'_\psi + y''_{\psi,d}}{a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)) + c_z(z' - z'_d) - g - z''_d} \right) \\ U_1 = \frac{m}{\cos(\theta)\cos(\phi)} \left(-a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d \right) \\ U_2 = \frac{I_x}{I} \cdot \left(-a_\phi \cdot \text{sg}(\phi' + c_\phi \phi - \phi'_d - c_\phi \phi_d) - c_\phi(\phi' - \phi'_d) - \frac{1}{I_x} [(I_y - I_z)\psi'\theta' - J_r \theta' \Omega] + \phi''_d \right) \\ U_3 = \frac{I_y}{I} \cdot \left(-a_\theta \cdot \text{sg}(\theta' + c_\theta \theta - \theta'_d - c_\theta \theta_d) - c_\theta(\theta' - \theta'_d) - \frac{1}{I_y} [(I_z - I_x)\psi'\phi' + J_r \phi' \Omega] + \theta''_d \right) \\ U_4 = I_z \cdot \left(-a_\psi \cdot \text{sg}(\psi' + c_\psi \psi - \psi'_d - c_\psi \psi_d) - c_\psi(\psi' - \psi'_d) - \frac{1}{I_z} [(I_x - I_y)(\theta')(\phi')] + \psi''_d \right) \end{array} \right.$$

Siendo los a_i y c_i constantes positivas para todo $i \in \{x, y, z, \phi, \theta, \psi\}$.

3.2.2. Cálculo exacto para cualquier ψ

Si ψ varía mucho, no es posible considerar $\psi' \approx 0$, entonces al derivar la expresión

$$\begin{pmatrix} x_\psi \\ y_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

obtenemos exactamente

$$\begin{pmatrix} x'_\psi \\ y'_\psi \end{pmatrix} = \psi' \begin{pmatrix} -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \\ -\cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Luego, al volver a derivar esta expresión se llega a:

$$\begin{pmatrix} x''_\psi \\ y''_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \psi'^2 \right) + \begin{pmatrix} -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \\ -\cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \psi'' + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} 2\psi' \right) \quad (19)$$

Usando la ecuación (12) de evolución de estados de x e y , se obtiene luego de operar:

$$\begin{aligned} x''_\psi &= \text{tg}(\theta) \cdot [-a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)] - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d + \\ &\quad + \cos(\psi)(y\psi'' + 2\psi'y' - x\psi'^2) + \text{sen}(\psi)(-x\psi'' - 2x'\psi' - y\psi'^2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y''_\psi &= -\frac{\text{tg}(\theta)}{\cos(\theta)} \cdot [-a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)] - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d + \\ &\quad + \cos(\psi)(-x\psi'' - 2x'\psi' - y\psi'^2) + \text{sen}(\psi)(-y\psi'' - 2y'\psi' + x\psi'^2) \end{aligned}$$

Se procede del mismo modo que en el cálculo aproximado, considerando los errores $\hat{x}_\psi = x_\psi - x_{\psi,d}$ y $\hat{y}_\psi = y_\psi - y_{\psi,d}$, los cuales cumplirán entonces:

$$\begin{cases} \hat{x}''_\psi = x''_\psi - x''_{\psi,d} \\ \hat{y}''_\psi = y''_\psi - y''_{\psi,d} \end{cases}$$

Si definimos entonces

$$v_1 = tg(\theta) \cdot [-a_z \cdot sg(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)] - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d + \cos(\psi)(y\psi'' + 2\psi'y' - x\psi'^2) + \text{sen}(\psi)(-x\psi'' - 2x'\psi' - y\psi'^2) - x''_{\psi,d} \quad (20)$$

y

$$v_2 = -\frac{tg(\phi)}{\cos(\theta)} \cdot [-a_z \cdot sg(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)] - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d + \cos(\psi)(-x\psi'' - 2x'\psi' - y\psi'^2) + \text{sen}(\psi)(-y\psi'' - 2y'\psi' + x\psi'^2) - y''_{\psi,d} \quad (21)$$

volvemos a tener sistemas de la forma:

$$\begin{cases} \hat{x}'_{\psi} = \hat{x}'_{\psi} \\ \hat{x}''_{\psi} = v_1 \\ \hat{y}'_{\psi} = \hat{y}'_{\psi} \\ \hat{y}''_{\psi} = v_2 \end{cases}$$

Al igual que en la ecuación (16), para llevar \hat{x}_{ψ} y \hat{y}_{ψ} a 0 consideramos:

$$\begin{cases} v_1 = -a_x \cdot sg(\hat{x}'_{\psi} + c_x \hat{x}_{\psi}) - c_x \hat{x}'_{\psi} \\ v_2 = -a_y \cdot sg(\hat{y}'_{\psi} + c_y \hat{y}_{\psi}) - c_y \hat{y}'_{\psi} \end{cases}$$

Igualando esto a las ecuaciones (20) y (21), podemos despejar θ y ϕ :

$$\theta = \text{Arctg} \left(\frac{-a_x \cdot sg(\hat{x}'_{\psi} + c_x \hat{x}_{\psi}) - c_x \hat{x}'_{\psi} + x''_{\psi,d}}{-a_z \cdot sg(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)] - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d} + \frac{-\cos(\psi)(y\psi'' + 2\psi'y' - x\psi'^2) - \text{sen}(\psi)(-x\psi'' - 2x'\psi' - y\psi'^2)}{-a_z \cdot sg(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)] - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d} \right)$$

y

$$\phi = \text{Arctg} \left(\cos(\theta) \cdot \frac{-a_y \cdot sg(\hat{y}'_{\psi} + c_y \hat{y}_{\psi}) - c_y \hat{y}'_{\psi} + y''_{\psi,d}}{a_z \cdot sg(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)] + c_z(z' - z'_d) - g - z''_d} + \cos(\theta) \cdot \frac{-\cos(\psi)(-x\psi'' - 2x'\psi' - y\psi'^2) - \text{sen}(\psi)(-y\psi'' - 2y'\psi' + x\psi'^2)}{a_z \cdot sg(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d)] + c_z(z' - z'_d) - g - z''_d} \right)$$

Entonces, el controlador para controlar la posición y el ángulo ψ resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_{\psi,d} \\ y_{\psi,d} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sen(\psi) \\ -\sen(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{x}_\psi \\ \hat{y}_\psi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sen(\psi) \\ -\sen(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix} \right) \\ \theta_d = \text{Arctg} \left(\frac{-a_x \cdot \text{sg}(\hat{x}'_\psi + c_x \hat{x}_\psi) - c_x \hat{x}'_\psi + x''_{\psi,d} - \cos(\psi)(y\psi'' + 2\psi' y' - x\psi'^2) - \sen(\psi)(-x\psi'' - 2x' \psi' - y\psi'^2)}{-a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d} \right) \\ \phi_d = \text{Arctg} \left(\cos(\theta_d) \cdot \frac{-a_y \cdot \text{sg}(\hat{y}'_\psi + c_y \hat{y}_\psi) - c_y \hat{y}'_\psi + y''_{\psi,d} - \cos(\psi)(-x\psi'' - 2x' \psi' - y\psi'^2) - \sen(\psi)(-y\psi'' - 2y' \psi' + x\psi'^2)}{a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d) + c_z(z' - z'_d) - g - z''_d} \right) \\ U_1 = \frac{m}{\cos(\theta)\cos(\phi)} \left(-a_z \cdot \text{sg}(z' + c_z z - z'_d - c_z z_d) - c_z(z' - z'_d) + g + z''_d \right) \\ U_2 = \frac{I_x}{I} \cdot \left(-a_\phi \cdot \text{sg}(\phi' + c_\phi \phi - \phi'_d - c_\phi \phi_d) - c_\phi(\phi' - \phi'_d) - \frac{1}{I_x} [(I_y - I_z)\psi'\theta' - J_r \theta' \Omega] + \phi''_d \right) \\ U_3 = \frac{I_y}{I} \cdot \left(-a_\theta \cdot \text{sg}(\theta' + c_\theta \theta - \theta'_d - c_\theta \theta_d) - c_\theta(\theta' - \theta'_d) - \frac{1}{I_y} [(I_z - I_x)\psi'\phi' + J_r \phi' \Omega] + \theta''_d \right) \\ U_4 = I_z \cdot \left(-a_\psi \cdot \text{sg}(\psi' + c_\psi \psi - \psi'_d - c_\psi \psi_d) - c_\psi(\psi' - \psi'_d) - \frac{1}{I_z} [(I_x - I_y)(\theta')(\phi')] + \psi''_d \right) \end{array} \right.$$

Siendo los a_i y c_i constantes positivas para todo $i \in \{x, y, z, \phi, \theta, \psi\}$.

3.3. Elección de constantes

Recordemos cómo interfieren estas constantes a_i y c_i (lo cual se mencionó en la primer parte) en la dinámica del sistema:

Llamemos $T \in \{\hat{x}_\phi, \hat{y}_\phi, \hat{z}, \hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}\}$, siendo estas variables las definidas en las partes anteriores (es decir, son los errores con respecto a los deseados), y llamemos a_T y c_T a las constantes del controlador correspondiente a T .

Entonces tenemos definido:

$$s = T' + c_T T$$

Por como construimos los controladores, tenemos que s es una recta a trozos. En el primer tramo $[0, t_{s=0,T}]$ es una recta con pendiente $-a_T \cdot \text{sg}(s)$ que se anula en $t_{s=0,T}$.

Entonces:

$$t_{s=0,T} = \frac{s(0)}{a_T \cdot \text{sg}(s(0))} = \frac{|s(0)|}{a_T} = \frac{|T'(0) + c_T T(0)|}{a_T} > 0$$

A partir de tiempo $t_{s=0,T}$, tenemos que s se mantendrá constante 0. Esto implica entonces que (como $T' + c_T T = 0$) que T convergerá a 0 de manera exponencial. Es decir:

$$T(t) = T(t_{s=0,T}) \cdot e^{-c_T(t-t_{s=0,T})} \quad \forall t > t_{s=0,T}$$

Por lo dicho anteriormente, el tiempo de decaimiento (tiempo en que tarda T en tomar el valor $\frac{T(t_{s=0,T})}{e}$, midiendo este tiempo desde el instante $t_{s=0,T}$) es:

$$t_{dec,T} = \frac{1}{c_T}$$

Es decir que tenemos:

$$\begin{cases} t_{s=0,T} = \frac{|T'(0) + c_T T(0)|}{a_T} \\ t_{dec,T} = \frac{1}{c_T} \end{cases}$$

Es claro que buscamos que ambos tiempos sean pequeños, de modo de que la variable T (que mide el error con lo deseado) tienda rápidamente a 0.

Esto implica que conviene elegir a_T muy grande. Mientras tanto, no es muy claro para c_T qué es lo más conveniente, pues un valor muy grande de c_T resulta en un valor más pequeño de $t_{dec,T}$ pero podría dar un valor muy grande de $t_{s=0,T}$.

Además, debe tenerse en cuenta que el controlador de posición en el plano (x, y) funciona suponiendo que tenemos muy controlados los ángulos ϕ y θ . Es decir que es de vital importancia que ϕ y θ respondan de manera rápida para controlar correctamente la posición.

3.4. Simulaciones

Los scripts de *Matlab* usados para simular se encuentran en

<https://drive.google.com/drive/folders/1x4AGPihBmGje9t6CteVhxlJ06W2hfABI?usp=sharing>

y se ejecutan corriendo el script *drones.m*, y asignando el valor 0 a la variable *controlador*.

Se utilizaron los siguientes valores [1] para las simulaciones:

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
K_T	$1,22641 \times 10^{-4} \text{ kg.m}$	m	$1,336 \text{ kg}$
d	$6,48447 \times 10^{-6} \text{ kg.m}^2$	g	$9,81 \text{ m/s}^2$
I_x	$0,0259 \text{ kg.m}^2$	l	$0,22225 \text{ m}$
I_y	$0,0259 \text{ kg.m}^2$	J_r	$0,002 \text{ kg.m}^2$
I_z	$0,039 \text{ kg.m}^2$	Ω	0 s^{-1}

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
a_x	5	c_x	2
a_y	5	c_y	2
a_z	5	c_z	2
a_ϕ	5	c_ϕ	2
a_θ	5	c_θ	2
a_ψ	5	c_ψ	2

También se verificó el seguimiento en los ángulos θ y ϕ en estas trayectorias (recordando que θ_d y ϕ_d dependen de las otras posiciones deseadas y de las demás variables de estado).

En todas las simulaciones se usó el controlador exacto (de la sección 3,2,2) y se partió del estado nulo $X_0 = 0$, es decir que el dron parte del reposo desde el origen de coordenadas.

Los resultados obtenidos en dichas simulaciones se pueden ver en las figuras 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

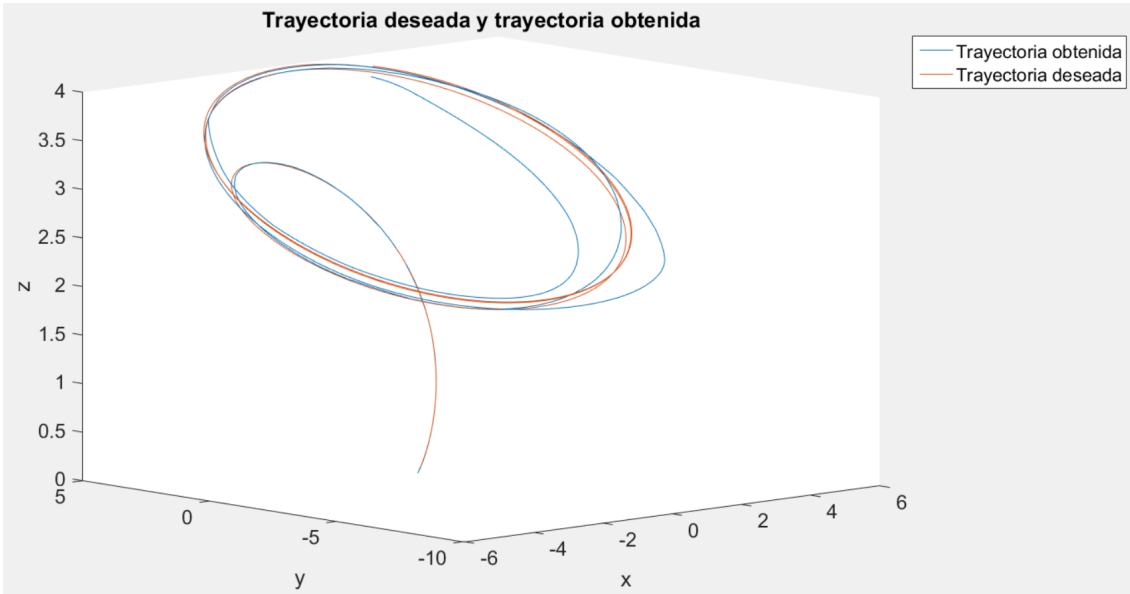
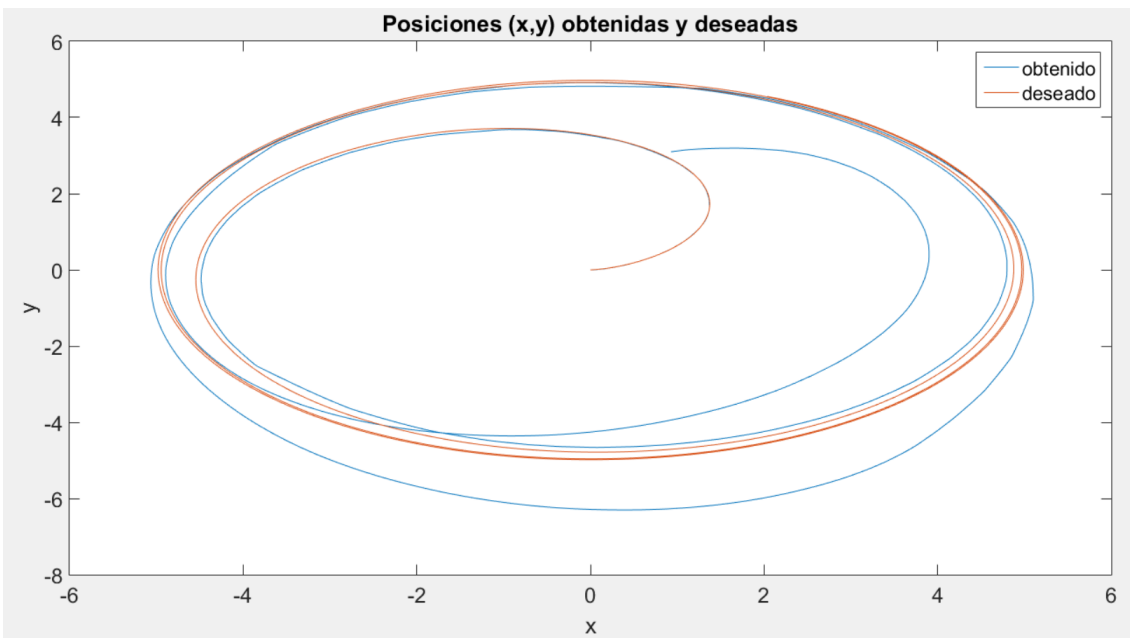


Figura 2: Trayectoria tridimensional de los drones

Figura 3: Trayectoria en el plano xy

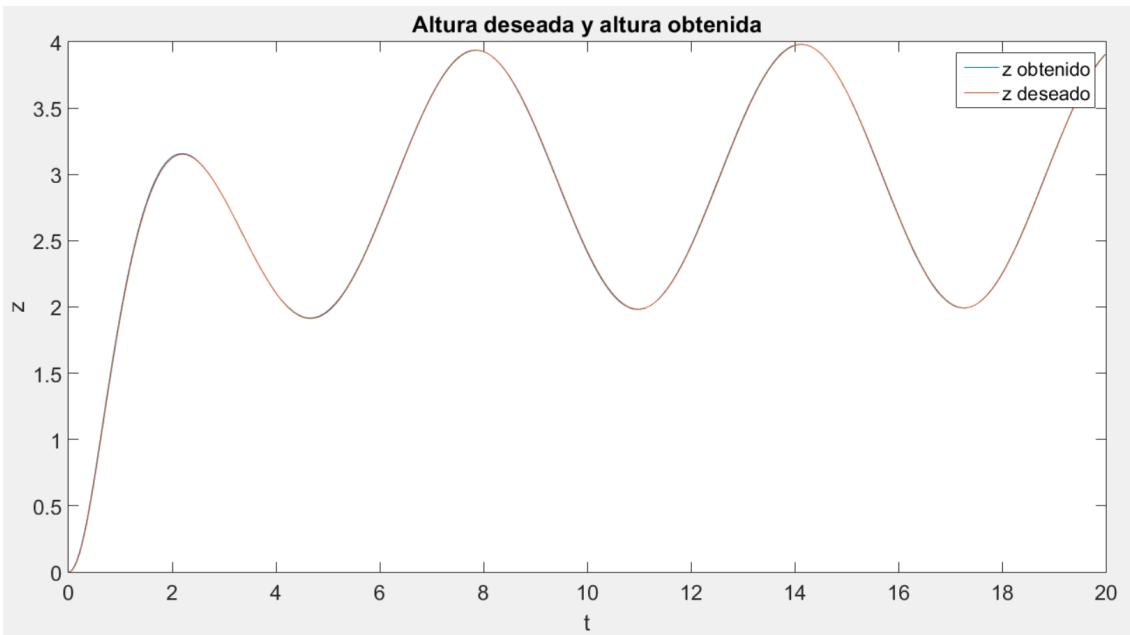
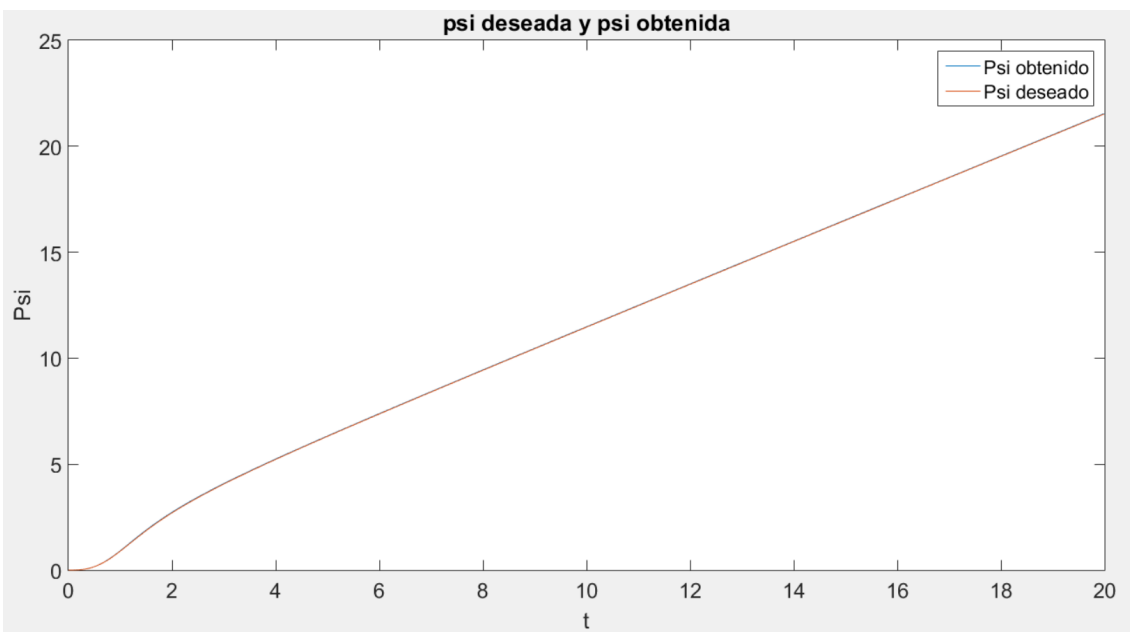
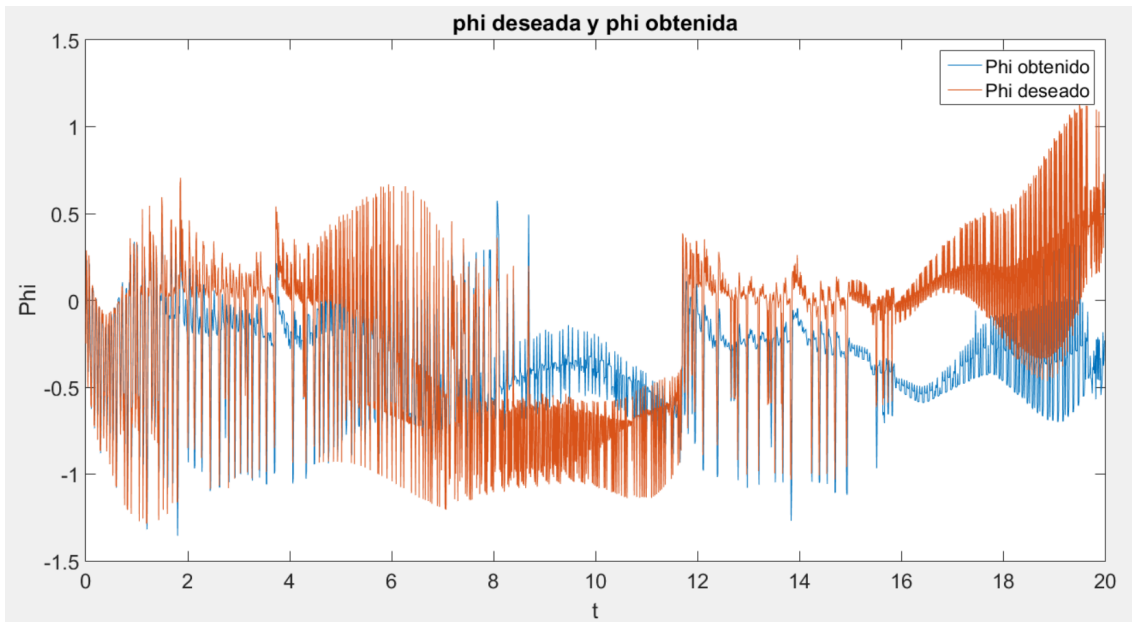
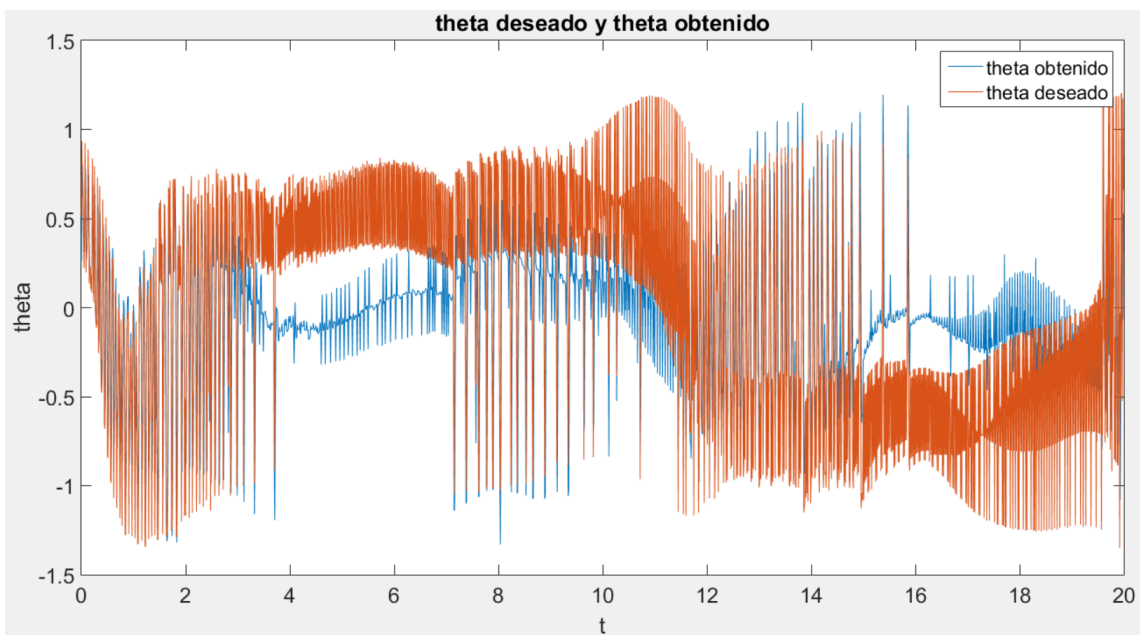


Figura 4: Altura de los drones

Figura 5: Evolución de ψ

Figura 6: Evolución de ϕ Figura 7: Evolución de θ

3.5. Eliminación de Chattering

Debido a que la acción de control presenta discontinuidades (como consecuencia de la presencia de la función signo), se pudo verificar la existencia de *chattering*. El mismo se puede presenciar notablemente en la evolución de los ángulos ϕ y θ (figuras 6 y 7), y como el control en las coordenadas (x, y) depende del control de ϕ y θ , se pudo ver que la trayectoria obtenida en el plano xy se distanció bastante de la deseada (figura 3).

Esto puede solucionarse "suavizando" la función signo, es decir, considerando una función continua y suave que la aproxime. Se consideró como aproximación de la función signo a la función

$$sat(x) = \frac{2}{1 + e^{-x}} - 1$$

A partir de esta aproximación, se volvieron a correr los scripts anteriores, y los resultados de estas simulaciones pueden verse en las figuras 8, 9, 10, 11, 12 y 13.

Puede notarse en estas nuevas simulaciones que utilizan la suavización de la función signo, que el seguimiento de la trayectoria deseada se logró de manera mucho más precisa.

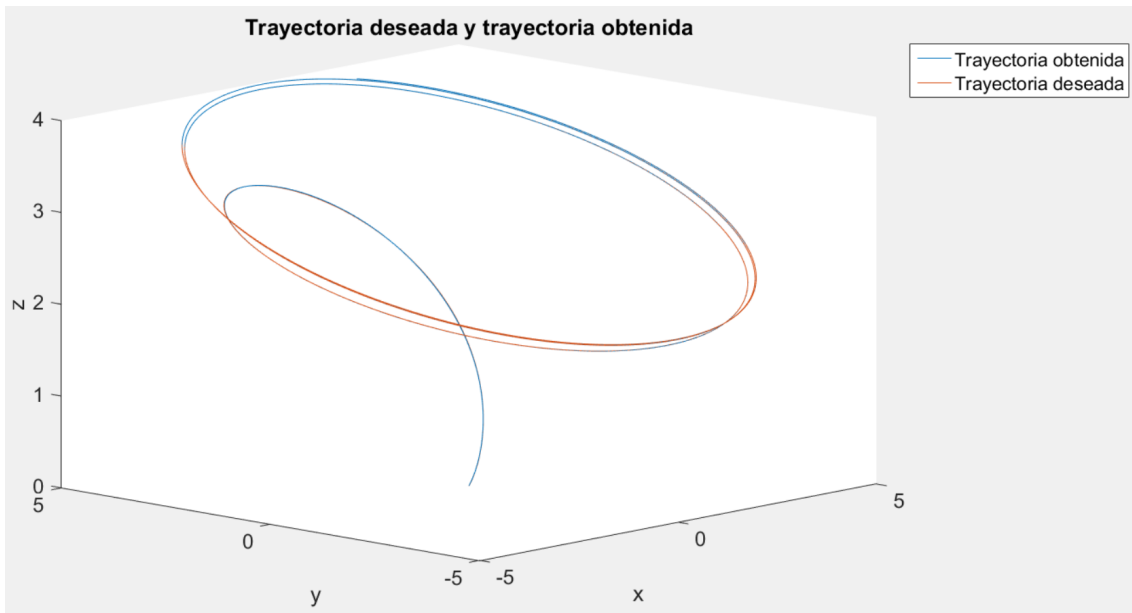
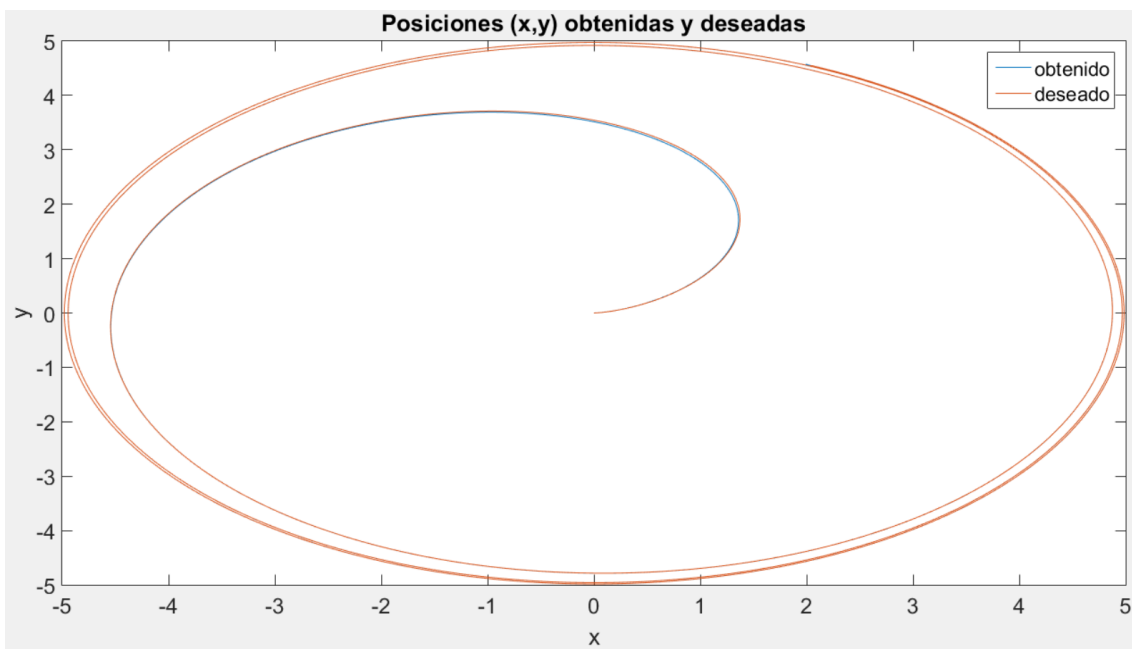


Figura 8: Trayectoria tridimensional de los drones

Figura 9: Trayectoria en el plano xy

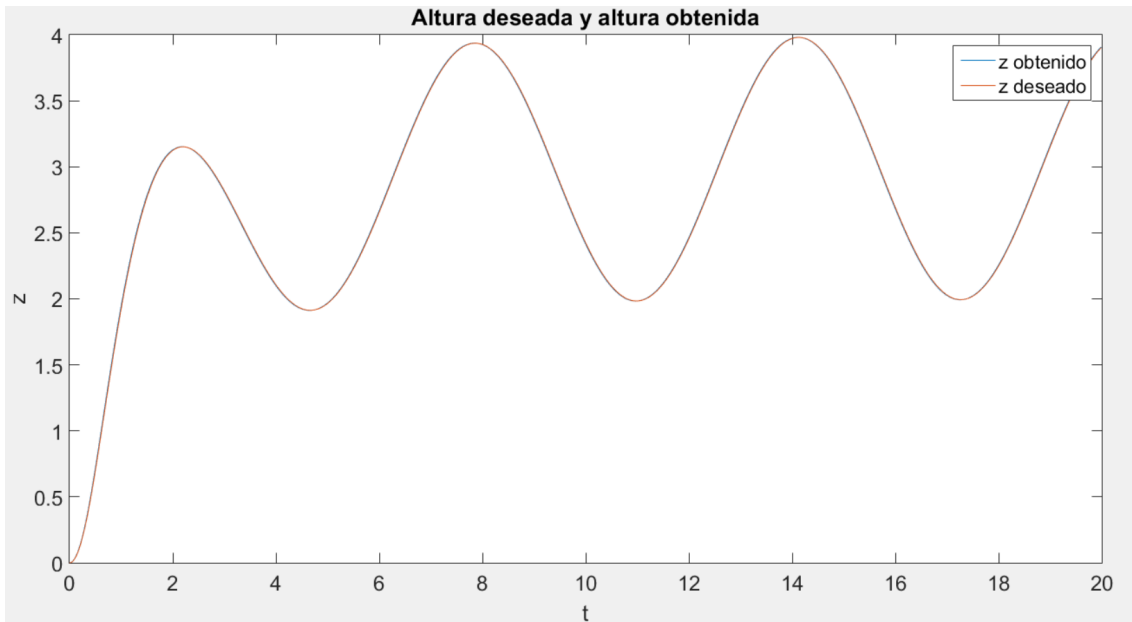
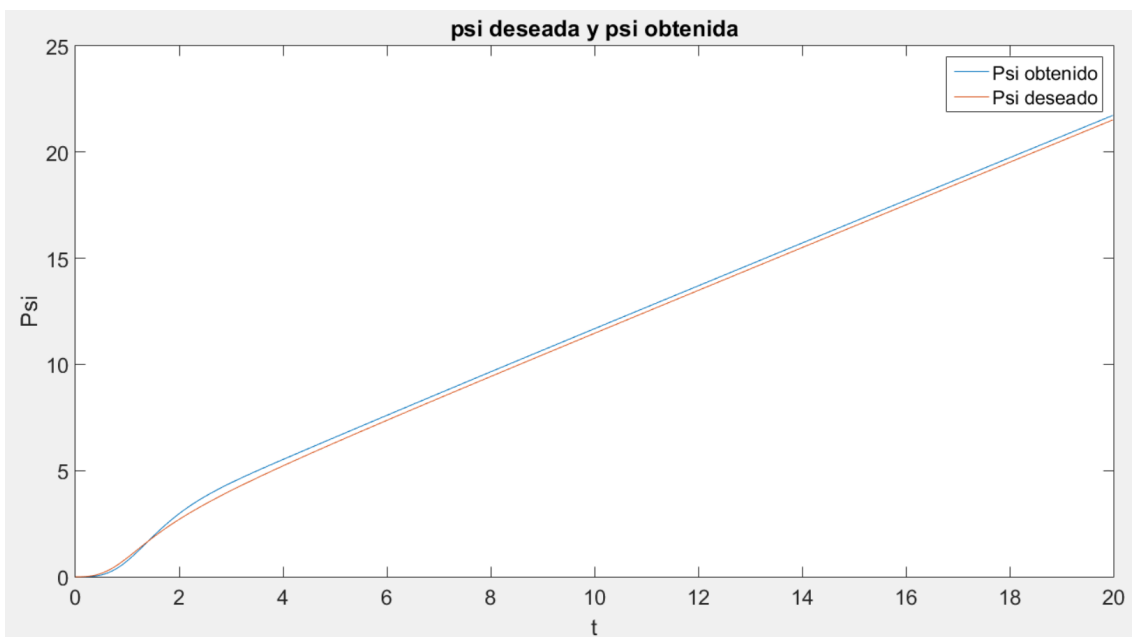
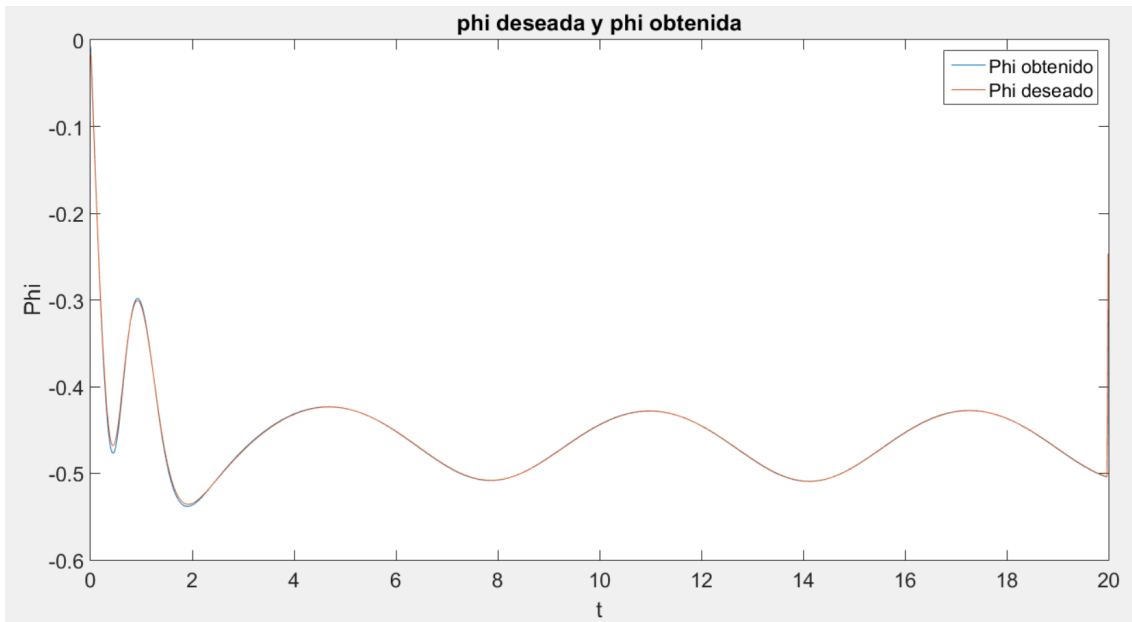
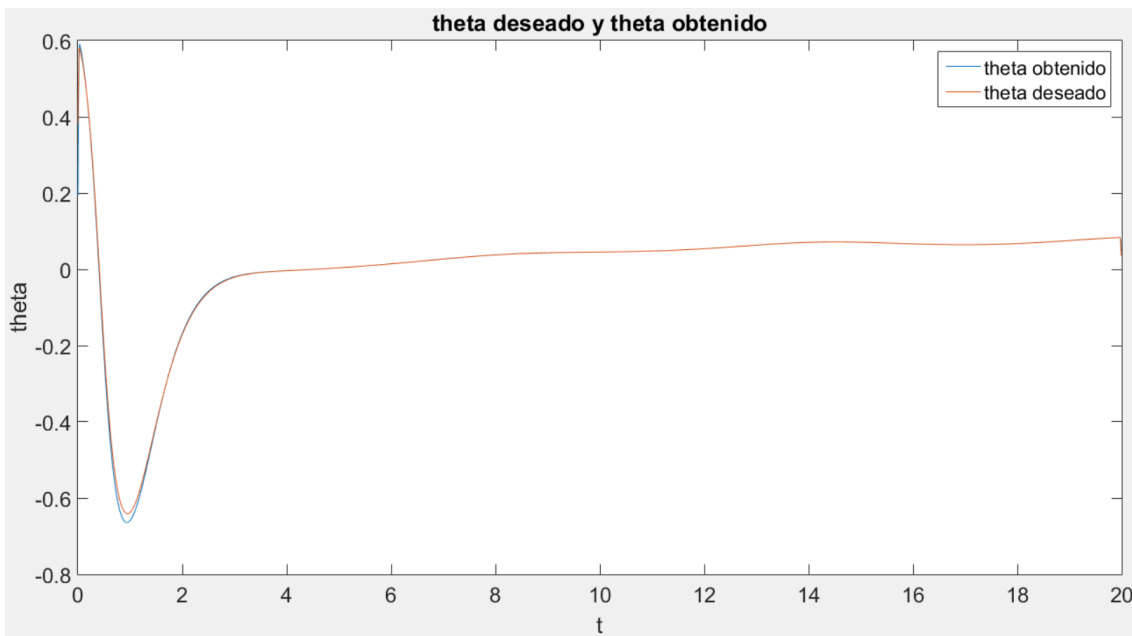


Figura 10: Altura de los drones

Figura 11: Evolución de ψ

Figura 12: Evolución de ϕ Figura 13: Evolución de θ

4. Controladores lineales

4.1. Controlador para ángulos y altura

Si se replantea el problema a partir de la ecuación (7), se puede ver que el mismo puede escribirse matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} T'_i \\ T'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_i \\ T'_i \end{pmatrix} + v_i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} T_i \\ T'_i \end{pmatrix} + v_i \cdot B$$

Siendo el par (A, B) claramente controlable.

Por lo tanto, podemos elegir la posición de los polos del sistema de forma tal que el mismo resulte estable, imponiendo un polinomio característico de la forma

$$p(\lambda) = (\lambda + a) \cdot (\lambda + c) \quad (22)$$

siendo a y c constantes a elegir, que sean reales positivas, o complejos conjugados con parte real positiva. Para obtener dicho polinomio característico, se define el sistema

$$\begin{pmatrix} T'_i \\ T'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_i c_i & -(a_i + c_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_i \\ T'_i \end{pmatrix}$$

Resultando entonces

$$v_i = -T'_i(a_i + c_i) - T_i a_i c_i \quad (23)$$

Entonces, usando las ecuaciones (6) y (23), podemos despejar U_i , obteniendo:

$$\begin{aligned} v_i &= \alpha_i U_i + \beta_i = -T'_i(a_i + c_i) - T_i a_i c_i \\ \Rightarrow U_i &= \frac{-T'_i(a_i + c_i) - T_i a_i c_i - \beta_i}{\alpha_i} \end{aligned}$$

Mediante el mismo procedimiento realizado en la sección de control deslizante, podemos escribir explícitamente las realimentaciones de estados haciendo uso de las ecuaciones (3).

Se obtiene:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(\theta)\cos(\phi)} \cdot \left(-a_z c_z (z - z_d) - (a_z + c_z)(z' - z'_d) + g + z''_d \right) \\ U_2 = \frac{I_x}{I} \cdot \left(-a_\phi c_\phi (\phi - \phi_d) - (a_\phi + c_\phi)(\phi' - \phi'_d) - \frac{1}{I_x} [(I_y - I_z)\psi' \theta' - J_r \theta' \Omega] + \phi''_d \right) \\ U_3 = \frac{I_y}{I} \cdot \left(-a_\theta c_\theta (\theta - \theta_d) - (a_\theta + c_\theta)(\theta' - \theta'_d) - \frac{1}{I_y} [(I_z - I_x)\psi' \phi' + J_r \phi' \Omega] + \theta''_d \right) \\ U_4 = I_z \cdot \left(-a_\psi c_\psi (\psi - \psi_d) - (a_\psi + c_\psi)(\psi' - \psi'_d) - \frac{1}{I_z} [(I_x - I_y)(\theta')(\phi')] + \psi''_d \right) \end{cases} \quad (24)$$

4.2. Controlador de posición

Sustituyendo estos nuevos controladores en las dinámicas de x e y , se vuelven a diseñar a los ángulos deseados θ y ϕ de modo de poder controlar la trayectoria del dron.

Al igual que como se procedió en el cálculo exacto en la sección 3,2,2, se vuelve a calcular la dinámica en el plano (x, y) en coordenadas solidarias al ángulo ψ , como en la ecuación (19) aunque usando las nuevas expresiones de las realimentaciones U_i en x'' e y'' . Desarrollando la ecuación (19) con las nuevas realimentaciones, se obtiene:

$$\begin{aligned} x''_\psi &= tg(\theta) \cdot [-a_z c_z (z - z_d) - (a_z + c_z)(z' - z'_d) + g + z''_d] + \\ &+ \cos(\psi)(y\psi'' + 2\psi'y' - x\psi'^2) + \sin(\psi)(-x\psi'' - 2x'\psi' - y\psi'^2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y''_\psi &= -\frac{tg(\phi)}{\cos(\theta)} \cdot [-a_z c_z (z - z_d) - (a_z + c_z)(z' - z'_d) + g + z''_d] + \\ &+ \cos(\psi)(-x\psi'' - 2x'\psi' - y\psi'^2) + \sin(\psi)(-y\psi'' - 2y'\psi' + x\psi'^2) \end{aligned}$$

Considerando nuevamente los errores $\hat{x}_\psi = x_\psi - x_{\psi,d}$ y $\hat{y}_\psi = y_\psi - y_{\psi,d}$ en las coordenadas solidarias a ψ , tenemos entonces:

$$\begin{cases} \hat{x}''_\psi = x''_\psi - x''_{\psi,d} \\ \hat{y}''_\psi = y''_\psi - y''_{\psi,d} \end{cases}$$

Usando las expresiones de x''_ψ y y''_ψ obtenida, podemos definir:

$$v_1 = tg(\theta) \cdot [-a_z c_z (z - z_d) - (a_z + c_z)(z' - z'_d) + g + z''_d] + \quad (25)$$

$$+ \cos(\psi)(y\psi'' + 2\psi'y' - x\psi'^2) + \text{sen}(\psi)(-x\psi'' - 2x'\psi' - y\psi'^2) - x''_{\psi,d}$$

y

$$v_2 = -\frac{tg(\phi)}{\cos(\theta)} \cdot [-a_z c_z (z - z_d) - (a_z + c_z)(z' - z'_d) + g + z''_d] + \quad (26)$$

$$+ \cos(\psi)(-x\psi'' - 2x'\psi' - y\psi'^2) + \text{sen}(\psi)(-y\psi'' - 2y'\psi' + x\psi'^2) - y''_{\psi}$$

Para obtener los sistemas de la forma:

$$\begin{cases} \hat{x}'_{\psi} = \hat{x}'_{\psi} \\ \hat{x}''_{\psi} = v_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{y}'_{\psi} = \hat{y}'_{\psi} \\ \hat{y}''_{\psi} = v_2 \end{cases}$$

Estos sistemas los podemos estabilizar con los controladores lineales como los que se muestran en la ecuación (23). Es decir que tendremos entonces:

$$\begin{cases} v_1 = -(a_x + c_x)\hat{x}'_{\psi} - a_x c_x \hat{x}_{\psi} \\ v_2 = -(a_y + c_y)\hat{y}'_{\psi} - a_y c_y \hat{y}_{\psi} \end{cases}$$

Igualando esto a las ecuaciones (25) y (26) podemos despejar los ángulos deseados θ y ϕ , obteniendo entonces:

$$\theta = \text{Arctg} \left(\frac{-(a_x + c_x)\hat{x}'_{\psi} - a_x c_x \hat{x}_{\psi} + x''_{\psi,d}}{-a_z c_z (z - z_d) - (a_z + c_z)(z' - z'_d) + g + z''_d} + \right.$$

$$\left. + \frac{-\cos(\psi)(y\psi'' + 2\psi'y' - x\psi'^2) - \text{sen}(\psi)(-x\psi'' - 2x'\psi' - y\psi'^2)}{-a_z c_z (z - z_d) - (a_z + c_z)(z' - z'_d) + g + z''_d} \right)$$

y

$$\phi = \text{Arctg} \left(\cos(\theta) \cdot \frac{-(a_y + c_y)\hat{y}'_{\psi} - a_y c_y \hat{y}_{\psi} + y''_{\psi,d}}{a_z c_z (z - z_d) + (a_z + c_z)(z' - z'_d) + -g - z''_d} + \right.$$

$$\left. + \cos(\theta) \cdot \frac{-\cos(\psi)(-x\psi'' - 2x'\psi' - y\psi'^2) - \text{sen}(\psi)(-y\psi'' - 2y'\psi' + x\psi'^2)}{a_z c_z (z - z_d) + (a_z + c_z)(z' - z'_d) + -g - z''_d} \right)$$

Es decir que el controlador obtenido para controlar la posición y al ángulo ψ es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_{\psi,d} \\ y_{\psi,d} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{x}_\psi \\ \hat{y}_\psi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix} \right) \\ \theta_d = \text{Arctg} \left(\frac{-(a_x+c_x)\hat{x}'_\psi - a_x c_x \hat{x}_\psi + x''_{\psi,d} - \cos(\psi)(y\psi'' + 2\psi'y' - x\psi'^2) - \text{sen}(\psi)(-x\psi'' - 2x'\psi' - y\psi'^2)}{-a_z c_z (z-z_d) - (a_z+c_z)(z'-z'_d) + g + z''_d} \right) \\ \phi_d = \text{Arctg} \left(\cos(\theta_d) \cdot \frac{-(a_y+c_y)\hat{y}'_\psi - a_y c_y \hat{y}_\psi + y''_{\psi,d} - \cos(\psi)(-x\psi'' - 2x'\psi' - y\psi'^2) - \text{sen}(\psi)(-y\psi'' - 2y'\psi' + x\psi'^2)}{a_z c_z (z-z_d) + (a_z+c_z)(z'-z'_d) - g - z''_d} \right) \\ U_1 = \frac{m}{\cos(\theta)\cos(\phi)} \cdot \left(-a_z c_z (z-z_d) - (a_z+c_z)(z'-z'_d) + g + z''_d \right) \\ U_2 = \frac{I_x}{I} \cdot \left(-a_\phi c_\phi (\phi - \phi_d) - (a_\phi + c_\phi)(\phi' - \phi'_d) - \frac{1}{I_x} [(I_y - I_z)\psi'\theta' - J_r \theta' \Omega] + \phi''_d \right) \\ U_3 = \frac{I_y}{I} \cdot \left(-a_\theta c_\theta (\theta - \theta_d) - (a_\theta + c_\theta)(\theta' - \theta'_d) - \frac{1}{I_y} [(I_z - I_x)\psi'\phi' + J_r \phi' \Omega] + \theta''_d \right) \\ U_4 = I_z \cdot \left(-a_\psi c_\psi (\psi - \psi_d) - (a_\psi + c_\psi)(\psi' - \psi'_d) - \frac{1}{I_z} [(I_x - I_y)(\theta')(\phi')] + \psi''_d \right) \end{array} \right.$$

4.3. Elección de constantes

Veamos como interfieren estas constantes a_i y c_i en la dinámica del sistema:

Llamemos a_T y c_T a las constantes del controlador correspondiente a T . Entonces tenemos que dichas constantes determinan la posición de los polos del sistema dado por la ecuación (22), por lo tanto, la ubicación de esos polos determinará la velocidad con que los errores tiendan a cero y la magnitud de sus componentes oscilatorias.

Es decir, cuanto mayor sea la parte imaginaria de estas constantes respecto a su parte real, se tendrán más oscilaciones, y cuanto mayor sea el módulo de estos polos, más rápido tenderán a 0 los errores. En particular, el módulo del polo más chico es el que tendrá mayor incidencia en la velocidad de convergencia de estos errores.

4.4. Simulaciones

Los scripts de *Matlab* usados para simular se encuentran en

<https://drive.google.com/drive/folders/1x4AGPihBmGje9t6CteVhxlJ06W2hfABI?usp=sharing>

y se ejecutan corriendo el script *drones.m*, y asignando el valor 1 a la variable *controlador*.

Se utilizaron los siguientes valores [1] para las simulaciones:

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
K_T	$1,22641 \times 10^{-4} \text{ kg.m}$	m	$1,336 \text{ kg}$
d	$6,48447 \times 10^{-6} \text{ kg.m}^2$	g	$9,81 \text{ m/s}^2$
I_x	$0,0259 \text{ kg.m}^2$	l	$0,22225 \text{ m}$
I_y	$0,0259 \text{ kg.m}^2$	J_r	$0,002 \text{ kg.m}^2$
I_z	$0,039 \text{ kg.m}^2$	Ω	0 s^{-1}

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
a_x	5	c_x	2
a_y	5	c_y	2
a_z	5	c_z	2
a_ϕ	5	c_ϕ	2
a_θ	5	c_θ	2
a_ψ	5	c_ψ	2

También se verificó el seguimiento en los ángulos θ y ϕ en estas trayectorias (recordando que θ_d y ϕ_d dependen de las otras posiciones deseadas y de las demás variables de estado).

En todas las simulaciones se partió del estado nulo $X_0 = 0$, es decir que el dron parte del reposo desde el origen de coordenadas.

Los resultados obtenidos en dichas simulaciones se pueden ver en las figuras 14, 15, 16, 17, 18 y 19.

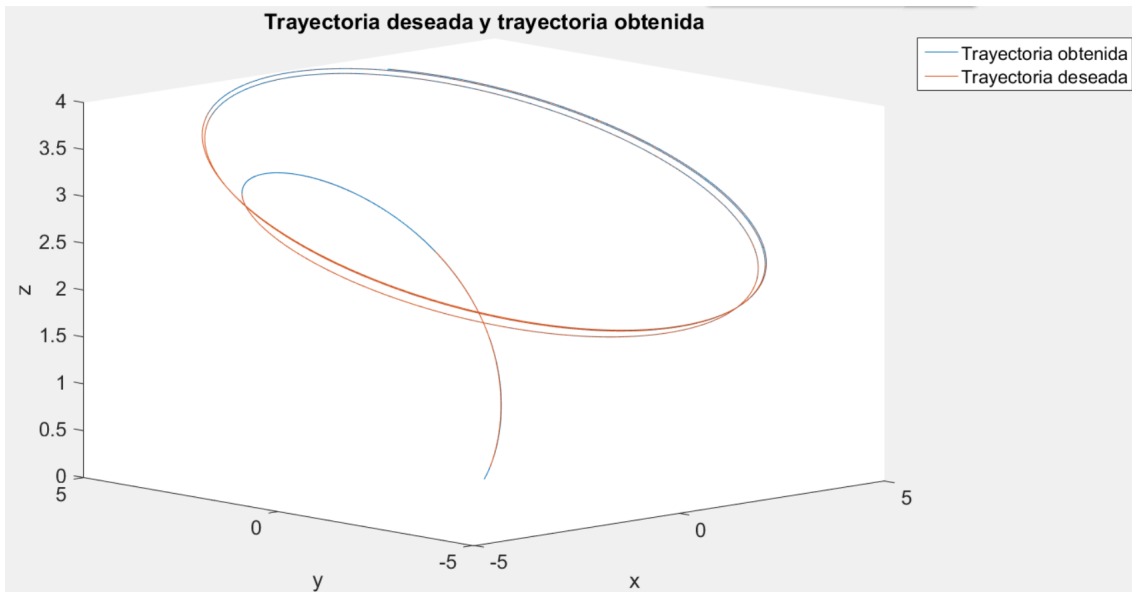
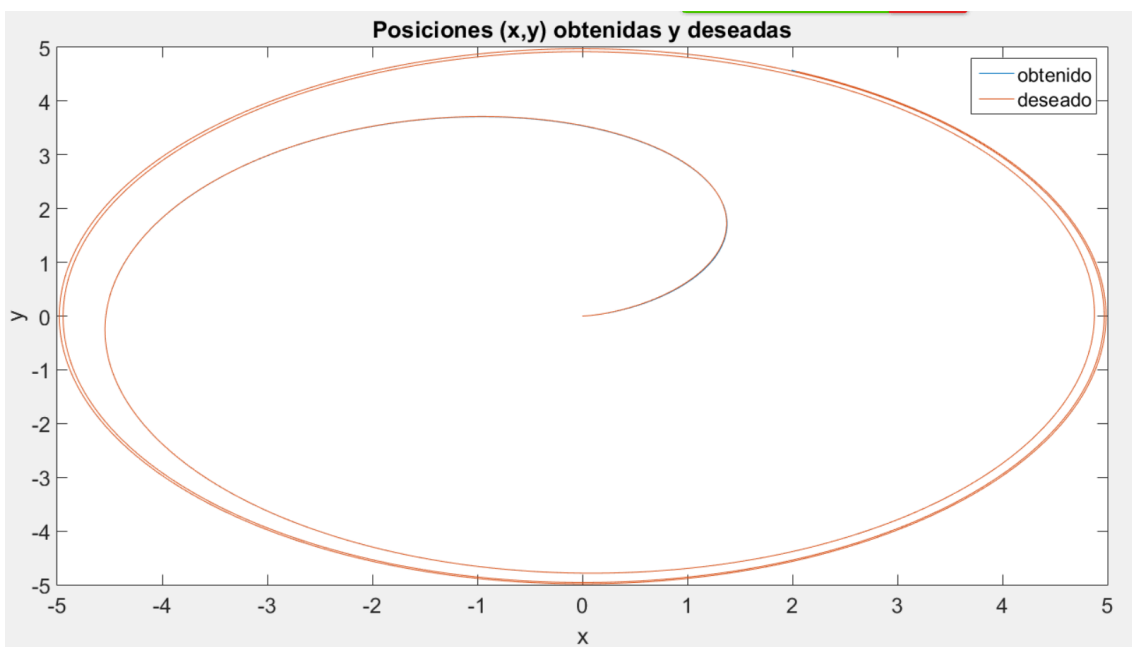


Figura 14: Trayectoria tridimensional de los drones

Figura 15: Trayectoria en el plano xy

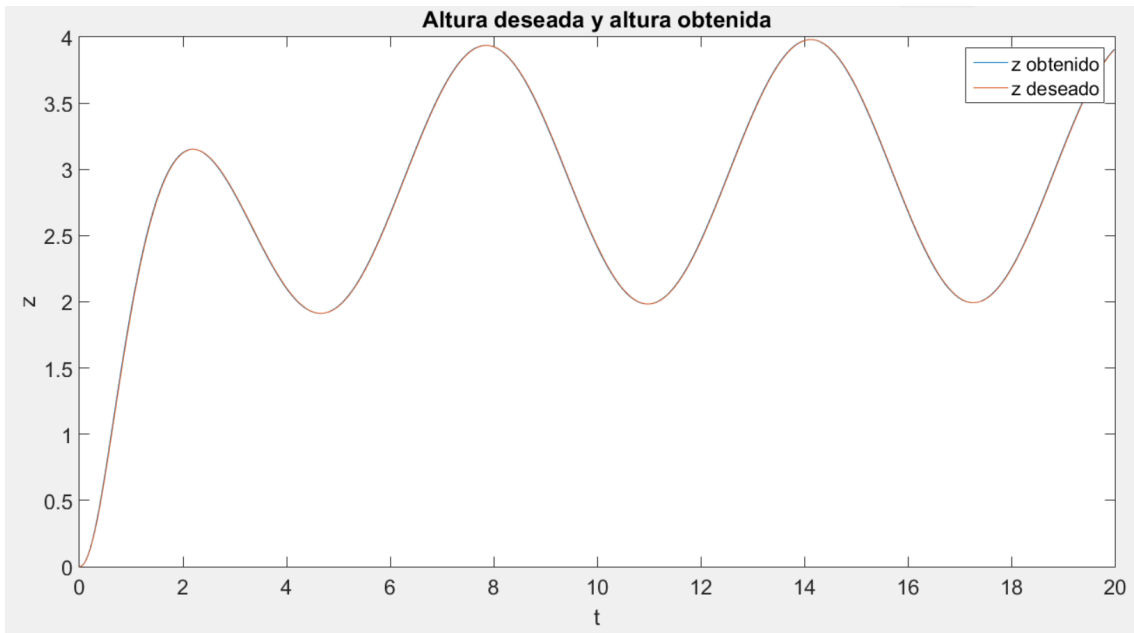
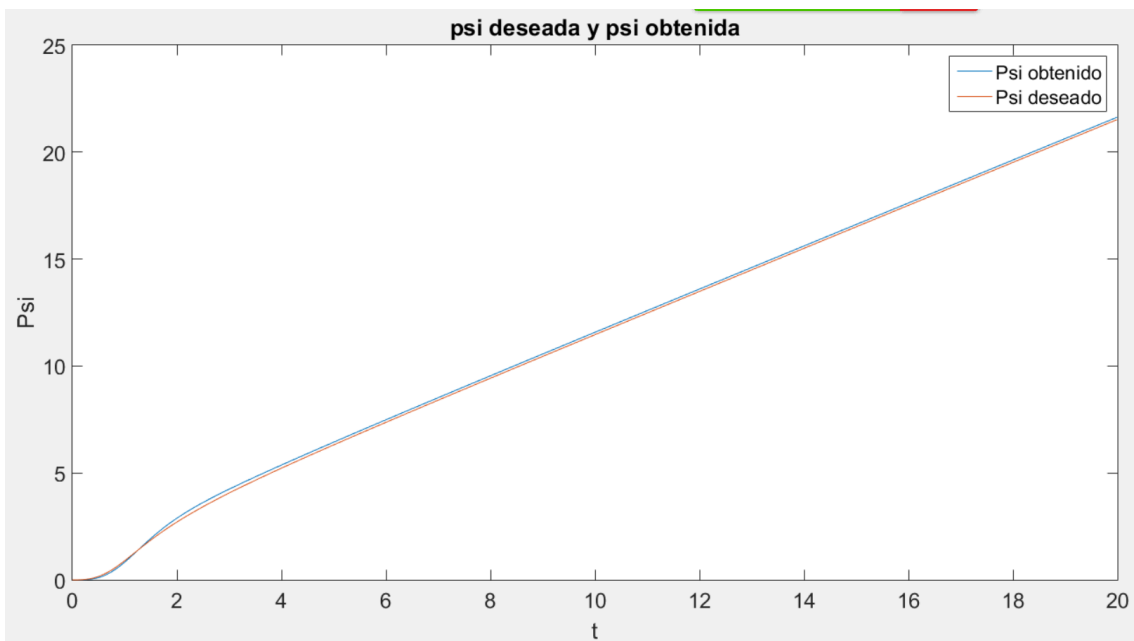
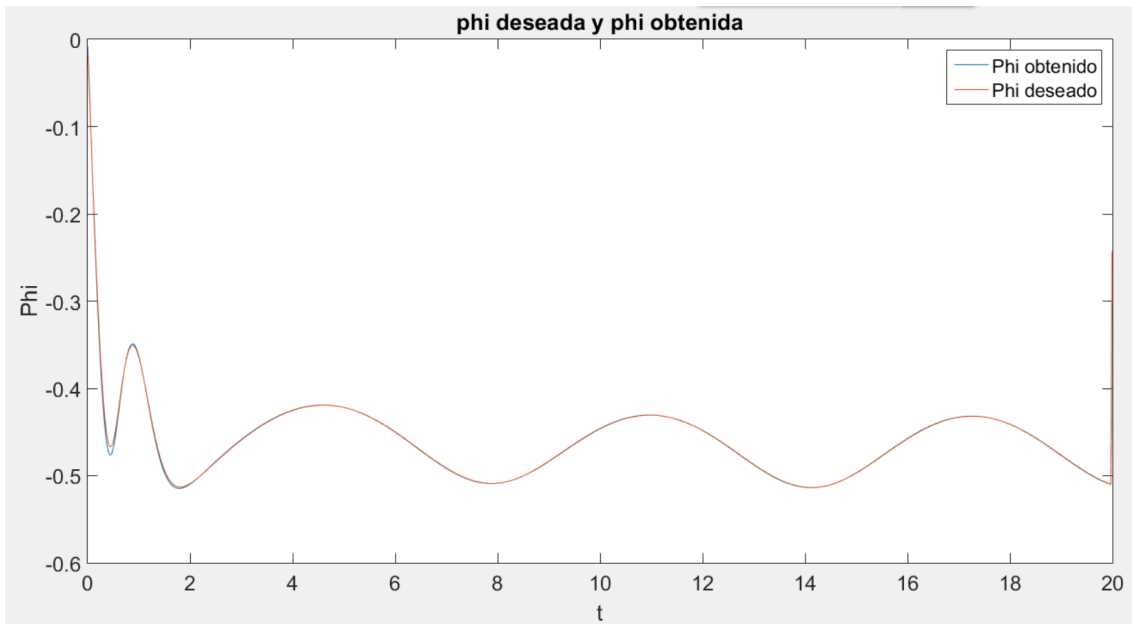
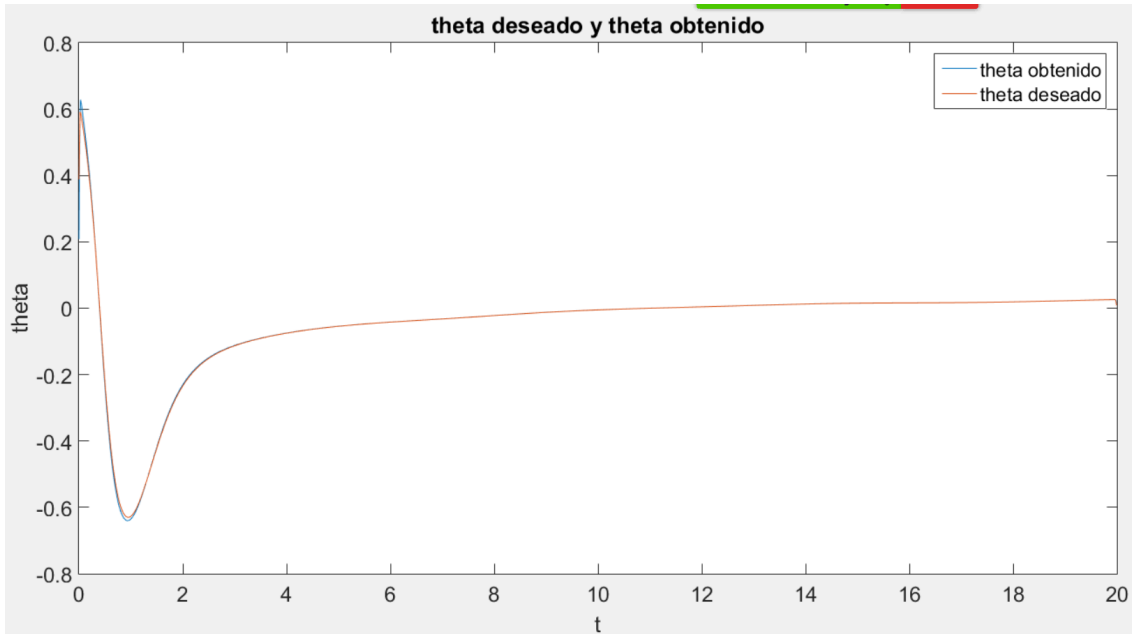


Figura 16: Altura de los drones

Figura 17: Evolución de ψ

Figura 18: Evolución de ϕ Figura 19: Evolución de θ

5. Comparación de controladores

En primera instancia, observando las gráficas obtenidas en ambos casos (controlador deslizante sin chattering y controlador lineal) vemos que no existe una diferencia significativa que determine una gran ventaja de un controlador sobre el otro.

Es por esto, que se debe recurrir a algún tipo de métrica para poder realizar un análisis mas profundo de los errores que presenta cada método con respecto al comportamiento deseado.

Para esto, se decidió tomar los vectores de muestras (equiespaciadas temporalmente de a 0,01s) obtenidos con estos controladores y medir su diferencia con el vector deseado en cada coordenada mediante la norma euclídea (es decir, se calculan todas las normas de las diferencias).

Dicho de otro modo, se calculó:

$$|error_x| = \sqrt{\sum_i |x(t_i) - x_d(t_i)|^2}$$

y de forma análoga para las otras coordenadas (y , z , ϕ , θ y ψ), siendo t_i los instantes de muestreo.

Así se obtuvo:

Lineal	Valor del error	Sliding (sin chattering)	Valor del error
$ error_x $	1,4882	$ error_x $	1,4468
$ error_y $	1,5305	$ error_y $	1,4974
$ error_z $	0,3787	$ error_z $	0,3710
$ error_\phi $	0,1041	$ error_\phi $	0,1057
$ error_\theta $	0,2458	$ error_\theta $	0,2981
$ error_\psi $	5,3425	$ error_\psi $	10,2882

A partir de la tabla anterior, puede verse que no existe una diferencia muy notable entre los errores de ambos controladores.

Dado que los valores de las constantes pueden afectar los errores como se especificó anteriormente, se considera que las pequeñas diferencias presentes en la tabla no son indicativos de una clara ventaja de un método de diseño sobre el otro.

Es decir, que pequeñas variaciones en las constantes de diseño, pueden producir que un controlador aumente o disminuya su error respecto del otro.

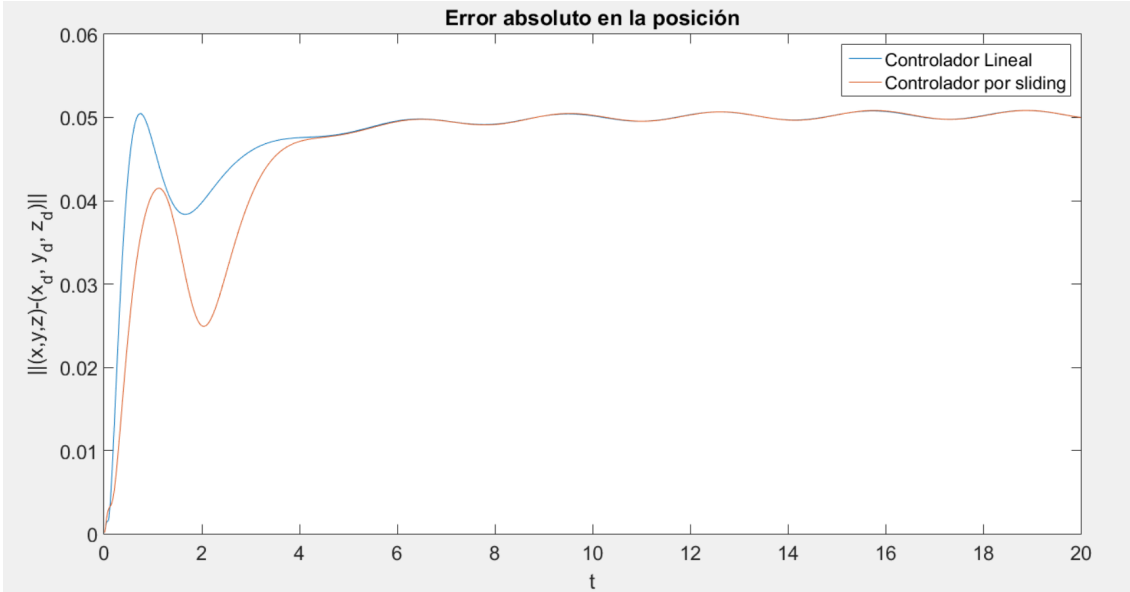


Figura 20: Evolución del error en la posición obtenida con respecto a la posición deseada en ambos controladores

En la figura 20 puede verse la evolución de los errores cometidos por ambos controladores. En la misma se puede apreciar que los órdenes de los errores son similares en ambos controladores.

Como otro posible criterio para diferenciar los controladores, se procedió a realizar un análisis de incertidumbres. Siendo d el parámetro más sensible a las condiciones climáticas y por lo tanto el que puede introducir mayor incertidumbre, se evaluó el error producido en cada controlador al generar una variación en dicho parámetro. Sin embargo, no se logró afectar de manera apreciable los resultados obtenidos en ninguno de los casos, con una variación de hasta el 50% en el parámetro.

Por último se procede a analizar las fuerzas de empuje resultantes en cada motor, que serán en definitiva, las fuerzas que nuestros controladores imponen al sistema realimentado. Esta magnitud, afecta el consumo de energía del dron, por lo que se desea que los valores de T_i sean lo más pequeños posibles.

Dados los controladores U_i obtenidos en cada caso, pueden despejarse las fuerzas T_i de cada motor según el sistema (2). Se aprecia en la figura 21 la evolución de las fuerzas aplicadas por cada motor en el tiempo.

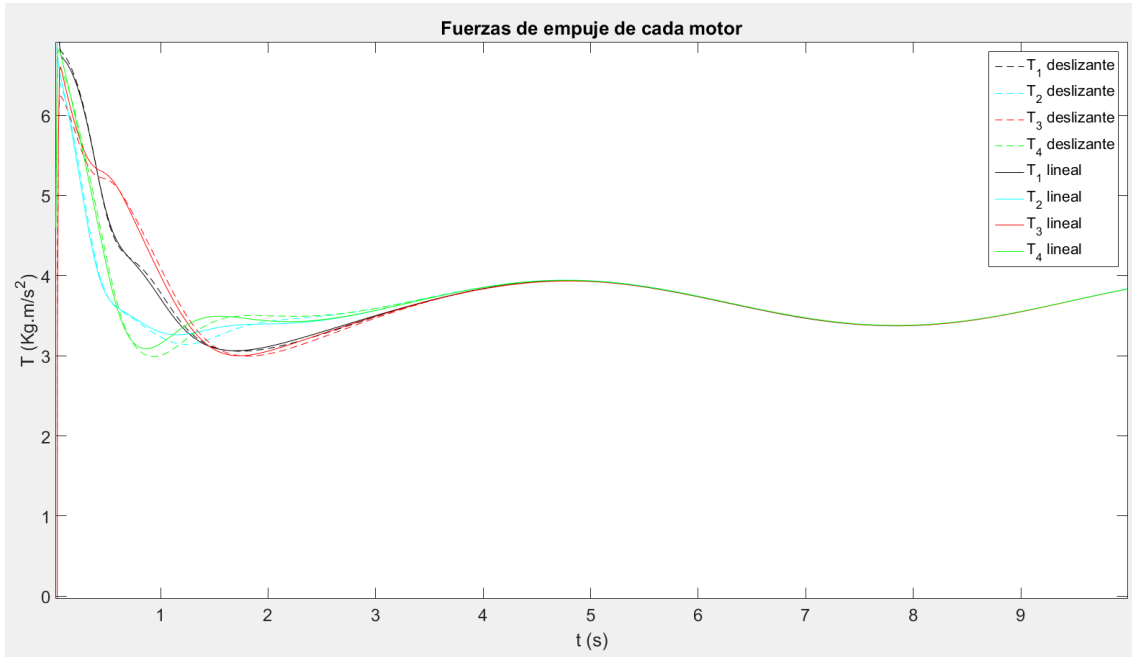


Figura 21: Evolución de la fuerza ejercida por cada motor, en ambos controladores.

Nuevamente, vemos que los resultados obtenidos con ambos diseños resultan similares, y no se aprecian diferencias de magnitud significativa que nos permitan diferenciar los empujes resultantes, dadas las acciones de control de ambos controladores.

Puede repetirse el mismo análisis realizado hasta el momento, con otras trayectorias diferentes, arribando a resultados similares a los ya obtenidos, como lo muestran las figuras 22, 23 y 24

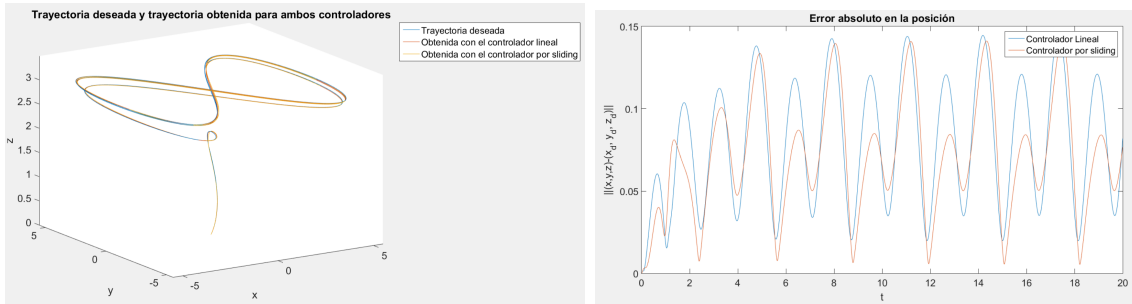


Figura 22: Trayectoria tridimensional deseada siguiendo un ocho, en comparación con las trayectorias obtenidas con ambos diseños y su error absoluto en posición

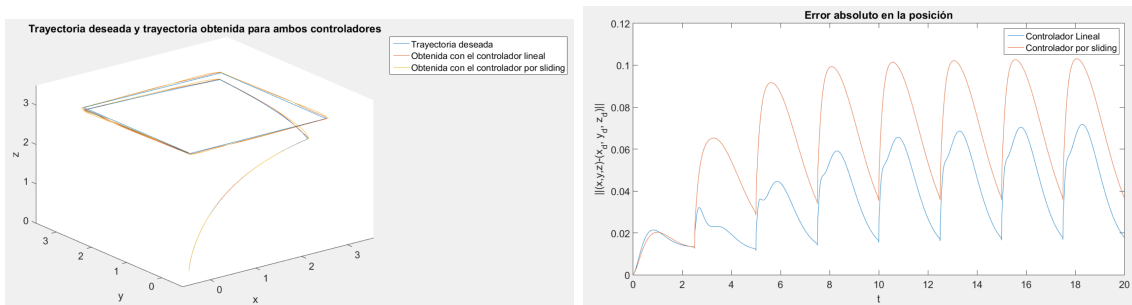


Figura 23: Trayectoria tridimensional deseada siguiendo un cuadrado, en comparación con las trayectorias obtenidas con ambos diseños y su error absoluto en posición

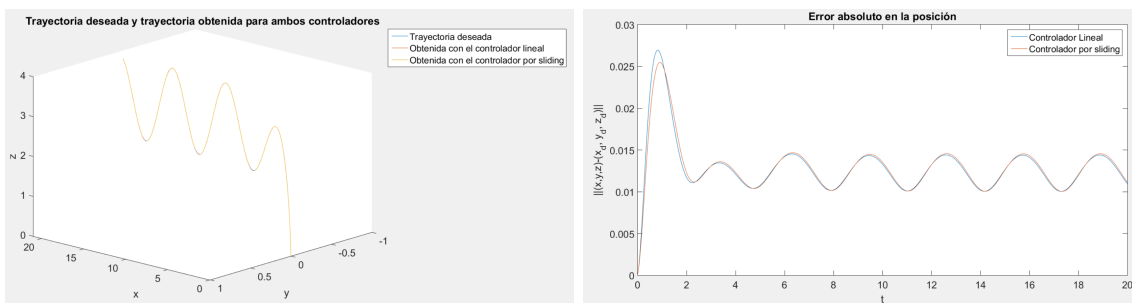


Figura 24: Trayectoria tridimensional deseada siguiendo un seno en z, en comparación con las trayectorias obtenidas con ambos diseños y su error absoluto en posición

6. Conclusiones

Se puede ver que los controladores de posición y ángulos diseñados por ambos métodos (control deslizante y backstepping, y métodos lineales y backstepping) han logrado seguir de manera satisfactoria a las trayectorias deseadas. Esto permite corroborar la efectividad de dichas técnicas en el diseño de controladores de sistemas dinámicos.

Se verificó también la importancia de suavizar las acciones de control diseñadas como método para eliminar el chattering, un fenómeno que puede resultar en errores muy importantes.

Dado que al comparar ambos controladores, no se obtuvieron diferencias significativas entre las normas de los errores cometidos por ambos, ni en la incidencia de incertidumbre en los parámetros, ni en el consumo de energía producido por las acciones de control, se considera que dichos criterios no son suficientes para inclinarse por alguno de los dos métodos. Por lo que se sugiere como criterio para decidir, tener en cuenta el costo computacional de las operaciones que cada uno involucra, dependiendo del modelo con el que se trabaje en cada caso.

Bibliografía

- [1] ELHENNAWY, AMR & HABIB, MAKI.,
«Nonlinear Robust Control of a Quadcopter: Implementation and Evaluation.»
3782-3787. 10.1109/IECON.2018.8591344, IEEE, 2018.
- [2] LEE, D. & BURG, T. C.,
«Lyapunov-Based Control Of Unmanned Aerial Vehicle Designed Via Stability
Analysis.»
Nova Science Publishers, Inc., 2015.