

Control de seguimiento aplicado a péndulo invertido.

UDELAR, Facultad de Ingeniería
Montevideo, Uruguay

Monografía como requerimiento parcial para la aprobación del curso de

Análisis y Control de Sistemas No Lineales

Roman Demczylo

14 de agosto de 2020

Índice general

Resumen	II
Palabras Claves	II
Formulación del problema	III
Introducción	1
1. Sistemas no autónomos	2
1.1. Funciones de comparación.	2
1.2. Estabilidad de los sistemas no autónomos	4
2. Control de seguimiento de un sistema prealimentado	9
2.1. Definiciones	10
2.2. Análisis del control de seguimiento	11
2.2.1. Estabilidad global y uniforme	11
2.2.2. Estabilidad global y asintótica	19
2.2.3. Estabilidad global, uniforme y asintótica	24
3. Control de seguimiento aplicado al sistema péndulo-carrito	26
3.1. Dinámica del sistema	27
3.2. Estabilización del sistema.	29
3.3. Ley de control y trayectorias de referencia	33
4. Simulaciones y resultados gráficos	35
Conclusiones	39
Bibliografía	40
Apendices	40

Resumen

El control de seguimiento aplicado a un péndulo es un problema difícil de resolver. Mediante un cambio de variable se puede transformar la dinámica conocida a una descripción denominada 'prealimentada'. Por medio de la teoría de los sistemas no autónomos, se puede llevar el problema de seguimiento al problema de estabilizar el origen de un sistema no autónomo. Diseñando una entrada de control que estabilice el sistema y deshaciendo todos los cambios de variable que fueron necesarios, se resuelve finalmente el problema.

Palabras Claves

Sistemas no lineales variantes en el tiempo, Lyapunov, Seguimiento, Péndulo invertido, Estabilidad global, uniforme y asintótica.

Formulación del problema

Consideramos el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = h(x, y, u) \\ \dot{y} = f(y, u) \end{cases} \quad (1)$$

Supongamos que existe una señal $u_r(t)$ acotada en un dominio $[0, \infty)$ y condiciones iniciales $(x_r(0), y_r(0))$ tal que la solución $(x_r(t), y_r(t))$ de (1) está bien definida y está acotada en el dominio $[0, \infty)$. Supongamos además que $y_r(t)$ es solución global y asintóticamente estable del sistema:

$$\dot{y} = f(y, u_r(t)) \quad (2)$$

El problema consiste en hallar una señal de control que varía en el tiempo $u(t, x, y)$ capaz de hacer que el punto (x_r, y_r) del sistema (1) sea un equilibrio global y asintóticamente estable.

La solución que se presenta fue resuelta por Mazenc y Praly [1], y consiste en llevar al sistema (1) a una forma particular, que ellos denominan 'sistema con prealimentación' (feedforward system del inglés). Luego, se puede probar que existe una señal de control $u_r(t)$ que estabilizaba al sistema (1) no sólo global y asintóticamente, sino también, uniformemente.

Dicha forma del sistema es la siguiente:

$$\begin{cases} \dot{X} = MX + H_1(Y) + H_2(Y, u)u \\ \dot{Y} = F_0(Y) + F_2(Y, u)u \end{cases} \quad (3)$$

Dónde $X \in \mathbf{R}^n$, $Y \in \mathbf{R}^m$, $u \in \mathbf{R}^q$ y todas las funciones son de clase C^2 que satisfacen $F(0) = H(0) = 0$.

Consideremos ahora el péndulo invertido de la Figura 1. El péndulo se coloca sobre un carrito que sólo se puede mover en la dirección horizontal. El carrito está siendo controlado por un motor que hace una fuerza F horizontal sobre el carro. Esta fuerza es la única entrada de control del sistema.

Manipulando F , nos gustaría controlar la posición angular del péndulo. Mediante la realimentación podemos estabilizar el péndulo en su posición vertical, o incluso hacer que se mueva como deseemos, siguiendo por ejemplo una cierta señal de referencia $\theta_r(t)$ dada.

La figura 1 muestra las distintas fuerzas que actúan sobre el péndulo, el peso $P = mg$ actuando sobre el centro de gravedad del péndulo, una reacción horizontal H y una reacción vertical V , ambas actuando sobre el pivot.

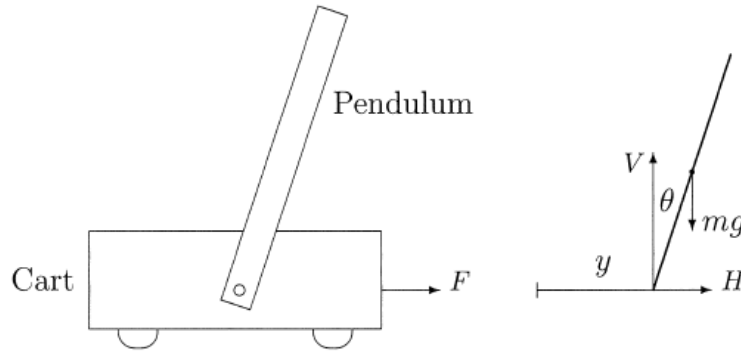


Figura 1: Sistema péndulo carrito.

Utilizando las leyes de la mecánica (primera y segunda cardinal sobre el péndulo y primera cardinal sobre el carro) se pueden deducir las ecuaciones de estado del sistema:

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta}\cos(\theta) - mL\dot{\theta}^2\sin(\theta) &= F \\ \ddot{x}\cos(\theta) + L\ddot{\theta} - g\sin(\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Despejando, también se puede escribir:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{1}{\Delta(\theta)} [(m + M)mgL\sin(\theta) - mL\cos(\theta)(F + mL\dot{\theta}^2\sin(\theta))] \\ \ddot{x} = \frac{m^2L^2}{\Delta(\theta)} [F + mL\dot{\theta}^2\sin(\theta) - g\cos(\theta)\sin(\theta)] \end{cases} \quad (5)$$

Con $\Delta(\theta) = mL^2(M + m\sin^2(\theta)) > 0$.

Dónde m es la masa del péndulo, M es la masa del carro, L es la distancia que hay entre el pivot y el centro de gravedad del péndulo, x es la posición del pivot desde un referencial fijo, θ es la posición angular del péndulo medido en sentido horario y g es la aceleración de la gravedad. Despreciamos cualquier fricción que pueda haber y la inercia del péndulo desde el pivot.

Nuestro objetivo es encontrar la ley de control F que haga que el estado $\theta(t)$ del sistema siga lo mejor posible a una señal de referencia $\theta_r(t)$.

Introducción

El control de un péndulo invertido es un problema clásico de la Teoría de Control y ha estado en laboratorios de todas partes del mundo por mas de media década, es bastante utilizado para poner a prueba cierto tipo de controladores y tiene innumerables aplicaciones. Consiste en un péndulo invertido unido a un carrito que es capaz de moverse en una dirección privilegiada. Lo mas importante que tiene este tipo de sistema es su dinámica no lineal, por lo que para estudiarlo será necesario recurrir a la teoría de los sistemas no lineales, los cuales son modelados bajo un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

En el práctico 4 se vio un posible método de control que consistía en realizar la linealización Jacobiana en un entorno del punto de equilibrio no estable, para posteriormente poder utilizar la teoría de los sistemas lineales mediante el Teorema de Harman. Se probó que dicho método es válido solo en un entorno del equilibrio, logrando así la estabilidad local y asintótica del mismo. Si se quisiera lograr la estabilidad global se debería recurrir a la dinámica no lineal del sistema, lo cual podría no tener solución.

Ahora, nos enfocaremos en el control de seguimiento del sistema péndulo-carrito, que es un problema de gran interés y uno de los mas difíciles de resolver. Bajo un cambio de variables y el uso de realimentación, probaremos que las ecuaciones que rigen al sistema quedan de una forma bastante particular. Esta propiedad es utilizada para diseñar una realimentación de estados que resolverá el problema. El Teorema que lleva a cabo el control de seguimiento global y uniforme (GUS), el Teorema que lleva a cabo el control de seguimiento global y asintóticamente (GAS) y el Teorema que lleva a cabo la estabilización global, uniforme y asintótica (GUAS) del sistema fueron probados por los autores [4].

Una vez demostrados los resultados teóricos, estaremos listos para aplicar esta técnica de control aplicado al péndulo invertido [1] y mostrar las simulaciones realizadas.

Capítulo 1

Sistemas no autónomos

Ahora nos enfocaremos en la teoría de los sistemas no autónomos, es decir, aquellos sistemas cuya dinámica varía con el tiempo. La razón por la cual se acudirá a este tipo de sistemas se debe a que los problemas de seguimiento se pueden llevar, mediante un cambio de variables, a un problema equivalente que consiste en estabilizar el origen de un sistema no autónomo.

1.1. Funciones de comparación.

Para analizar este tipo de sistemas se requieren de herramientas más sofisticadas. Tenemos por ejemplo las funciones de comparación, que son especialmente útiles para analizar la estabilidad.

Con los resultados que se presentarán a continuación, alcanzará para probar dos resultados de gran interés: la estabilidad uniforme y la estabilidad uniforme y asintótica.

Definición 1.1: Una función continua $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ es de clase \mathcal{K} si es estrictamente positiva y cumple $\alpha(0) = 0$.

Definición 1.2: Una función continua $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es de clase \mathcal{K}_∞ si $\alpha(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \infty$.

Ejemplo 1.1: La función $\alpha(r) = 1 - e^{-r}$ es estrictamente creciente y vale $\alpha(0) = 0$, por lo que pertenece a la clase \mathcal{K} . Sin embargo no pertenece \mathcal{K}_∞ , puesto que $\alpha(\infty) = 1$.

Ejemplo 1.2: La función $\alpha(r) = r^2$ es estrictamente creciente en \mathbf{R}^+ , se cumple que $\alpha(0) = 0$ y que $\alpha(\infty) = \infty$. Entonces pertenece a la clase \mathcal{K}_∞ .

Definición 1.3: Una función continua $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es de clase \mathcal{KL} si, para cada $s = s^*$ fijo, el mapeo $\beta(r, s^*)$ pertenece a la clase \mathcal{K} con respecto a r ; y para cada $r = r^*$ fijo, el mapeo $\beta(r^*, s)$ es decreciente respecto de s y $\beta(r^*, s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$.

Ejemplo 1.3: La función $\beta(r, s) = r^2 e^{-s}$ pertenece a la clase \mathcal{KL} .

Lema 1: Sean α_1, α_2 funciones de clase \mathcal{K} en $[0, a)$, α_3 y α_4 funciones de clase \mathcal{K}_∞ , y β una función de clase \mathcal{KL} . Entonces:

- α_1^{-1} está definida en $[0, \alpha_1(a))$ y es de clase \mathcal{K} .
- α_3^{-1} está definida en $[0, \infty)$ y es de clase \mathcal{K}_∞ .
- $\alpha_1 \circ \alpha_2$ es de clase \mathcal{K} .
- $\alpha_3 \circ \alpha_4$ es de clase \mathcal{K}_∞ .
- $\sigma(r, s) = \alpha_1(\beta(\alpha_2(r), s))$ es de clase \mathcal{KL} .

Demostración Ver libro de Khalil [2].

Lema 2: Sea $V : D \rightarrow \mathbf{R}$ una función continua definida positiva en un dominio $D \subset \mathbf{R}^n$ que contiene al origen. Sea $B_r \subset D$ para algún $r > 0$. Entonces, existen funciones α_1, α_2 de clase \mathcal{K} definidas en $[0, r]$, tales que:

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad \forall x \in B_r \quad (1.1)$$

Si $D = \mathbf{R}^n$, las funciones α_1 y α_2 estarán definidas en \mathbf{R}^+ y las inecuaciones valdrán para todo $x \in \mathbf{R}$. Mas aún, si $V(x)$ es radialmente no acotada, entonces α_1 y α_2 puede ser elegidas para que sean de clase \mathcal{K}_∞ .

Demostración Ver libro de Khalil [2].

Lema 3: Consideramos la siguiente ecuación diferencial autónoma:

$$\dot{y} = -\alpha(y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (1.2)$$

dónde α es una función de clase \mathcal{K} definida en $[0, a)$.

Entonces, existe una única solución definida:

$$y(t) = \sigma(y_0, t - t_0), \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq y_0 < a \quad (1.3)$$

dónde σ es una función \mathcal{KL} definida en $[0, a) \times [0, \infty)$.

Demostración Ver libro de Khalil [2].

1.2. Estabilidad de los sistemas no autónomos

Consideramos el siguiente sistema:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.4)$$

con $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbf{R}^n$ una función continua a trozos en t y localmente Lipschitz en $x \in D$, y $D \subset \mathbf{R}^n$ un dominio que contiene al origen.

La diferencia más notable de este tipo de sistemas respecto a los sistemas autónomos es que la solución al problema (1.4) depende de (t_0, t) , a diferencia de antes que dependía sólo de la distancia $t - t_0$.

Definición 1.4: El origen del sistema (1.4) es un equilibrio si:

$$f(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.5)$$

Nota: Siempre se puede trasladar cualquier punto de equilibrio de un sistema a su origen mediante un cambio de variables.

Definición 1.5: El equilibrio de un sistema es:

- Estable: si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que:

$$|x(t_0)| < \delta \Rightarrow |x(t)| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (1.6)$$

- Uniformemente estable: si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que se cumple (1.6).
- Asintóticamente estable: si es estable y existe una constante positiva $c = c(t_0)$ tal que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty, \forall |x(t_0)| < c$.
- Uniforme y asintóticamente estable: si es uniformemente estable y existe una constante positiva c , tal que para todo $|x(t_0)| < c, x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, uniformemente en t_0 .

Uniformemente en t_0 implica que para todo $\eta > 0$, existe un $T = T(\eta) > 0$ tal que:

$$|x(t)| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta), \quad \forall |x(t_0)| < c \quad (1.7)$$

- Global, uniforme y asintóticamente estable: si es uniformemente estable, $\delta(\epsilon)$ se puede elegir tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(\epsilon) = \infty$, y además, para cualquier par (η, c) , existe $T = T(\eta, c) > 0$ tal que:

$$|x(t)| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta, c), \quad \forall |x(t_0)| < c \quad (1.8)$$

- Inestable: si no es estable.

Lema 4: El origen del sistema (1.4) es:

- Uniformemente estable: si existe una función $\alpha \in \mathcal{K}$ y una constante positiva c , tal que:

$$|x(t)| \leq \alpha(|x(t_0)|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall |x(t_0)| < c \quad (1.9)$$

- Uniforme y asintóticamente estable: si existe una función $\beta \in \mathcal{KL}$ y una constante positiva c , tal que:

$$|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall |x(t_0)| < c \quad (1.10)$$

- Global, uniforme y asintóticamente estable: si es estable y la ecuación (1.10) se cumple $\forall x(t_0) \in D$.

Demostración Ver libro de Khalil [2].

Definición 1.6: El origen de (1.4) es exponencialmente estable si existen constantes positivas c, k y λ tal que:

$$|x(t)| \leq k|x(t_0)|e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall |x(t_0)| < c \quad (1.11)$$

y global exponencialmente estable si la ecuación (1.11) se cumple para toda condición inicial $x(t_0) \in D$.

Teorema 1.1: Sea el origen un punto de equilibrio de (1.4) y $D \subset \mathbf{R}^n$ un dominio que contiene al origen. Sea $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbf{R}$ una función continuamente diferenciable que cumple:

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in D \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in D \quad (1.13)$$

Dónde además, $W_1(x)$ y $W_2(x)$ son funciones continuas definidas positivas en el dominio D .

Entonces el origen es uniformemente estable.

Demostración:

Sean $r > 0, c > 0$ / $B_r \subset D$ y $c < \text{Min}_{|x|=r} \{W_1(x)\}$.

Entonces:

$$S_1 = \{x \in B_r / W_1(x) \leq c\} \subset \text{int}(B_r) \quad (1.14)$$

Sea el conjunto $\Omega_{t,c} = \{x \in B_r / V(t, x) \leq c\}$ y sea el conjunto S_2 definido:

$$S_2 = \{x \in B_r / W_2(x) \leq c\} \quad (1.15)$$

Entonces:

$$S_2 \subset \Omega_{t,c} \subset S_1 \subset B_r \subset D, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.16)$$

Nota: Dado que $W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x)$:

- Si $W_2(x) \leq c \Rightarrow V(t, x) \leq c \Rightarrow S_2 \subset \Omega_{t,c}$
- Si $V(t, x) \leq c \Rightarrow W_1(x) \leq c \Rightarrow \Omega_{t,c} \subset S_1$

Ahora la superficie variante en el tiempo $V(t, x) = c$ está acotada por dos superficies invariantes con el tiempo: $W_1(x) = c$ y $W_2(x) = c$. Ver Figura 1.1 para convencerse de este hecho.

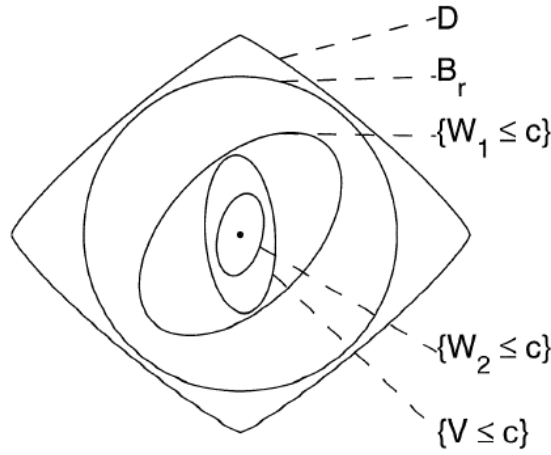


Figura 1.1: Situación de la demostración.

Luego, como $\dot{V}(t, x) \leq 0$ en D y para todo $t \geq 0$, entonces la solución con condición inicial (x_0, t_0) y $x_0 \in \Omega_{t_0,c}$ se quedará en $\Omega_{t,c} \forall t \geq t_0$. Además, se cumple que:

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0), \quad \forall t \geq t_0 \quad (1.17)$$

Como $W_1(x)$ y $W_2(x)$ son funciones continuas y definidas positivas en B_r , por Lema 2 deben existir funciones α_1, α_2 de clase $\mathcal{K}[0, r]$ tales que:

$$\alpha_1(|x|) \leq W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad (1.18)$$

Como α_1, α_2 son funciones crecientes, se vale la siguiente desigualdad:

$$|x(t)| \leq \alpha_1^{-1}(V(t, x)) \leq \alpha_1^{-1}(V(t_0, x_0)) \leq \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2(|x(t_0)|) \quad \forall t_0 \geq 0 \quad (1.19)$$

Luego, por Lema 1 se cumple que $\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 = \alpha_4$ es de clase $\mathcal{K}[0, r]$.

Finalmente, como $|x(t)| \leq \alpha_4(|x(t_0)|)$, por Lema 4 se deduce que el origen del sistema es uniformemente estable.

Nota: Si además $D = \mathbf{R}^n$, $W_1(x)$ es radialmente no acotada y las condiciones sobre $x(t_0)$ se cumplen globalmente, entonces el origen es global y uniformemente estable.

Teorema 1.2 Sea el origen un punto de equilibrio de (1.4) y $D \subset \mathbf{R}^n$ un dominio que contiene al origen. Sea $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbf{R}$ una función continuamente diferenciable que cumple:

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x), \forall t \geq 0, \forall x \in D \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x), \forall t \geq 0, \forall x \in D \quad (1.21)$$

Dónde además, $W_1(x)$, $W_2(x)$ y $W_3(x)$ son funciones continuas y definidas positivas en el dominio D .

Entonces el origen es uniforme y asintóticamente estable.

Demostración:

En particular sabemos que:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq 0, \forall t \geq 0, \forall x \in D \quad (1.22)$$

Usando el Teorema 1.1, sabemos que el equilibrio se trata de un uniformemente estable. Además, como $W_1(x)$, $W_2(x)$ y $W_3(x)$ son funciones continuas definidas positivas, por Lema 2 y Teorema 1.1 deben existir funciones $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que cumplan lo siguiente:

$$\alpha_1(|x|) \leq W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad (1.23)$$

$$-W_3(x) \leq -\alpha_3(|x|) \quad (1.24)$$

Como α_1 y α_3 son funciones crecientes, se cumple lo siguiente:

$$V(x, t) \leq \alpha_2(|x|) \Leftrightarrow \alpha_2^{-1}(V(t, x)) \leq |x| \Leftrightarrow \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(V(x, t)) \leq \alpha_3(|x|) \quad (1.25)$$

Por Lema 1 sabemos que $\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1} = \alpha_5$ es de clase $\mathcal{K}[0, r]$.

Consideramos el sistema auxiliar:

$$\begin{cases} \dot{y} = \alpha_5(y) \\ y(t_0) = V(t_0, x_0) \leq 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

Por Lema de comparación y Lema 3, existe una función σ de clase \mathcal{KL} definida en $[0, r] \times [0, \infty)$ tal que:

$$V(t, x(t)) \leq y(t) \leq \sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0), \forall V \in [0, c], \forall t \geq t_0 \quad (1.27)$$

Usando (1.24) y lo mostrado recientemente:

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \alpha_1^{-1}(V(t, x(t))) \leq \alpha_1^{-1} \circ \sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0) \\ &\leq \alpha_1^{-1} \circ \sigma(\alpha_2(|x(t_0)|), t - t_0) = \beta(|x(t_0)|, t - t_0) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Por Lema 1, sabemos que $\beta(r, s) = \alpha_1^{-1} \circ \sigma(\alpha_2(r), s)$ es de clase \mathcal{KL} .

Como $|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0)$ con $\beta \in \mathcal{KL}$, por Lema 4 el origen es asintótico y uniformemente estable.

Nota: Si además $D = \mathbf{R}^n$, $W_1(x)$ es radialmente no acotada y las condiciones sobre $x(t_0)$ se cumplen globalmente, entonces el origen es global, asintótico y uniformemente estable.

Ejemplo 1.4: Consideramos el sistema escalar:

$$\dot{x} = -(1 + g(t))x^3 \quad (1.29)$$

donde $g(t)$ es una función diferenciable y positiva para todo $t \geq 0$.

Consideramos la siguiente función diferenciable e invariante con el tiempo, candidata a función Lyapunov:

$$V(x) = \frac{x^2}{2} \quad (1.30)$$

Derivando respecto a las trayectorias del sistema, tenemos:

$$\dot{V}(x) = -(1 + g(t))x^4 \leq -x^4 = -W(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}, t \geq 0 \quad (1.31)$$

Se cumple que:

$$W_1(x) = \frac{x^2}{4} \leq \frac{x^2}{2} \leq x^2 = W_2(x) \quad (1.32)$$

y además:

$$\dot{V}(x) = -x^4 = -W_3(x) \quad (1.33)$$

Dónde $W_1(x)$, $W_2(x)$ y $W_3(x)$ son funciones definidas positivas y radialmente no acotadas.

Entonces, aplicando el Teorema 1.2 deducimos que el origen debe ser un equilibrio global, uniforme y asintóticamente estable.

Capítulo 2

Control de seguimiento de un sistema prealimentado

Presentaremos una técnica de control que se puede encontrar en las Tesis de Mazenc [3] y en el artículo publicado con su examinador, Praly [4]. Se utilizarán los resultados vistos en el Capítulo 1, con el fin de demostrar teóricamente dicha técnica. En el Teorema 2.1 probaremos la ley de control necesaria para alcanzar la estabilidad global y uniforme, lo cual no será suficiente para nuestro objetivo. Procederemos a enunciar el Teorema 2.2, que infiere matemáticamente en los resultados del Teorema 2.1 para asegurar la estabilidad global y asintótica, a costa de perder la uniformidad que habíamos logrado. El resultado mas general es el de la estabilidad global, uniforme y asintótica, la cual no será presentada y se puede encontrar en la bibliografía [3]. El Teorema 2.3 nos muestra la estabilidad GUAS en una caso bastante particular y de gran ayuda, en el que las funciones de referencia sean periódicas. Para probarlo será necesario utilizar un resultado mostrado por Yoshizawa [6], que relaciona la estabilidad GUAS con la estabilidad GAS a través de los sistemas periódicos.

Una vez presentado este resultado, estaremos listos para diseñar el control de seguimiento aplicado al péndulo invertido, que se mostrará a continuación en el Capítulo 3.

Con respecto a la demostración de los Teoremas, no se pretende una exposición muy profunda del tema, sino mas bien, mostrar una idea de como el autor pudo llevar a cabo la prueba de dichos resultados. Algunos de los Lemas se pueden encontrar probados en los apéndices.

2.1. Definiciones

- Se reservará la constante c como una constante genérica.
- Sea $V : [0, \infty) \times \mathbf{X} \rightarrow [0, \infty]$. Decimos que V es radialmente no acotada si el conjunto $\left\{x \in \mathbf{X} : \underset{t}{\text{Sup}} V(t, x) \leq L\right\}$ es un compacto para cada constante positiva L .
- Decimos que V es definida positiva si se cumple que:

$$V(t, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- Una función $\sigma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ se dice de saturación si es continua, acotada, diferenciable en el origen y cumple:

$$\sigma(s)s > 0 \quad \forall s \neq 0, \quad \sigma'(0) > 0, \quad \sigma|_{\mathbf{R}^+} \notin L^1(\mathbf{R}^+), \quad \sigma|_{\mathbf{R}^-} \notin L^1(\mathbf{R}^-)$$

- Decimos que σ es una función de saturación lineal si además de ser de saturación, existe $L > 0$ tal que:

$$\sigma(s) = s, \quad \forall |s| \leq L$$

- Sea Q matriz simétrica definida positiva, definimos:

$$|x| = \sqrt{x^t x}, \quad |x|_Q = \sqrt{x^t Q x}$$

- Recordamos que una función $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es de clase \mathcal{K} si vale cero en cero y es estrictamente creciente.
- Recordamos que una función $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es de clase \mathcal{K}_∞ si es de clase \mathcal{K} y además no está acotada.

2.2. Análisis del control de seguimiento

Consideramos un sistema descrito de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{X} = MX + H_1(Y) + H_2(Y, u)u \\ \dot{Y} = F_0(Y) + F_2(Y, u)u \end{cases} \quad (2.1)$$

Dónde $X \in \mathbf{R}^n$, $Y \in \mathbf{R}^m$, $u \in \mathbf{R}^q$, $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+m}$ es el vector de estados y todas las funciones son de clase C^2 que satisfacen $F(0) = H(0) = 0$.

Notar como la aparición de la entrada u en la primera ecuación no nos permite aplicar back-stepping a este tipo de problemas, y como si fuera poco, utilizar el método por linealización exacta traería aparejado inconvenientes respecto a la estabilidad global. Por lo que deberemos proceder de otra forma si se quiere hallar la solución, teniendo que enunciar una nueva técnica de control que resuelva el problema.

Observar también como la dinámica de X no influye en la de Y , por lo que se puede estabilizar la parte Y del sistema de manera independiente a X . Ésta última propiedad será de mucha utilidad mas adelante cuando se quiera aplicar este tipo de control a un problema real.

2.2.1. Estabilidad global y uniforme

Hipótesis 1: Existen funciones $(X_r(t), Y_r(t), u_r(t))$ acotadas para todo $t \in [0, \infty)$, de clase C^2 y verificando lo siguiente:

$$\begin{cases} \dot{X}_r(t) = MX_r(t) + H_1(Y_r(t)) + H_2(Y_r(t), u_r(t))u_r(t) \\ \dot{Y}_r(t) = F_0(Y_r(t)) + F_2(Y_r(t), u_r(t))u_r(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

Con esta hipótesis nos aseguramos que el problema de seguimiento tenga solución, algo que en general es bastante difícil de probar.

Definamos las siguientes señales de error:

$$\tilde{X} = X - X_r(t), \quad \tilde{Y} = Y - Y_r(t) \quad (2.3)$$

Para facilitar la anotación, a partir de ahora vamos a explicitar la dependencia en el tiempo cuando se trate de alguna de las funciones de referencia, con subíndice r . El objetivo a partir de ahora es hacer que las señales de error tiendan a cero rápidamente, por lo que nos valdremos inevitablemente de la teoría de los sistemas no autónomos.

Hipótesis 2: El punto $\tilde{Y} = 0$ es un equilibrio GUAS del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{Y}} = & F_0(\tilde{Y} + Y_r(t)) - F_0(Y_r(t)) + F_2(\tilde{Y} + Y_r(t), u_r(t))u_r(t) \\ & - F_2(Y_r(t), u_r(t))u_r(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Además, existe una matriz simétrica definida Q y constantes $c > 0, \alpha > 0$ tales que:

$$M^T Q + Q M = -R \leq 0 \quad (2.5)$$

$$|e^{M(s-t)}| \|\Phi_A(t, s)\| \leq c e^{-\alpha(t-s)}, \quad \forall s \in [0, t], \quad t > 0 \quad (2.6)$$

donde

$$A(t) = \frac{\partial}{\partial \tilde{Y}} [F_0(\tilde{Y} + Y_r(t)) + F_2(\tilde{Y} + Y_r(t), u_r(t))u_r(t)] \Big|_{\tilde{Y}=0} \quad (2.7)$$

y $\Phi_A(t, t_0)$ es la matriz de transición de estados de la matriz A :

$$\frac{\partial \Phi_A}{\partial t}(t, t_0) = \Phi_A(t, t_0) A(t), \quad \Phi_A(t_0, t_0) = I \quad (2.8)$$

Con ayuda de la hipótesis (2), el problema de control de seguimiento se reduce a estabilizar la primera ecuación del sistema (2.1).

Consideremos ahora una función $P(t)$ definida:

$$P(t) = \int_t^\infty e^{M(t-s)} C(s) \Phi_A(s, t) ds \quad (2.9)$$

$$C(t) = \frac{\partial}{\partial \tilde{Y}} [H_1(\tilde{Y} + Y_r(t)) + H_2(\tilde{Y} + Y_r(t), u_r(t))u_r(t)] \Big|_{\tilde{Y}=0} \quad (2.10)$$

Observación: El hecho de que $F_0, F_2, u_r(t)$ y $Y_r(t)$ sean de clase C^2 implica que $A(t)$ sea de clase C^1 . Por otro lado, el hecho de que $H_1, H_2, u_r(t)$ y $Y_r(t)$ sean de clase C^2 implica que $C(t)$ sea de clase C^1 . Por lo tanto, la función $e^{M(t-s)} C(s) \Phi_A(s, t)$ es de clase C^1 . Como además $Y_r(t)$ está acotada en $[0, \infty)$ entonces $C(t)$ debe estar acotada.

Con todo esto en mente, se puede probar que $P(t)$ está acotada, es de clase C^1 y cumple la siguiente relación:

$$\dot{P}(t) = M P(t) - P(t) A(t) - C(t) \quad (2.11)$$

Esto último implica que $P(t)$ también será de clase C^2 .

Pudiéndose probar ésta última ecuación (2.11) utilizando la Ley de Leibniz.

Teorema 2.1: Si el sistema (2.1) cumple las hipótesis (1) y (2), entonces para todo $\tilde{u} > 0$ existe una ley de control $\bar{u}(X, Y, t)$ verificando:

$$|\bar{u}(X, Y, t) - u_r(t)| < \tilde{u} \quad (2.12)$$

y el sistema en lazo cerrado admite (X_r, Y_r) como solución global y uniformemente estable.

Antes de demostrar el Teorema mostramos el siguiente punteo de como se procederá:

Punteo de la prueba del Teorema 2.1:

Paso 1:

- Se lleva el problema original a un problema no autónomo.

Paso 2:

- Se halla un cambio de variables que lleve el nuevo sistema hallado a una forma preestablecida, que resultará mas cómoda para continuar con la prueba.

Paso 3:

- Se busca una familia de funciones candidatas a Lyapunov que cumplan ser definidas positivas y radialmente no acotadas.
- Se impone que la derivada temporal de dicha familia de funciones sobre las trayectorias del sistema prealimentado cumplan las hipótesis del Teorema de Lyapunov no autónomo.
- Finalmente, la entrada u del sistema que cumpla con esto último será la ley de control que se utilizará para resolver el problema de seguimiento de manera global y uniforme.

Demostración:

Paso 1: Ecuación de error.

Transformamos el problema de seguimiento al problema de estabilizar el origen de un sistema no autónomo.

Utilizando el siguiente cambio de variables:

$$\tilde{X} = X - X_r(t), \quad \tilde{Y} = Y - Y_r(t), \quad v = u - u_r(t) \quad (2.13)$$

Podemos reescribir al sistema (2.1) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{X}} &= \dot{X} - \dot{X}_r(t) = MX + H_1(Y) + H_2(Y, u)u - MX_r(t) \\
&\quad - H_1(Y_r(t)) - H_2(Y_r(t), u_r(t))u_r(t) \\
&= M\tilde{X} + [H_1(\tilde{Y} + Y_r(t)) - H_1(Y_r(t))] \\
&+ [H_2(\tilde{Y} + Y_r(t), v + u_r(t))(u_r(t) + v) - H_2(Y_r(t), u_r(t))u_r(t)] \\
\dot{\tilde{Y}} &= \dot{Y} - \dot{Y}_r(t) = F_0(Y) + F_2(Y, u)u - F_0(Y_r(t)) \\
&\quad - F_2(Y_r(t), u_r(t))u_r(t) \\
&= [F_0(\tilde{Y} + Y_r(t)) - F_0(Y_r(t))] \\
&+ [F_2(\tilde{Y} + Y_r(t), u_r(t) + v)(u_r(t) + v) - F_2(Y_r(t), u_r(t))u_r(t)]
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Paso 2: Cambio de coordenadas.

Consideremos el cambio de variable:

$$x = \tilde{X} + P(t)\tilde{Y}, \quad y = \tilde{Y} \tag{2.15}$$

donde $P(t)$ está definida como en (2.9).

Por lo que la nueva dinámica queda:

$$\dot{x} = \dot{\tilde{X}} + P(t)\dot{\tilde{Y}} + \dot{P}(t)\tilde{Y}, \quad \dot{y} = \dot{\tilde{Y}} \tag{2.16}$$

Usando (2.11) , no es difícil ver que el cambio de variable (2.15) convierte la descripción del sistema (2.14) en la siguiente:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Mx + h_1(y, t) + h_2(y, v, t)v \\
\dot{y} &= f_0(y, t) + f_2(y, v, t)v
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Dónde h_1, h_2, f_0 y f_2 son de clase C_1 , acotadas respecto a t y definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
h_1(y, t) &= H_1(y + Y_r(t)) - H_1(Y_r(t)) \\
&+ [H_2(y + Y_r(t), u_r(t)) - H_2(Y_r(t), u_r(t))]u_r(t) \\
&+ P(t)[f_0(y, t) - A(t)y] - C(t)y
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
h_2(y, v, t)v &= [H_2(y + Y_r(t), u_r(t) + v) - H_2(y + Y_r(t), u_r(t))]u_r(t) \\
&+ [H_2(y + Y_r(t), u_r(t) + v) + P(t)f_2(y, v, t)]v
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$f_0(y, t) = [F_0(y, Y_r(t)) - F_0(Y_r(t))] + [F_2(y + Y_r(t), u_r(t)) - F_2(Y_r(t), u_r(t))]u_r(t) \quad (2.20)$$

$$f_2(y, v, t)v = [F_2(y + Y_r(t), u_r(t) + v) - F_2(y + Y_r(t), u_r(t))]u_r(t) + F_2(y + Y_r(t), u_r(t) + v)v \quad (2.21)$$

Lema 5: Si se cumplen las hipótesis (1) y (2), entonces existe una función continua y positiva γ tal que:

$$|h_1(y, t)| \leq \gamma(|y|)|y|^2 \quad (2.22)$$

Demostración Ver apéndices.

Lema 6: Si el sistema (2.1) cumple las hipótesis (1) y (2), entonces existe una función de Lyapunov $V(y, t)$ estrictamente positiva de clase C^1 , números p_i reales positivos, una función $W(y, t)$ y funciones $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 de clase \mathcal{K}^∞ tales que:

Para todo $|y| \leq p_1$:

$$p_2|y|^2 \leq V(y, t) \leq p_3|y|^2 \quad (2.23)$$

$$\left| \frac{\partial V}{\partial y}(y, t) \right| \leq p_4|y| \quad (2.24)$$

$$p_5|y|^2 \leq \alpha_3(|y|) \leq W(y, t) \quad (2.25)$$

Para todo y y $v = 0$:

$$\alpha_1(|y|) \leq V(y, t) \leq \alpha_2(|y|) \quad (2.26)$$

$$\dot{V}(y, t)_{(2.17)} = -W(y, t) \leq -\alpha_3(|y|) < 0, \forall y \neq 0 \quad (2.27)$$

$$\left| \frac{\partial V}{\partial y}(y, t) \right| \leq \alpha_4(|y|) \quad (2.28)$$

Demostración: Se puede encontrar en la bibliografía [3].

Paso 3: Elección de la función de Lyapunov.

Consideramos las funciones candidatas a Lyapunov:

$$U(x, y, t) = k(V(y, t)) + \int_0^{|x|_Q} \sigma(s)ds \quad (2.29)$$

dónde k es una función de clase \mathcal{K}^∞ diferenciable con derivada estrictamente mas grande que uno, σ es una función de saturación y Q es una matriz que cumple con la hipótesis (2).

Una función U definida de esta manera es diferenciablemente continua, definida positiva, radialmente no acotada y está acotada inferiormente por una función cuadrática positiva en un entorno del origen.

Su derivada respecto (2.17) es:

$$\dot{U}(x, y, t)_{(2.17)} = k'(V(y, t)) \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} \right) + \sigma(|x|_Q) \nabla(|x|_Q)^T \dot{x} \quad (2.30)$$

Podemos reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{U}(x, y, t)_{(2.17)} = & -k'(V(y, t))W(y, t) + k'(V(y, t)) \frac{\partial V}{\partial y} f_2(y, v, t)v \\ & + \sigma(|x|_Q) \frac{x^t Q}{|x|_Q} [Mx + h_1(y, t) + h_2(y, v, t)v] \end{aligned} \quad (2.31)$$

Dónde $-W(y, t) = \frac{\partial V(y, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(y, t)}{\partial y} f_0(y, t)$

Lo ideal a partir de ahora sería probar que \dot{U} es menor o igual a una función definida negativa invariante con el tiempo, para aplicar el Teorema 1.3 y asegurar finalmente la estabilidad GUAS del sistema.

Lema 7: Sea V una función continua definida positiva propia y sea W una función continua definida positiva. Sea γ una función continua no negativa que satisface:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \text{Sup} \left\{ \frac{\gamma(|y|)}{W(y)} \right\} < \infty \quad (2.32)$$

Entonces existe una función k continua y definida positiva en $[0, \infty)$ que satisface lo siguiente:

$$k(V(y))W(y) \geq \gamma(|y|) \quad (2.33)$$

Demostración: Ver apéndices.

Usando Lema 7 y las ecuaciones (2.23-2.25), se puede probar la existencia de una función k diferenciable que cumple lo siguiente:

$$\frac{1}{2} k'(\alpha_1(|y|)) \geq \left(\sup_{s \in \mathbf{R}} |\sigma(s)| \right) \frac{|y|^2}{\alpha_3(|y|)} \gamma(|y|) \quad (2.34)$$

$$k'(s) \geq 1, \forall s \geq 0 \quad (2.35)$$

Se puede probar que dicha elección de k , la ecuación (2.22) y la hipótesis (2) nos lleva al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \dot{U}(x, y, t)|_{(2,17)} \leq & -\frac{1}{2}k'(V(y, t))W(y, t) - \frac{1}{2}\sigma(|x|_Q)\frac{x^T R x}{|x|_Q} \\ & + a(x, y, v, t)v \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde:

$$a(x, y, v, t) = k'(V(y, t))\frac{\partial V}{\partial y}(y, t)f_2(y, v, t) + \sigma(|x|_Q)\frac{x^T Q}{|x|_Q}h_2(y, v, t) \quad (2.37)$$

Sólo nos queda probar que para alguna entrada v se cumple que $a(x, y, v, t)v$ es menor o igual a una cantidad no positiva.

Lema 8: Sea \tilde{u} un número real estrictamente positivo y sea $a(x, y, v, t)$ una función que satisfice:

$$|a(x, y, 0, t)| + \frac{|a(x, y, v, t) - a(x, y, 0, t)|}{|v|} \leq \Omega(|y|), \quad \forall v : |v| \leq \tilde{u} \quad (2.38)$$

para alguna función continua y positiva Ω .

Sea ϕ una función positiva decreciente de clase C^1 tal que:

$$\phi(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = 0 \\ > 0 & \forall s \in [0, 1) \\ 0 & \text{si } s \geq 1 \end{cases} \quad (2.39)$$

Entonces, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$a(x, y, v_s, t)v_s \leq -\frac{\delta}{2}\phi(|y|)|a(x, y, 0, t)|^2 \quad (2.40)$$

donde:

$$v_s = -\delta\phi(|y|)a(x, y, 0, t)^T \quad (2.41)$$

$$|v_s| \leq \tilde{u}(\delta) \quad (2.42)$$

Demostración: Ver apéndices.

Dado que f_2 y h_2 son funciones de clase C^1 y $|\sigma(|x|_Q)\frac{x^T Q}{|x|_Q}|$ es una función acotada, se puede deducir que la función $a(x, y, v, t)$ cumple la siguiente condición:

$$|a(x, y, 0, t)| + \frac{|a(x, y, v, t) - a(x, y, 0, t)|}{|v|} \leq \Omega(|y|), \quad \forall |v| \leq \tilde{u} \quad (2.43)$$

Para alguna función Ω continua y positiva.

Como se cumple la ecuación (2.43), por Lema 8 debe existir una función $\phi \in C^1$ estrictamente positiva tal que:

$$-\delta a(x, y, v_s, t) \phi(|y|) a(x, y, 0, t)^T \leq -\frac{\delta}{2} \phi(|y|) |a(x, y, 0, t)|^2 \quad (2.44)$$

Definiendo convenientemente $\lambda(y) = \delta \phi(y)$.

Consideremos entonces:

$$v_s(x, y, t) = -\lambda(|y|) a(x, y, 0, t)^t \quad (2.45)$$

Elijamos $v = v_s$ para finalmente obtener lo que buscábamos:

$$\begin{aligned} \dot{U}(x, y, t)|_{(2.17)} &\leq -\frac{1}{2} k'(V(y, t)) W(y, t) - \frac{1}{2} \sigma(|x|_Q) \frac{x^T R x}{|x|_Q} \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda(|y|) |a(x, y, 0, t)|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

La segunda condición buscada nos la da también el Lema 8:

$$|v| = |u - u_r(t)| \leq \tilde{u} \quad (2.47)$$

Probamos que \dot{U} es no positivo para todo (x, y) . Según el Teorema 1.1 deducimos la estabilidad global y uniforme del equilibrio $(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (0, 0)$ del sistema (2.14). Finalmente, la dupla $(X_r(t), Y_r(t))$ es solución global y uniformemente estable del sistema original (2.1).

Sin embargo, \dot{U} no es menor o igual a una función definida negativa invariante con el tiempo, para todo tiempo positivo, por lo tanto no podemos deducir la estabilidad asintótica a través de este resultado.

2.2.2. Estabilidad global y asintótica

Hipótesis 3: Existen funciones continuas y acotadas $K_d(t)$ y $K_r(t)$ tales que el sistema:

$$\dot{\mathcal{X}} = (M + K_d(t)D(t)^T Q + K_r(t)R^{1/2})\mathcal{X} \quad (2.48)$$

es exponencialmente estable en el origen.

donde:

$$\begin{aligned} D(t) &= \frac{\partial H_2}{\partial u}(Y_r(t), u_r(t))u_r(t) + H_2(Y_r(t), u_r(t)) \\ &+ P(t) \left[\frac{\partial F_2}{\partial u}(Y_r(t), u_r(t))u_r(t) + F_2(Y_r(t), u_r(t)) \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

Teorema 2.2: Si el sistema (2.1) cumple las hipótesis (1),(2) y (3), entonces para todo $\tilde{u} > 0$ existe una ley de control $\bar{u}(X, Y, t)$ verificando:

$$|\bar{u}(X, Y, t) - u_r(t)| < \tilde{u} \quad (2.50)$$

y el sistema en lazo cerrado admite (X_r, Y_r) como solución global y asintóticamente estable.

Punteo de la prueba del Teorema 2.2:

Paso 1:

- Usar Teorema 2.1 para probar que $x(t)$, $y(t)$ y $v(t)$ son acotadas. Probar tres desigualdades que servirán a continuación.

Paso 2:

- Probar que $y(t)$ converge asintóticamente a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

Paso 3:

- Probar que $x(t)$ converge asintóticamente a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

Paso 4:

- Mediante el cambio de variable que lleva las variables \tilde{X}, \tilde{Y} a las variables x, y , probar que los estados \tilde{X} y \tilde{Y} también deben converger asintóticamente a cero.
- Finalmente $X - X_r$ y $Y - Y_r$ deben converger asintóticamente a cero, probando que los estados X y Y del sistema siguen a los estados de referencia X_r y Y_r asintóticamente.

Demostración:

Paso 1: Preparativos.

Por Teorema 2.1 sabemos que si se cumplen las Hipótesis (1) y (2), entonces para todo $\tilde{u} > 0$ existe una ley de control u tal que:

$$|v| = |u - u_r(t)| \leq \tilde{u} \quad (2.51)$$

y la función de Lyapunov:

$$U(x, y, t) = k(V(y, t)) + \int_0^{|x|_Q} \sigma(s) ds \quad (2.52)$$

cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{U}(x, y, t)|_{(2.17)} \leq & -\frac{1}{2}k'(V(y, t))W(y, t) - \frac{1}{2}\sigma(|x|_Q)\frac{x^T Rx}{|x|_Q} \\ & - \frac{1}{2}\frac{|v(x, y, t)|^2}{\lambda(|y|)} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Dónde todas las funciones cumplen las mismas condiciones vistas anteriormente, en el Teorema 2.1.

Integrando a ambos lados de la desigualdad entre 0 y t :

$$\begin{aligned} U(x(t), y(t), t) - U(x(0), y(0), 0) \leq & -\frac{1}{2}\int_0^t k'(V(y(s), t))W(y(s), t) ds \\ & - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(|x(s)|_Q)\frac{x(s)^T Rx(s)}{|x|_Q} ds - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{|v(x(s), y(s), t)|^2}{\lambda(|y(s)|)} ds \end{aligned} \quad (2.54)$$

Como $x(t)$ y $y(t)$ están acotadas, podemos tomar el límite en el que t tienda a infinito y asegurar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty k'(V(y(s), t))W(y(s), t) ds + \int_0^\infty \sigma(|x(s)|_Q)\frac{x(s)^T Rx(s)}{|x(s)|_Q} ds \\ + \int_0^\infty \frac{|v(x(s), y(s), t)|^2}{\lambda(|y(s)|)} ds < \infty \end{aligned} \quad (2.55)$$

Con esto último se probarán tres inecuaciones que serán de utilidad en los dos pasos posteriores. Además, será de utilidad saber que $y(t)$, $x(t)$ y $v(t)$ están acotadas, ya que según el Teorema 2.1 el sistema es estable y $|v| \leq \tilde{u}$.

La suma de cantidades positivas es finita si los sumandos son finitos, por lo que existe un número real M tal que:

$$\int_0^\infty k'(V(y(s), s))W(y(s), s)ds < M \quad (2.56)$$

$$\int_0^\infty \sigma(|x(s)|_Q) \frac{x(s)^T R x(s)}{|x(s)|_Q} ds < M \quad (2.57)$$

$$\int_0^\infty \frac{|v(x(s), y(s), t)|^2}{\lambda(|y(s)|)} ds < M \quad (2.58)$$

Paso 2: Probar que $y(t)$ converge asintóticamente a cero.

Usando (2.25) y (2.34-2.35):

$$\begin{aligned} \left(\gamma(|y(s)|) \sup_{s \in \mathbf{R}} |\sigma(s)| \right) |y(s)|^2 &\leq k'(\alpha_1(|y(s)|)) \alpha_3(|y(s)|) \\ &\leq k'(V(y(s), s))W(y(s), s) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Como $y(t)$ está acotada y $\gamma(y)$ es una función continua y positiva, existe una constante $c > 0$ tal que:

$$c \leq \gamma(|y(s)|) \sup_{s \in \mathbf{R}} |\sigma(s)| \quad (2.60)$$

Juntando (2.59) y (2.60):

$$c|y(s)|^2 \leq k'(V(y(s), s))W(y(s), s) \quad (2.61)$$

Usando (2.56) e integrando a ambos lados de (2.61), deducimos que:

$$c \int_0^\infty |y(s)|^2 \leq \int_0^\infty k'(V(y(s), s))W(y(s), s) < M \quad (2.62)$$

Concluimos que $y(t) \in L^2([0, \infty))$, dado que es cuadrado integrable en el intervalo $[0, \infty)$.

Por otro lado, calculamos \dot{y}^2 utilizando (2.17):

$$\dot{y}^2|_{(2.17)} = 2y\dot{y} = 2y(t)(f_0(y, t) + f_2(y, v, t)v) \quad (2.63)$$

Sabiendo que $y(t)$ y $v(t)$ están acotadas y $f_0, f_2 \in C^1$, entonces \dot{y}^2 es continua y acotada. Como $y^2(t)$ tiene derivada acotada, entonces $y^2(t)$ debe ser uniformemente continua.

Además, $y(t) \in L^2[0, \infty)$ implica lo siguiente:

$$\int_0^{\infty} y^2(t)dt < \infty \quad (2.64)$$

Lema 9 (Lema de Barbalat): Sea $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una función uniformemente continua en $[0, \infty)$. Supongamos que la integral impropia $\int_0^{\infty} \phi(x)dx$ existe y es finita. Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0 \quad (2.65)$$

Tomando $\phi(t) = y^2(t)$ probamos finalmente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y^2(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad (2.66)$$

Demostración: Ver apéndices.

Paso 3: Probar que $x(t)$ converge asintóticamente a cero.

Haremos un resumen de este paso de la prueba dado que se trabaja de forma similar al paso (2), pero con un poco más de complejidad.

El objetivo es probar que la siguiente función pertenece al espacio vectorial de las funciones de potencia finita $L^2([0, \infty))$:

$$\phi_1(t) = h_1(y(t), t) + h_2(y(t), v(x(t), y(t), t), t)v(x(t), y(t), t) \quad (2.67)$$

Luego se observa que:

$$\dot{x} = Mx(t) + \phi_1(t) \quad (2.68)$$

Reescribiendo esta última ecuación de una forma especial:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (M + K_d(t)D(t)^T Q + K_r(t)R^{1/2})x(t) \\ &+ \psi_1(t) - K_d(t)D(t)^T Qx(t) - K_r R^{1/2}x(t) \end{aligned} \quad (2.69)$$

Utilizando la hipótesis (3) y probando que la siguiente entrada pertenece al espacio vectorial $L^p([0, \infty))$:

$$w = \psi_1(t) - K_d(t)D(t)^T Qx(t) - K_r R^{1/2}x(t) \quad (2.70)$$

Se puede probar finalmente lo que se quería demostrar:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (2.71)$$

Paso 4: Cambio de coordenadas y límites.

Se puede probar en los pasos anteriores lo siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad (2.72)$$

Recordando que $P(t)$ está acotada y el siguiente cambio de variable:

$$x(t) = \tilde{X}(t) + P(t)\tilde{Y}(t), \quad y(t) = \tilde{Y}(t) \quad (2.73)$$

Tomando límite en $y(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{Y}(t) = 0 \quad (2.74)$$

Usando que $P(t)$ está acotada:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| P(t)y(t) \right| \leq c \lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)y(t) = 0 \quad (2.75)$$

Tomando límite en $x(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)y(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}(t) = 0 \quad (2.76)$$

Finalmente, sabemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}(t) = 0 &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (X(t) - X_r(t)) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{Y}(t) = 0 &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (Y(t) - Y_r(t)) = 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

Concluimos que el sistema es global y asintóticamente estable. Sin embargo perdimos información respecto a la uniformidad, dado que desconocemos la función de Lyapunov resultante a este procedimiento. Se puede recurrir a un Teorema mas general para probar la estabilidad global, uniforme y asintótica del sistema.

2.2.3. Estabilidad global, uniforme y asintótica

Finalmente se enuncia el resultado que se usará en el capítulo siguiente, que resume todo lo visto anteriormente.

Lema 10 (Yoshizawa, T. 11.3):

Si el sistema:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.78)$$

es un sistema periódico en t y es asintóticamente estable en el origen. Entonces es uniforme y asintóticamente estable en el origen.

Demostración: Ver libro de Yoshizawa [6].

Teorema 2.3:

Si se cumplen las hipótesis (1-3) y $X_r(t)$, $Y_r(t)$ y $u_r(t)$ son funciones periódicas de período T . Entonces existe una función de clase \mathcal{K}_∞ con derivada segunda continua y una función de saturación $\sigma(s)$ suave, tales que, la función de Lyapunov:

$$U(x, y, t) = k(V(y, t)) + \int_0^{|x|_Q} \sigma(s) ds \quad (2.79)$$

definida para el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Mx + h_1(y, t) + h_2(y, v, t)v \\ \dot{y} &= f_0(y, t) + f_2(y, v, t)v \end{aligned} \quad (2.80)$$

con la siguiente realimentación de estados:

$$v(x, y, t) = -\lambda(y) \left[k'(V(y, t)) \frac{\partial V}{\partial y}(y, t) f_2(y, 0, t) + \sigma(|x|_Q) \frac{x^T Q}{|x|_Q} h_2(y, 0, t) \right]^T \quad (2.81)$$

cumple lo siguiente:

$$\dot{U}(x, y, t)|_{(2.80)} \leq -\frac{1}{2} k'(V(y, t)) W(y, t) - \frac{1}{2} \sigma(|x|_Q) \frac{x^T R x}{|x|_Q} - \frac{1}{2} \frac{|v(x, y, t)|^2}{\lambda(|y|)} \quad (2.82)$$

Más aún, para todo $\tilde{u} > 0$ existe una función $\lambda(y)$ tal que:

$$|v(x, y, t)| = |u - u_r(t)| < \tilde{u} \quad (2.83)$$

Finalmente, como $(X_r(t), Y_r(t), u_r(t))$ son soluciones periódicas, entonces (X_r, Y_r) es una solución GUAS del sistema (2.1) en lazo cerrado con u .

Idea de la demostración:

La estabilidad global y asintótica se deduce del Teorema 2.2.

Luego, debemos probar que el siguiente sistema es periódico.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Mx + h_1(y, t) + h_2(y, v, t)v \\ \dot{y} &= f_0(y, t) + f_2(y, v, t)v\end{aligned}\tag{2.84}$$

Pudiéndose hacer esto último asegurándose de que $P(t)$ y $V(y, t)$ sean periódicas, lo cual no es trivial.

Una vez probado que el sistema es periódico, podemos usar el Lema 10 para probar finalmente que el origen es global, uniforme y asintóticamente estable.

Capítulo 3

Control de seguimiento aplicado al sistema péndulo-carrito

En este Capítulo aplicaremos el controlador diseñado a partir del Teorema 2.3, presentado en el Capítulo 2. Se estabilizarán las oscilaciones de un sistema péndulo-carrito alrededor de su posición vertical. Mas precisamente, debemos diseñar una entrada de control $F(t)$ de manera tal que el péndulo siga una cierta señal de referencia. Vamos a suponer además una condición inicial $\theta(0) \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Dicha señal de referencia cumplirá:

$$\tan(\theta_r(t)) = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) \quad (3.1)$$

Para aplicar el Teorema 2.3 asumiremos la existencia de una solución al problema y presentaremos un cambio de variable que transforma la descripción del sistema conocida a una que se acomode a los resultados teóricos.

A continuación, se deberán definir las variables de estado X e Y y probar que $\tilde{Y} = Y - Y_r(t)$ es asintóticamente estable en el origen. Luego, mediante el Teorema 2.3 se puede determinar la ley de control u que establezca al sistema $(X, Y)^T$. Definiendo convenientemente las variables X e Y , se puede aplicar dicho resultado iterativamente hasta resolver el problema.

Será de utilidad recordar lo siguiente:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{(m+M)mgL\sin(\theta) - mL\cos(\theta)(F + mL\dot{\theta}^2 \sin(\theta))}{mL^2(M + m\sin^2(\theta))} \\ \ddot{x} = \frac{F + mL\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - mg\cos(\theta)\sin(\theta)}{M + m\sin^2(\theta)} \end{cases} \quad (3.2)$$

No se mostrarán las cuentas en detalle, sino que se enfocará en el procedimiento y en la correcta utilización de los Teoremas.

3.1. Dinámica del sistema

Usando la ecuación (3.2), se deduce fácilmente la descripción en variables de estado del sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{(m+M)mgL\text{sen}(\theta) - m^2L^2\dot{\theta}^2 \cos(\theta)\text{sen}(\theta)}{mL^2(M+m\text{sen}^2(\theta))} \\ \dot{x} \\ \frac{mL\dot{\theta}^2 \text{sen}(\theta) - mg\cos(\theta)\text{sen}(\theta)}{M+m\text{sen}^2(\theta)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\cos(x_1)}{L(M+m\text{sen}^2(\theta))} \\ 0 \\ \frac{1}{(M+m\text{sen}^2(\theta))} \end{bmatrix} F \quad (3.3)$$

Consideremos el siguiente cambio de variables brindado por los autores.:

$$\begin{cases} \tau = \sqrt{\frac{g}{L}}t \\ t_1 = \tan(\theta) \\ r_1 = \dot{\theta}(1 + t_1^2)\sqrt{\frac{L}{g}} \\ x_1 = \frac{x}{L} + 2\ln(t_1 + \sqrt{1 + t_1^2}) \\ s_1 = \frac{\dot{x}}{\sqrt{gL}} + \frac{2r_1}{\sqrt{1+t_1^2}} + t_1 \\ u_1 = -\frac{F+mL\dot{\theta}^2 \text{sen}(\theta) - mg\text{sen}(\theta)\cos(\theta)}{Mg+m\text{gsen}^2(\theta)} + 2t_1\left(1 + \frac{r_1^2}{(1+t_1^2)^{3/2}}\right) + r_1 \end{cases} \quad (3.4)$$

que transforma $\mathbf{R}^2 \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbf{R}$ en \mathbf{R}^4 .

Su justificación teórica se puede encontrar en [5].

Haciendo cuentas y usando la transformación (3.4), la descripción (3.3) del sistema se transforma en la siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = s_1 - t_1 \\ \frac{ds_1}{d\tau} = u_1 \\ \frac{dt_1}{d\tau} = r_1 \\ \frac{dr_1}{d\tau} = -(t_1 + r_1)\sqrt{1 + t_1^2} + u_1\sqrt{1 + t_1^2} \end{cases} \quad (3.5)$$

En esta sección y la siguiente se usará la notación del punto "·" para derivar respecto a la nueva variable τ , y al símbolo τ lo notaremos con la letra t .

Lo mejor de este cambio de variable es que lleva la descripción del sistema péndulo-carrito a la descripción de un sistema prealimentado (2.1), por lo que tenemos posibilidad de aplicar los Teoremas demostrados en el capítulo anterior. Faltaría terminar de identificar las variables de estado X e Y .

Usando (3.1), (3.4) y (3.5) se deducen las trayectorias de referencia, que surgen de la física del sistema y de imponer que $\theta = \theta_r$:

$$\begin{aligned} t_{1r}(t) &= \cos(t), \quad r_{1r}(t) = -\operatorname{sen}(t) \\ u_{1r}(t) &= -\frac{\cos(t)}{\sqrt{1 + \cos^2(t)}} + \cos(t) - \operatorname{sen}(t) \\ s_{1r}(t) &= \cos(t) + \operatorname{sen}(t) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(t)\right) \\ x_{1r}(t) &= 1 - \cos(t) - \int_0^t \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(s)\right) ds \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como antes, consideramos el cambio de variable que lleve el problema de seguimiento al problema de estabilizar el origen de un sistema no lineal y variante con el tiempo:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1 - x_{1r}(t) \\ \tilde{s}_1 = s_1 - s_{1r}(t) \\ \tilde{t}_1 = t_1 - t_{1r}(t) \\ \tilde{r}_1 = r_1 - r_{1r}(t) \\ u_2 = u_1 - u_{1r}(t) \end{cases} \quad (3.7)$$

La nueva dinámica del sistema queda:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{s}_1 - \dot{\tilde{t}}_1 \\ \dot{\tilde{s}}_1 = u_2 \\ \dot{\tilde{t}}_1 = \tilde{r}_1 \\ \dot{\tilde{r}}_1 = -(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} + r_{1r}(t) \frac{\tilde{t}_1^2 + 2\tilde{t}_1 t_{1r}(t)}{\zeta(t_1, t_{1r}(t))} + u_2 \sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} \end{cases} \quad (3.8)$$

donde:

$$\zeta(t_1, t_{1r}(t)) = 1 + t_{1r}^2(t) + \sqrt{1 + t_{1r}^2(t)} \sqrt{1 + t_1^2} \quad (3.9)$$

El problema se resume a hallar una ley de control u_2 que haga el origen del sistema (3.8) un equilibrio global y asintóticamente estable. Nos gustaría utilizar el Teorema 2.3 siguiendo el siguiente procedimiento:

- 1) Estabilización GUAS el sub-sistema $(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$.
- 2) Estabilización GUAS del sub-sistema $(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$: definir $X = s_1$, $Y = (t_1, r_1)$, aplicar el paso anterior y el Teorema 2.3.
- 3) Estabilización GUAS del sistema completo: definir $X = x_1$, $Y = (s_1, t_1, r_1)$, aplicar el paso anterior y el Teorema 2.3.

3.2. Estabilización del sistema.

Presentamos la desigualdad de Young.

Desigualdad de Young:

$$ab \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{p-1}{p}|b|^q \quad (3.10)$$

para todo $a, b \in \mathbf{R}$ y para todo $p > 1$ y $q > 1$ satisfaciendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Paso 1: Estabilización GUAS el sub-sistema $(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$.

La siguiente ley de control lleva a resultados razonables:

$$u_2 = -\frac{r_{1r}(t)\tilde{t}_1^2}{\zeta(t_1, t_{1r}(t))\sqrt{1+t_1^2}} + \frac{2(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)t_{1r}(t)\tilde{t}_1}{\sqrt{1+t_1^2}(\sqrt{1+\tilde{t}_1^2} + \sqrt{1+t_1^2})} + u_3 \quad (3.11)$$

La dinámica (3.8) se transforma en la siguiente:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{s}_1 - \tilde{t}_1 \\ \dot{\tilde{s}}_1 = -\frac{r_{1r}(t)\tilde{t}_1^2}{\zeta(t_1, t_{1r}(t))\sqrt{1+t_1^2}} + \frac{2(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)t_{1r}(t)\tilde{t}_1}{1+t_1^2 + \sqrt{1+t_1^2}\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}} + u_3 \\ \dot{\tilde{t}}_1 = \tilde{r}_1 \\ \dot{\tilde{r}}_1 = -(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)\sqrt{1+\tilde{t}_1^2} + \frac{2\tilde{t}_1 r_{1r}(t)t_{1r}(t)}{\zeta(t_1, t_{1r}(t))} - \frac{t_{1r}^2(t)(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)}{\sqrt{1+\tilde{t}_1^2} + \sqrt{1+t_1^2}} + u_3\sqrt{1+t_1^2} \end{cases} \quad (3.12)$$

Consideremos la siguiente función de Lyapunov definida positiva y radialmente no acotada:

$$V_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1) = (1 + \tilde{t}_1^2)^{3/2} - 1 + \tilde{t}_1\tilde{r}_1 + \tilde{r}_1^2 \quad (3.13)$$

Imponiendo $u_3 = 0$, con la desigualdad de Young se puede probar que:

$$\dot{V}_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)|_{(3.12)} \leq -\frac{2 + \sqrt{2}}{4}\tilde{t}_1^2\sqrt{1+\tilde{t}_1} - \tilde{r}_1^2\left(\frac{-7 + 2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}\right) \quad (3.14)$$

Como $\dot{V}_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)|_{(3.12)}$ es menor o igual a una función definida negativa, radialmente no acotada e invariante con el tiempo, deducimos a partir del Teorema 1.2 la estabilidad global, asintótica y uniforme del sub-sistema $(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ bajo la ley de control (3.11) con $u_3 = 0$ (lazo abierto).

Será importante recordar dicho cambio de variable para los pasos posteriores, dado que el sub-sistema $(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ deberá seguir teniendo al origen como un equilibrio GUAS. De esta forma podremos estar habilitados a aplicar el Teorema 2.3 demostrado anteriormente.

Paso 2: Estabilización GUAS el sub-sistema $(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$.

Verifiquemos las hipótesis de Teorema 2.3 con $X = s_1$ y $Y = (t_1, r_1)^T$ cumpliendo la dinámica (3.5). En este caso: $M = 0$, $H_1(Y) = 0$, $H_2(Y, u_1) = 1$, $F_0(Y) = (r_1, -(t_1 + r_1)\sqrt{1 + t_1^2})^T$ y $F_2(Y, u_1) = (0, u_1\sqrt{1 + t_1^2})^T$.

La hipótesis (1) se verifica viendo la ecuación (3.6) y asegurándose de que las trayectorias de referencia sean de clase C^2 , acotadas en el intervalo $[0, \infty)$ y verificando que la terna $(X_r(t), Y_r(t), u_{1r}(t))$ sea solución al sistema (3.5). Que las trayectorias sean acotadas y de clase C^2 claramente se cumple, mientras que para verificar lo otro alcanza con acordarse de como fueron construidas dichas señales de referencia.

La hipótesis (2) se cumple, ya que en el paso anterior impusimos que el punto $(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1) = (0, 0)$ sea un equilibrio GUAS del sub-sistema $(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$.

La hipótesis (3) se cumple. Como $P(t) = 0$ y $D(t) = H_2(Y_r(t), u_r(t)) = 1$, podemos elegir $Q = I$, $K_d(t) = -1$, $K_r(t) = 0$ y ver que el sistema

$$\dot{\mathcal{X}} = (M + K_d(t)D(t)^T Q + K_r(t)R^{1/2})\mathcal{X} = -\mathcal{X} \quad (3.15)$$

es exponencialmente estable en el origen.

Podemos aplicar el Teorema 2.3, que prueba la existencia de una función de Lyapunov V_2 definida positiva propia que depende de X e Y y una función $k_1(s)$ diferenciable, tales que, la derivada de la función

$$V_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) = k_1(V_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)) + \sqrt{1 + \tilde{s}_1^2} - 1 \quad (3.16)$$

es menor o igual a una función definida negativa e invariante con el tiempo.

Eligiendo $k_1(s) = 3s$, se puede probar que:

$$\dot{V}_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)|_{(3.12)} \leq -(c_1\tilde{t}_1^2 + c_2\tilde{r}_1^2)\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} + G_1(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)u_3 \quad (3.17)$$

Con $c_1 = 5\sqrt{2} - \frac{3}{4}$, $c_2 = 2(\sqrt{2} - 1)$ y

$$G_1(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) = 3(\tilde{t}_1 + 2\tilde{r}_1)\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} + \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1 + \tilde{s}_1^2}} \quad (3.18)$$

Dado que no es el final del diseño del controlador, ya que también debemos estabilizar la dinámica de \tilde{x}_1 , se sugiere el siguiente cambio de variables:

$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 + 50\tilde{s}_1 \quad (3.19)$$

$$u_3 = \frac{1}{50} \left(\tilde{t}_1 - \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1 + \tilde{s}_1^2}} \right) + u_4 \quad (3.20)$$

De nuevo, consideramos $u_4 = 0$, usamos las ecuaciones (3.17), (3.19-3.20) y la desigualdad de Young para probar lo siguiente:

$$\dot{V}_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)|_{(3.12)} \leq -\frac{10}{51}\tilde{t}_1^2\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} - \frac{5}{22}\tilde{r}_1^2\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} - \frac{1}{200}\frac{\tilde{s}_1^2}{1 + \tilde{s}_1^2} \quad (3.21)$$

Como $\dot{V}_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)|_{(3.12)}$ es menor o igual a una función definida negativa, radialmente no acotada e invariante con el tiempo, deducimos a partir del Teorema 1.2 la estabilidad global, asintótica y uniforme del sub-sistema $(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ bajo la ley de control (3.20) con $u_4 = 0$.

Paso 3: Estabilización GUAS del sistema completo.

Verifiquemos las hipótesis de Teorema 2.3 con $X = x_1$ y $Y = (s_1, t_1, r_1)^T$ cumpliendo la dinámica (3.5). En este caso: $M = 0$, $H_1(Y) = s_1 - t_1$, $H_2(Y, u_1) = 0$, $F_0(Y) = (0, r_1, -(t_1 + r_1)\sqrt{1 + t_1^2})^T$ y $F_2(Y, u_1) = (u_1, 0, u_1\sqrt{1 + t_1^2})^T$.

La hipótesis (1) se verifica por la misma razón que antes, dado que las trayectorias de referencia siguen siendo las mismas.

La hipótesis (2) se cumple ya que en el paso anterior impusimos que el punto $(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) = (0, 0, 0)$ sea un equilibrio GUAS del sub-sistema $(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$.

La hipótesis (3) se cumple. El cambio de variable (3.19) implica que $P(t) = (50, 0, 0)$, por lo tanto $D(t) = P(t) \left[\frac{\partial F_2}{\partial u_1}(Y_r(t), u_{1r}(t))u_{1r}(t) + F_2(Y_r(t), u_{1r}(t)) \right] = 100u_{1r}(t)$. Podemos elegir $Q = I$, $K_d(t) = K_d(t)$, $K_r(t) = 0$ y ver que el sistema

$$\dot{\mathcal{X}} = 100K_d(t)u_{1r}(t)\mathcal{X} \quad (3.22)$$

es exponencialmente estable en el origen.

El autor da garantía de la existencia de una función $K_d(t)$ continua y acotada que cumpla con esta hipótesis.

El cambio de variable (3.19-3.20) transforma la descripción del sistema (3.12) en la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}}_2 = \frac{\tilde{s}_1^3}{1+\tilde{s}_1^2+\sqrt{1+\tilde{s}_1^2}} + \frac{50r_{1r}(t)\tilde{t}_1^2}{\zeta(t_1,t_{1r}(t))\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}} - \frac{100t_{1r}(t)(\tilde{t}_1+\tilde{r}_1)\tilde{t}_1}{1+\tilde{t}_1^2+\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}} + 50u_4 \\ \dot{\tilde{s}}_1 = \frac{-r_{1r}(t)\tilde{t}_1^2}{\zeta(t_1,t_{1r}(t))\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}} + \frac{2(\tilde{t}_1+\tilde{r}_1)t_{1r}(t)\tilde{t}_1}{1+\tilde{t}_1^2+\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}} + \frac{1}{50}\left(\tilde{t}_1 - \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1+\tilde{s}_1^2}}\right) + u_4 \\ \dot{\tilde{t}}_1 = \tilde{r}_1 \\ \dot{\tilde{r}}_1 = -(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} - \frac{t_{1r}^2(t)(\tilde{t}_1+\tilde{r}_1)}{\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}+\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}} + \frac{2r_{1r}(t)t_{1r}(t)\tilde{t}_1}{1+t_{1r}^2(t)+\sqrt{1+t_{1r}^2(t)}\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}} \\ \quad + \left(\frac{1}{50}\left(\tilde{t}_1 - \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1+\tilde{s}_1^2}}\right) + u_4\right)\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Podemos aplicar el Teorema 2.3, que prueba la existencia de una función de Lyapunov V_3 definida positiva propia que depende de X e Y y una función $k_2(s)$ diferenciable, tales que, la derivada de la función

$$V_3(\tilde{x}_2, \tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) = k_2(V_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)) + \sqrt{1 + \tilde{x}_2^2} - 1 \quad (3.24)$$

es menor o igual a una función definida negativa e invariante con el tiempo.

Eligiendo $k_2(s) = 164(s + 1)^2 - 164$, se puede probar que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(\tilde{x}_2, \tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)|_{(3.23)} \leq & -\tilde{t}_1^2\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} - \tilde{r}_1^2\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} - \frac{4\tilde{s}_1^2}{5\sqrt{1 + \tilde{s}_1^2}} \\ & + G_2(\tilde{x}_2, \tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)u_4 \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde:

$$\begin{aligned} G_2(\tilde{x}_2, \tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) = & \frac{50\tilde{x}_2}{\sqrt{1 + \tilde{x}_2^2}} + 328(V_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) + 1) \\ & \times \left(3(\tilde{t}_1 + 2\tilde{r}_1)\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} + \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1 + \tilde{s}_1^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Tomando la ley de control:

$$u_4 = -G_2(\tilde{x}_2, \tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) \quad (3.27)$$

Como $\dot{V}_3(\tilde{x}_2, \tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)|_{(3.23)}$ es menor o igual a una función definida negativa, radialmente no acotada e invariante con el tiempo, deducimos a partir del Teorema 1.2 la estabilidad global, asintótica y uniforme del sistema completo bajo la ley de control $u_4 = -G_2(\tilde{x}_2, \tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$.

3.3. Ley de control y trayectorias de referencia

Usando (3.4), finalmente conocemos la ley de control $F(t)$ que hay que aplicar al carrito para que el estado $\theta(t)$ del sistema siga la trayectoria de referencia $\theta_r(t)$:

$$F(t) = mg\text{sen}(\theta)\cos(\theta) - mL\dot{\theta}^2 \text{sen}(\theta) + \left(Mg + mg\text{sen}^2(\theta) \right) \times \left[-u_1 + 2\tan(\theta) \left(1 + \frac{L}{g} \frac{\dot{\theta}^2}{\cos(\theta)} \right) + \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{\dot{\theta}}{\cos^2(\theta)} \right] \quad (3.28)$$

dónde:

$$u_1 = u_2 - \frac{\cos(\tau)}{\sqrt{1 + \cos^2(\tau)}} + \cos(\tau) - \text{sen}(\tau) \quad (3.29)$$

$$u_2 = \frac{\cos(\theta)\cos(\tau)\tilde{t}_1^2}{\zeta(t_1, t_{1r}(t))} + \frac{2\cos^2(\theta)(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)\cos(\tau)\tilde{t}_1}{\left(\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2 \cos(\theta)} + 1 \right)} + u_3 \quad (3.30)$$

$$\zeta(t_1, t_{1r}(t)) = 1 + \cos^2(\tau) + \frac{\sqrt{1 + \cos^2(\tau)}}{\cos(\theta)} \quad (3.31)$$

$$u_3 = \frac{1}{50} \left(\tilde{t}_1 - \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1 + \tilde{s}_1^2}} \right) - \frac{50\tilde{x}_2}{\sqrt{1 + \tilde{x}_2^2}} - 328(V_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) + 1) \times \left(\frac{3(\tilde{t}_1 + 2\tilde{r}_1)}{\cos(\theta)} + \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1 + \tilde{s}_1^2}} \right) \quad (3.32)$$

$$V_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) = 3V_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1) + \sqrt{1 + \tilde{s}_1^2} - 1 \quad (3.33)$$

$$V_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1) = (1 + \tilde{t}_1^2)^{3/2} - 1 + \tilde{t}_1\tilde{r}_1 + \tilde{r}_1^2 \quad (3.34)$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{x}{L} + 2\log\left(\tan(\theta) + \frac{1}{\cos^2(\theta)} \right) - 1 + \cos(\tau) + \int_0^\tau \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen}(s) \right) ds + 50\tilde{s}_1 \quad (3.35)$$

$$\tilde{s}_1 = \frac{\dot{x}}{\sqrt{gL}} + \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{2\dot{\theta}}{\cos(\theta)} + \tan(\theta) - \cos(\tau) - \text{sen}(\tau) + \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}(s)\right) \quad (3.36)$$

$$\tilde{t}_1 = \tan(\theta) - \cos(\tau) \quad (3.37)$$

$$\tilde{r}_1 = \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{\dot{\theta}}{\cos(\theta)} + \text{sen}(\tau) \quad (3.38)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{L}}t \quad (3.39)$$

Por otro lado, las trayectorias de referencia del sistema original se pueden calcular en función de las ecuaciones (3.4) y (3.6):

$$\theta_r(t) = \arctan\left(\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)\right) \quad (3.40)$$

$$\dot{\theta}_r(t) = -\frac{\sqrt{\frac{g}{L}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)}{1 + \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)} \quad (3.41)$$

$$x_r(t) = L - L \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) - L \int_0^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}(s)\right) ds - 2L \log\left(\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + \sqrt{1 + \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)}\right) \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) = & -\sqrt{gL} \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)\right) + \sqrt{gL} \text{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) \\ & + \frac{2\sqrt{gL}}{\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + \sqrt{1 + \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)}} \left[\text{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)\text{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)}{\sqrt{1 + \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)}} \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

Estas funciones serán de gran importancia para cuando se muestren las simulaciones y se pruebe el desempeño del controlador.

Capítulo 4

Simulaciones y resultados gráficos

Con el fin de demostrar que el controlador diseñado funciona y que tan bien funciona, se implementa un algoritmo en MatLab capaz de simular la acción de control diseñada sobre un sistema péndulo-carrito. Se realizaron cuatro experimentos con los siguientes valores numéricos: $M = 1kg$, $m = 1kg$, $g = 9,8m/s^2$ y $L = 9,8/9m$, de los cuales sólo el primero se mostrará.

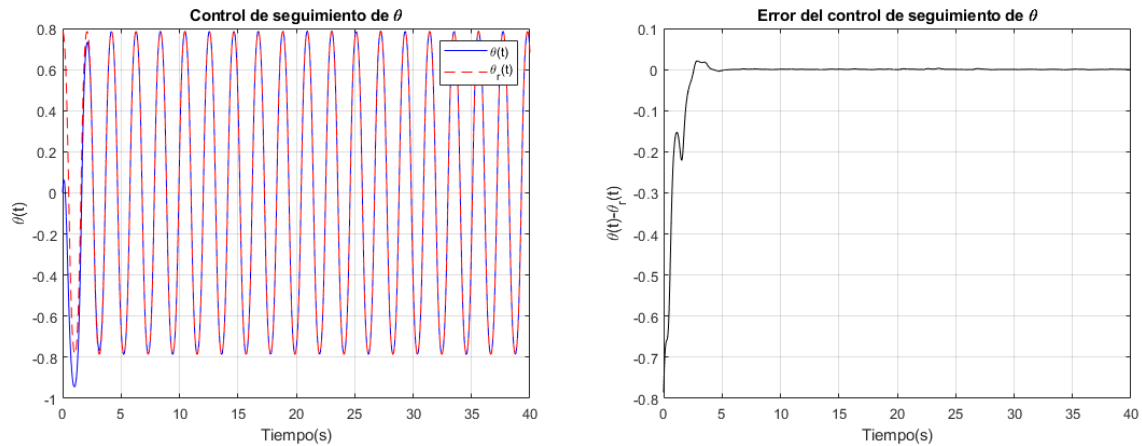
Para el primer experimento se consideró como condición inicial el vector $X_0 = (\theta(0), \dot{\theta}(0), x(0), \dot{x}(0)) = (0, 0, 0, 9,8)^T$ y se simuló al sistema en lazo cerrado. Se mostrarán las gráficas correspondientes a los estados θ , $\dot{\theta}$, x y \dot{x} , comparando los estados de referencia y los estados del sistema simulado. También se graficarán las curvas de error, definidas como la diferencia entre el estado del sistema simulado y su estado de referencia.

En el segundo experimento, se consideró una condición inicial $\theta(0)$ que no perteneciera al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. En este caso la ecuación diferencial arrojó soluciones complejas, que claramente carecen de significado físico. Así se prueba la incapacidad del controlador de funcionar correctamente para condiciones iniciales fuera del dominio $\mathbf{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbf{R}$.

En el tercer experimento se supuso una nueva señal de referencia $\theta_r(t) = 0$ y se encontraron las nuevas trayectorias a seguir. Implementando los nuevos cambios al algoritmo realizado en MatLab, se pudo recuperar el caso de la estabilidad del péndulo entorno a su equilibrio inestable.

Finalmente, en el cuarto experimento se actualizó el modelo del sistema por uno que tuviera en cuenta la fricción k y la inercia I . Se añadieron además perturbaciones a los parámetros del modelo con el objetivo de observar la robustez del controlador diseñado. Se tuvieron resultados bastante satisfactorios, obteniendo un poco de ruido en las señales de error.

Evolución del estado $\theta(t)$:



(a) Estado $\theta(t)$ del sistema y referencia $\theta_r(t)$.

(b) Señal de Error.

Figura 4.1: Vemos una respuesta bastante rápida y precisa, el error entre el estado del sistema y la referencia es casi despreciable luego de 5 segundos de haber comenzado la simulación. La convergencia parece ser asintótica, aunque en realidad presenta pequeñas perturbaciones, con un orden de amplitud de 1×10^{-3} .

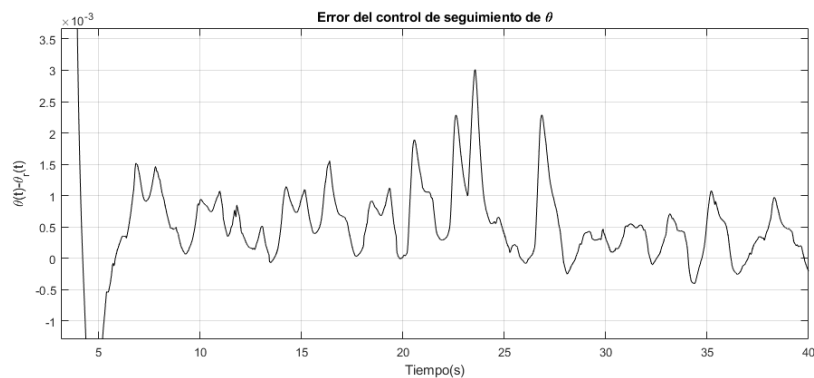


Figura 4.2: Perturbaciones observadas, el hecho de que se vean como una señal 'aleatoria' nos puede dar a entender que se trata simplemente de un error numérico.

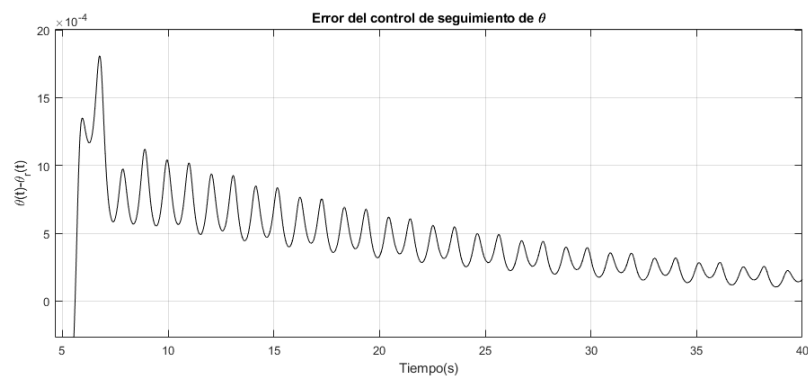
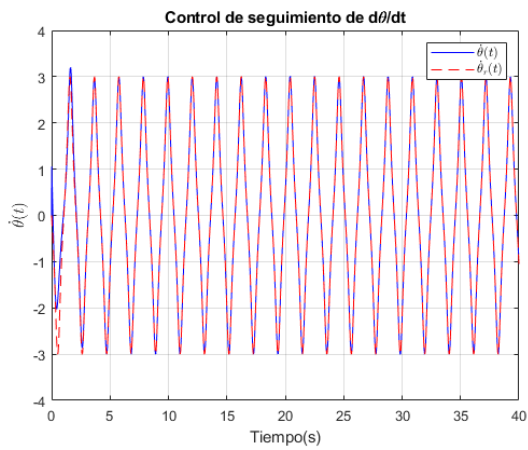
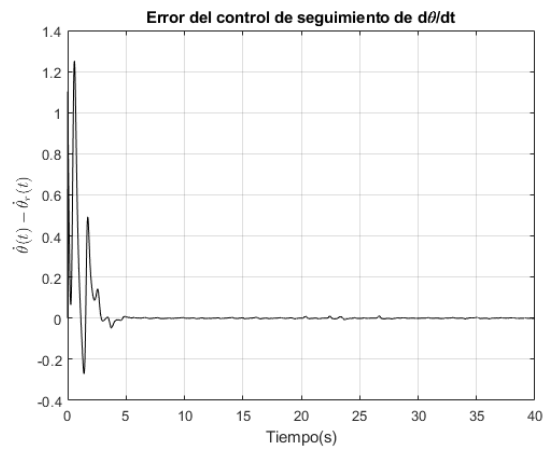


Figura 4.3: Utilizando 'ode45.m' en lugar de 'ode15s.m', las perturbaciones cambian bastante, confirmando lo que habíamos intuido. Todo parece andar bien.

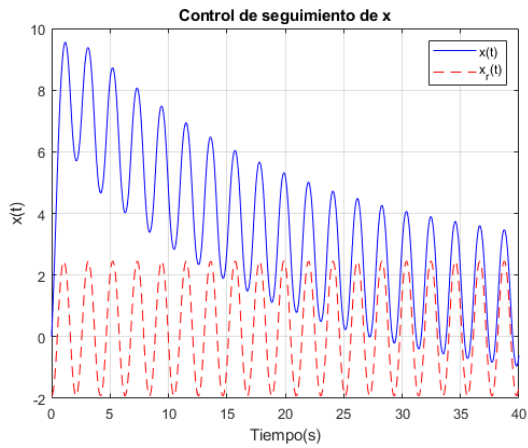
Evolución de los estados $\dot{\theta}(t)$, $x(t)$ y $\dot{x}(t)$:



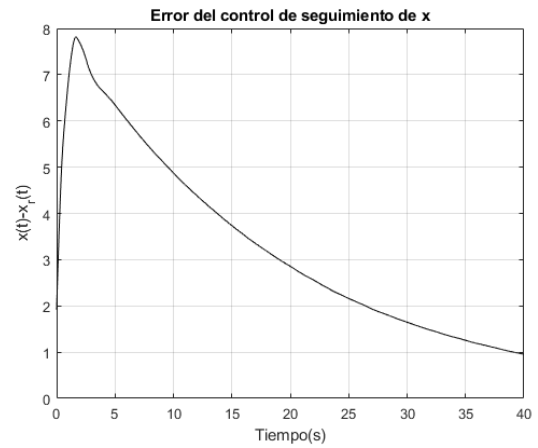
(a) Estado $\theta(t)$ del sistema y referencia $\theta_r(t)$.



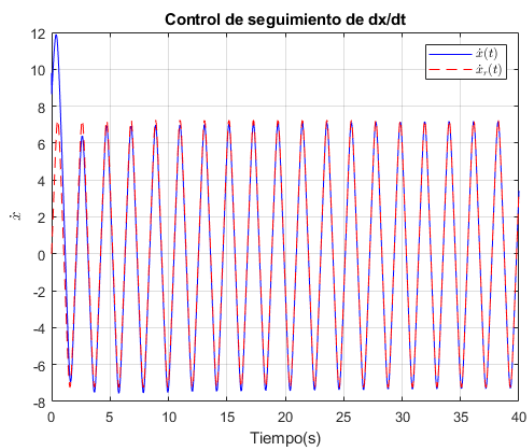
(b) Señal de Error.



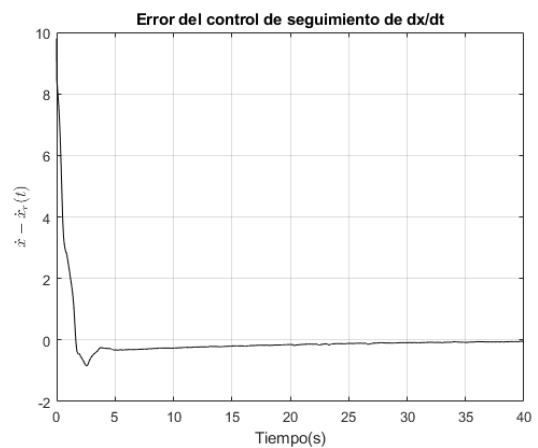
(c) Estado $x(t)$ del sistema y referencia $x_r(t)$.



(d) Señal de Error.



(e) Estado $\dot{x}(t)$ del sistema y referencia $\dot{x}_r(t)$.



(f) Señal de Error.

Figura 4.4: En general, vemos una respuesta rápida, a excepción de la posición del carrito, que demora bastante en llegar a parecerse a la señal de referencia.

Ley de control $u_{1r}(t)$:

También puede ser interesante comparar la ley de control simulada $u_1(t)$ y su señal de referencia $u_{1r}(t)$.

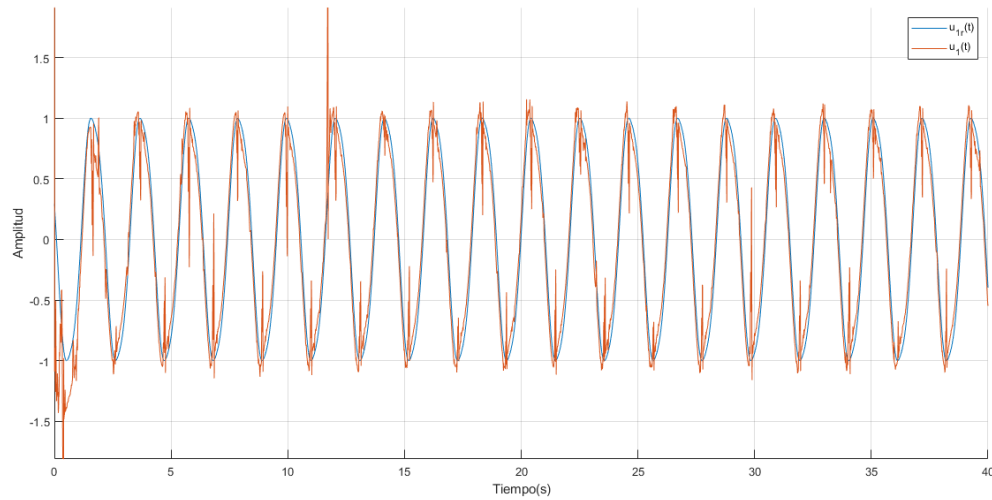


Figura 4.5: Ley de control y su señal de referencia.

Claramente conseguimos una ley de control que está a una cierta distancia \tilde{u} de la señal de referencia. Pudimos haber hecho la comparación entre la ley $F(t)$ y su señal de referencia $F_r(t)$, pero para hallar la señal de referencia en este caso hay que trabajar bastante con las ecuaciones. Nos conformaremos simplemente con esta gráfica.

Conclusiones

Se presentaron las ideas básicas de la teoría de los sistemas no autónomos y una posible aplicación de su estudio. Se pudo mostrar una técnica de control que utiliza dicha clase de sistemas para el control de seguimiento de un péndulo-carrito. Se mostraron las ideas generales que el autor tuvo que tener en mente para demostrar que el diseño del controlador funciona. Para el diseño del controlador se necesitó el conocimiento de una descripción del sistema que tiene una forma muy particular y que puede ser muy difícil de encontrar en un caso general, lo que imposibilitaría el uso de este tipo de técnica. Se tuvo la suerte de encontrar dicha descripción del sistema. Se verificaron las hipótesis del Teorema 2.3, las cuales imponen condiciones bastante fuertes sobre el sistema. Se mostró como aplicar la técnica de control para hallar la realimentación estabilizante, lo cual requiere de bastante práctica. Finalmente se encontró la ley de control capaz de hacer que el sistema siga la señal de referencia que teníamos como objetivo..

Bibliografía

- [1] Mazenc & Bowong. «Tracking trajectories of the cart-pendulum system». En: (2000).
- [2] Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [3] Mazenc. *Stabilisation de trajectoires, Ajout d'integration, Commande sature et es*. 1996.
- [4] Mazenc & Praly. «Asymptotic tracking of a reference state for systems with a feed-forward structure». En: (2000).
- [5] Mazenc & Praly. «Strict Lyapunov Functions for Feedforward Systems and Applications». En: (2000).
- [6] Yoshizawa. *Stability theory by Lyapunov's second method*. The mathematical Society of Japan., 1966.

Apéndices

Lema de Barbalat

Sea $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una función uniformemente continua en $[0, \infty)$. Supongamos que la integral impropia $\int_0^\infty \phi(x)dx$ existe y es finita. Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0 \quad (4.1)$$

Demostración:

Supongamos por absurdo que existe una constante positiva k_1 tal que para todo $T > 0$ podemos encontrar $T_1 \geq T$ tal que:

$$\phi(T_1) \geq k_1 \quad (4.2)$$

Como ϕ es uniformemente continua, existe una constante positiva k_2 tal que $|\phi(t + \tau) - \phi(\tau)| < \frac{k_1}{2}$ para todo $t \geq 0$ y para todo $0 \leq \tau \leq k_2$.

Por lo que:

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &= |\phi(t) - \phi(T_1) + \phi(T_1)| \geq |\phi(T_1)| - |\phi(t) - \phi(T_1)| \\ &> k_1 - \frac{1}{2}k_1 = \frac{1}{2}k_1, \quad \forall t \in [T_1, T_1 + k_2] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Entonces:

$$\left| \int_{T_1}^{T_1+k_2} \phi(t)dt \right| = \int_{T_1}^{T_1+k_2} |\phi(t)|dt > \frac{1}{2}k_1k_2 \quad (4.4)$$

Por lo que la integral $\int_0^t \phi(t)dt$ diverge cuando $k_2 \rightarrow \infty$.

Llegamos a una contradicción:

$$\int_0^\infty \phi(t)dt = \infty \quad (4.5)$$

Lema 5

Existe una función continua y positiva γ tal que:

$$|h_1(y, t)| \leq \gamma(|y|)|y|^2 \quad (4.6)$$

Demostación:

Primero observamos que:

$$h_1(0, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.7)$$

Luego, tomando la derivada respecto a y y evaluando en $y = 0$:

$$\frac{\partial h_1}{\partial y}(0, t) = \frac{\partial H_1}{\partial y}(Y_r(t)) + \frac{\partial H_2}{\partial y}(Y_r(t), u_r(t))u_r(t) + P(t) \left[\frac{\partial f_0}{\partial y}(0, t) - A(t) \right] - C(t) \quad (4.8)$$

Usando las definiciones de $A(t)$ y $C(t)$ tenemos:

$$\frac{\partial h_1}{\partial y}(0, t) = P(t) \left[\frac{\partial f_0}{\partial y}(0, t) - \frac{\partial F_0}{\partial Y}(Y_r(t)) - \frac{\partial F_2}{\partial Y}(Y_r(t), u_r(t))u_r(t) \right] \quad (4.9)$$

Utilizando la definición de f_0 , tenemos que:

$$\frac{\partial h_1}{\partial y}(0, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.10)$$

Usando (4.7), (4.10) y el hecho de que H_1, H_2, F_0 y F_2 son de clase C^2 , probamos finalmente que:

$$\begin{aligned} |h_1(y, t)| &\leq \left[\int_0^1 \left| \frac{\partial h_1}{\partial y}(sy, t) - \frac{\partial h_1}{\partial y}(0, t) \right| ds \right] |y| \\ &\leq \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}(usy, t) - \frac{\partial h_1}{\partial y}(0, t) \right| du \right) s ds \right] |y| \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dado que $Y_r(t)$ y $u_r(t)$ son funciones acotadas y $\frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}$ es continua, entonces debe existir una función $\gamma(|y|)$ tal que:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}(usy, t) - \frac{\partial h_1}{\partial y}(0, t) \right| du \right) s ds \leq \gamma(|y|) \quad (4.12)$$

Probando finalmente que $|h_1(y, t)| \leq \gamma(|y|)|y|^2$.

Lema 7

Sea V una función continua definida positiva propia y sea W una función continua definida positiva. Sea γ una función continua no negativa que satisfice:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \text{Sup} \left\{ \frac{\gamma(|y|)}{W(y)} \right\} < \infty \quad (4.13)$$

Entonces existe una función k continua y definida positiva en $[0, \infty)$ que satisfice:

$$k(V(y))W(y) \geq \gamma(|y|) \quad (4.14)$$

Demostración:

La ecuación (4.13), la continuidad de γ y las propiedades de la función V nos aseguran la existencia de un número real positivo c tal que:

$$\frac{\gamma(|y|)}{W(y)} \leq c \quad \forall y : V(y) \leq c \quad (4.15)$$

Definimos una función \bar{k} en $[0, \infty)$ de la siguiente forma:

$$\bar{k}(v) = \text{Sup}_{\{y: V(y) \leq v\}} \left\{ \max \left\{ c, \frac{\gamma(|y|)}{W(y)} \right\} \right\} \quad (4.16)$$

\bar{k} es positiva, no decreciente y es igual a c para valores de y suficientemente lejos del origen.

Definimos la siguiente función:

$$k(v) = \int_v^{v+1} \bar{k}(s) ds \quad (4.17)$$

k es una función continua, definida positiva propia y satisfice 4.14.

Lema 8

Sea \tilde{u} un número real estrictamente positivo. Sea $a(x, y, v, t)$ una función que satisface:

$$|a(x, y, 0, t)| + \frac{|a(x, y, v, t) - a(x, y, 0, t)|}{|v|} \leq \Omega(|y|), \quad \forall v : |v| \leq \tilde{u} \quad (4.18)$$

para alguna función continua y positiva Ω . Sea ϕ una función positiva decreciente de clase C^1 tal que:

$$\phi(0) = 1, \quad \phi(s) > 0, \quad \forall s \in [0, 1), \quad \phi(s) = 0, \quad \forall s > 1 \quad (4.19)$$

Entonces, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$a(x, y, v_s, t)v_s \leq -\frac{\delta}{2}\phi(|y|)|a(x, y, 0, t)|^2 \quad (4.20)$$

donde:

$$v_s = -\delta\phi(|y|)a(x, y, 0, t)^T, \quad |v_s| \leq \tilde{u} \quad (4.21)$$

Demostración:

Haciendo cuentas:

$$\begin{aligned} a(x, y, v_s, t)v_s &\leq a(x, y, 0, t)v_s + \frac{|a(x, y, v, t) - a(x, y, 0, t)|}{|v|}|v|^2 \\ &\leq a(x, y, 0, t)v_s + \Omega(|y|)|v_s|^2 \leq -\delta\phi(|y|)|a(x, y, 0, t)|^2 \\ &\leq -\delta\phi(|y|)|a(x, y, 0, t)|^2 \leq -\delta\phi(|y|)|a(x, y, 0, t)|^2 \\ &\quad + \delta^2\phi(|y|)|a(x, y, 0, t)|^2 \text{Sup}_{0 \leq s \leq 1} \{\Phi(s)\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

El resultado se llega con:

$$0 < \delta \leq \frac{\min\{1, \tilde{u}\}}{2 \text{Sup}_{0 \leq s \leq 1} \{\Phi(s)\}} \quad (4.23)$$