

Monografía final -Control no Lineal

Juan Pablo de Souza, Matilde Sosa

Julio 2020

Índice

1. Introducción	3
2. Modelado de la planta a controlar	3
3. Algoritmos de control	5
3.1. Robust Adaptive Backstepping	5
3.2. Ecuación de Riccati dependiente del estado para tiempo discreto	8
4. Observador de estados	9
4.1. Sliding Mode	9
4.2. Filtro de Kalman	10
4.2.1. Filtro de Kalman Extendido (EKF)	12
5. Simulaciones y Análisis de resultados	13
5.1. Controlador basado en adaptive Backstepping	13
5.2. Controlador basado en la ecuación de Riccati	17
5.3. Observador basado en sliding	21
5.4. Filtro Kalman	26
6. Conclusiones	31
Bibliografía	32

1. Introducción

El péndulo invertido sobre un carro ha sido un clásico e interesante problema de control para ingenieros de sistemas de control desde la década de 1950. Consiste en mantener un péndulo verticalmente, en su posición naturalmente inestable, aplicando, en cada instante, una fuerza horizontal apropiada a un carro deslizante sobre el que se encuentra montado el eje del péndulo. Se han desarrollado numerosas técnicas de control para la estabilización del sistema. Se extiende desde las más simples como el proporcional-integrador-derivador (PID) hasta las técnicas más modernas del control no lineal.

La aplicación del control adaptivo para la estabilización de un péndulo es una propuesta bastante interesante cuando el conocimiento de los parámetros del sistema es incompleto o se dispone de datos aproximados del sistema. En este trabajo, hemos propuesto un esquema de control no lineal adaptivo y robusto, a partir de la técnica de Backstepping, para estabilizar el sistema sin ningún conocimiento previo de los parámetros del modelo.

Por otro lado, para alcanzar el objetivo de control a partir de otra técnica, se utilizará el método de control lineal conocido como la ecuación de Riccati dependiente del estado para tiempo discreto.

En ambos casos el objetivo será controlar la posición angular del péndulo θ referido con la vertical.

Muchas veces las plantas a controlar no tienen accesibles los estados, de manera que se puede dificultar su obtención. Una alternativa para estos casos es obtener una estimación de los estados no medibles a través de un observador de estados. Un observador de estados es un sistema dinámico cuyos estados convergen a los del sistema observado. En esta monografía se planteará la realización de un observador basado en Sliding y un observador basado en el filtro de Kalman. Vale aclarar que como el modelo de la planta no es lineal, se utilizará el filtro de Kalman extendido (EKF) del cual se profundizará en la siguiente sección.

2. Modelado de la planta a controlar

La planta a controlar, como se puede observar en la figura 1, consiste en un péndulo invertido de masa m montado sobre un carro de masa M que desliza sobre un riel horizontal y sobre el que un motor le aplica una fuerza f . El péndulo tiene un momento de inercia I respecto a un eje perpendicular al plano de la figura que pasa por su centro de masa. El centro de masa se encuentra a una distancia l de la articulación cilíndrica que lo vincula con el carro. El péndulo y el carro solo pueden moverse en el plano de la figura. Con las variables θ y x se describen respectivamente el apartamiento angular del péndulo con respecto a la dirección vertical y el apartamiento lineal horizontal del carro con respecto a un punto de referencia fijo. Por último, g refiere a la aceleración gravitatoria.

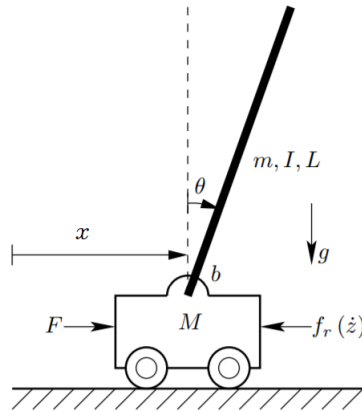


Figura 1: Representación esquemática del modelo

Para un modelo más preciso se podría incluir la fuerza de rozamiento que actúa sobre el carro, de la forma

$$f_r(\dot{x}) = \left(\mu_k + (\mu_s - \mu_k) e^{(-\frac{|\dot{x}|}{v_s})^\delta} \right) \tanh(\sigma \dot{x}) + v \dot{x} \quad (1)$$

donde la fuerza sólo depende de la velocidad \dot{x} del carro y que combina rozamiento estático, rozamiento dinámico y rozamiento viscoso. Mientras que, para el rozamiento que actúa en la articulación cilíndrica, se podría asumir un modelo viscoso sencillo, donde el torque sea proporcional a $\dot{\theta}$ [1].

Sin embargo, en este modelado se harán ciertas simplificaciones de la realidad, en un compromiso entre realismo y tratabilidad matemática. Despreciaremos entonces, todas las fricciones, tanto en el movimiento horizontal del carro, como en la articulación cilíndrica del péndulo [2].

Utilizando la dinámica Lagrangiana, tenemos que la energía cinética total del sistema es

$$T^* = K_M + T_m^* = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(x^2 - 2xl \cos(\theta) + l^2\theta^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (2)$$

Dado que el carro solo se mueve en el eje horizontal, la energía potencial del sistema está completamente determinada por el ángulo del péndulo medido desde la posición vertical:

$$V = -mgl \cos(\theta) \quad (3)$$

De esta forma podemos calcular el Lagrangiano a partir de la energía cinética y la energía potencial, como la siguiente función

$$L = T^* - V \quad (4)$$

Si sustituimos T^* y V de las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (4) llegamos a

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(x^2 - 2xl \cos(\theta) + l^2\theta^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgl \cos(\theta) \quad (5)$$

Ahora, para poder determinar las dinámicas lagrangianas del sistema, tenemos que determinar las siguientes derivadas parciales de L , una derivada respecto a x y otra derivada respecto θ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F_x \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (7)$$

Dado nuestro sistema, la ecuación (6) queda de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt}(M\dot{x} + m\dot{x} - ml \cos(\theta)\dot{\theta}) - 0 = f(x) - c\dot{x}$$

Ésta puede reescribirse como

$$(M + m)\ddot{x} + ml \sin(\theta)\dot{\theta}^2 - ml \cos(\theta)\ddot{\theta} = f(x) - c\dot{x} \quad (8)$$

De la misma forma, la ecuación (7) queda

$$\frac{d}{dt}(-ml\dot{x} \cos(\theta) + ml^2\dot{\theta} + I\dot{\theta}) = (ml\dot{x} \sin(\theta)\dot{\theta} - mgl \sin(\theta)) = -b\dot{\theta}$$

La ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente forma

$$(ml^2 + I)\ddot{\theta} - ml\ddot{x} \cos(\theta) = mgl \sin(\theta) - b\dot{\theta} \quad (9)$$

Simplificando y reorganizando las ecuaciones (8) y (9), se llega a las siguientes ecuaciones de movimiento para el sistema del péndulo invertido

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + c\dot{x} - ml \cos(\theta)\ddot{\theta} + ml \sin(\theta)\dot{\theta}^2 = f(x) \\ (I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = ml\ddot{x} \cos(\theta) \end{cases} \quad (10)$$

En la tabla 1 se puede ver los valores reales que usaremos para el sistema de la ecuación sistema.

M	1	kg
m	0.1	kg
l	0.5	m
g	9.81	m/s^2
I	0.025/3	$kg \cdot m^2$

Cuadro 1: Valores de los parámetros para el sistema de péndulo invertido

3. Algoritmos de control

Como se mencionó en la anterior sección, el objetivo del diseño del controlador es estabilizar el péndulo en su posición de equilibrio vertical ($\theta = 0$), la cual es inestable. En esta sección encontraremos la fuerza f que se le tiene que aplicar al sistema para lograr el objetivo. Trabajaremos solamente en la estabilización de los estados θ y $\dot{\theta}$, sin prestarle atención a lo que ocurre con x y \dot{x} .

3.1. Robust Adaptive Backstepping

Backstepping es un procedimiento recursivo que combina la elección de una función de Lyapunov con el diseño de un controlador de realimentación de estados. Descompone el problema original en una secuencia de problemas de diseño para sistemas de orden reducido.

El término *adaptativo* hace referencia a que el comportamiento cambia conforme a nuevas circunstancias. Un controlador adaptativo es tal que puede modificar su comportamiento en respuesta a cambios en la dinámica del sistema y a las perturbaciones.

Por otro lado, la teoría de control robusto ofrece un conjunto de herramientas desarrolladas para el análisis de sistemas que tienen en cuenta las distintas perturbaciones a las que puede estar sometido el sistema. El objetivo es obtener una ley de control que mantenga la respuesta del sistema y la señal de error dentro de ciertos límites a pesar del efecto de las incertidumbres.

En la primera parte del diseño del controlador encontraremos la acción de control f mediante Backstepping al considerar Lyapunov como criterio de estabilidad. Luego, vamos a considerar que los parámetros del modelado del sistema, como lo son las masas de los elementos, los momentos de inercia, etc., no son totalmente conocidos, lo que puede resultar en errores en el control realizado. Por lo tanto, con el empleo de técnicas de control adaptativo estos errores van a ser minimizados.

A partir del modelo de la ecuación (10) (siempre y cuando asumamos que el parámetro c , relacionado a la fricción del carro, sea cero) podemos encontrar una relación entre el ángulo θ y la fuerza f aplicada en el carro, de la siguiente forma

$$\psi_1 \sec(\theta)\ddot{\theta} + \psi_2 \tan(\theta) + \psi_3(\ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta)) = f \quad (11)$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (M + m) \left(\frac{I + ml^2}{ml} \right) \\ \psi_2 &= (M + m)g \\ \psi_3 &= ml \end{aligned} \quad (12)$$

son funciones de los parámetros del sistema [2].

De esta forma, el modelo en variables de estado puede ser escrita de la siguiente forma

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{f}{g(\theta)} - h(\theta, \dot{\theta}) \end{cases} \quad (13)$$

donde

$$\begin{aligned} g(\theta) &= -\psi_1 \sec(\theta) + \psi_3 \cos(\theta), \\ k(\theta, \dot{\theta}) &= \psi_2 \tan(\theta) - \psi_3 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \end{aligned}$$

$$h = \frac{k(\theta, \dot{\theta})}{g(\theta)}$$

Definimos ahora el siguiente error

$$e_1 = \theta_{ref} - \theta$$

donde θ_{ref} es el ángulo de referencia, que para el desarrollo de las cuentas, lo supondremos una función. Sin embargo, el objetivo de control es estabilizar el péndulo en $\theta = 0$ y en ese caso tendremos $\theta_{ref} = 0$.

Entonces, podemos considerar el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{\theta}_{ref} - \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{f}{g(\theta)} - h(\theta, \dot{\theta}) \end{cases} \quad (14)$$

Queremos encontrar un control por realimentación de estados que estabilice el origen $e_1 = 0, \dot{\theta} = 0$.

Supongamos que sabemos que la componente de la primera ecuación del sistema (14) puede estabilizarse con un control suave $\dot{\theta} = \phi(e_1)$, con $\phi(0) = 0$, entonces el origen de $\dot{e}_1 = \dot{\theta}_{ref} - \dot{\theta}$ es asintóticamente estable. Más aún, supongamos que se conoce una función de Lyapunov $V_1(e_1) = \frac{1}{2}e_1^2$, la cual es definida positiva, donde la derivada en el tiempo de primer orden de V_1 es

$$\dot{V}_1(e_1) = e_1 \dot{e}_1 = e_1(\dot{\theta}_{ref} - \dot{\theta}) \quad (15)$$

Entonces, el control necesario ϕ es

$$\phi(e_1) = c_1 e_1 + \dot{\theta}_{ref}$$

ya que, si lo sustituimos en $\dot{\theta}$ de la ecuación (15), tenemos que $\dot{V}_1(e_1) = -c_1 e_1^2$ (donde c_1 es una constante de diseño positiva).

Sumando y restando $\phi(e_1)$ al lado derecho de la primera ecuación del sistema (14), obtenemos la representación equivalente

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = [\theta_{ref} - \phi(e_1)] + [\phi(e_1) - \dot{\theta}] \\ \ddot{\theta} = \frac{f}{g(\theta)} - h(\theta, \dot{\theta}) \end{cases} \quad (16)$$

Luego, aplicamos el siguiente cambio de variables

$$e_2 = \phi(e_1) - \dot{\theta}$$

Podemos ver que su dinámica tiene la siguiente forma

$$\dot{e}_2 = \dot{\phi}(e_1) - \ddot{\theta} = (c_1 \dot{e}_1 + \ddot{\theta}_{ref}) - \frac{f}{g} + h$$

Entonces, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = [\theta_{ref} - \phi(e_1)] + e_2 \\ \dot{e}_2 = (c_1 \dot{e}_1 + \ddot{\theta}_{ref}) - \frac{f}{g} + h \end{cases} \quad (17)$$

Ahora, definimos la siguiente candidata a función de Lyapunov $V_a(e_1, e_2)$ de la siguiente forma

$$V_a(e_1, e_2) = V_1(e_1) + \frac{1}{2}e_2^2 = \frac{e_1^2 + e_2^2}{2}$$

derivando

$$\begin{aligned} \dot{V}_a(e_1, e_2) &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 \\ &= -c_1 e_1^2 + e_1 e_2 + e_2((c_1 \dot{e}_1 + \ddot{\theta}_{ref}) - \frac{f}{g} + h) \end{aligned} \quad (18)$$

Por lo cual, eligiendo f de la siguiente forma

$$f = g(e_1(1 - c_1^2) + e_2(c_1 + c_2) + \ddot{\theta}_{ref} + h) \quad (19)$$

obtenemos

$$\dot{V}_a = -c_1 e_1^2 - c_2 e_2^2$$

que muestra que el origen $e_1 = 0, e_2 = 0$ es asintóticamente estable. Además, como $\phi(0) = 0$, concluimos que el origen $e_1 = 0, \hat{\theta} = 0$ es asintóticamente estable [3].

Sin embargo, parte del diseño se basa en no conocer exactamente los parámetros del sistema y por ende las funciones g y h . Entonces, podemos definir los siguientes parámetros de error

$$\begin{cases} \bar{g} = g - \hat{g} \\ \bar{h} = h - \hat{h} \end{cases}$$

donde las funciones \hat{g} y \hat{h} son las funciones estimadas de g y h respectivamente.

A continuación, vamos a definir nuevamente la candidata a función de Lyapunov, teniendo en cuenta los nuevos parámetros de error, de la siguiente forma,

$$V_2(e_1, e_2) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\bar{g}^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\bar{h}^2$$

derivando con respecto al tiempo obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(e_1, e_2) &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + \frac{\bar{g}}{g\gamma_1} \left(-\frac{d\hat{g}}{dt} \right) + \frac{\bar{h}}{\gamma_2} \left(-\frac{d\hat{h}}{dt} \right) \\ &= -c_1 e_1^2 - c_2 e_2^2 + \frac{\bar{g}}{g} \left(e_2((1 - c_1^2)e_1 + (c_1 + c_2)e_2 + \ddot{\theta}_{ref} + \hat{h}) - \frac{1}{\gamma_1} \frac{d\hat{g}}{dt} \right) + \bar{h} \left(e_2 - \frac{1}{\gamma_2} \frac{d\hat{h}}{dt} \right) \end{aligned}$$

A partir de la ecuación anterior y suponiendo que en la ecuación (19) utilizamos los valores estimados de g y h , se puede construir la siguiente ley de actualizaciones de parámetros para parámetros \hat{g} y \hat{h}

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{g}}{dt} &= \gamma_1 e_2((1 - c_1^2)e_1 + (c_1 + c_2)e_2 + \ddot{\theta}_{ref} + \hat{h}) \\ \frac{d\hat{h}}{dt} &= \gamma_2 e_2 \end{aligned} \quad (20)$$

Las leyes de actualización (20) hacen que la derivada de la función de Lyapunov V_2 sea definida negativa, y siga quedando de la siguiente forma

$$\dot{V}_2 = -c_1 e_1^2 - c_2 e_2^2$$

Ahora, es evidente a partir de la ecuación anterior que la dinámica de error del sistema es asintóticamente estable. Por lo tanto, la ley de control del adaptive backstepping, dada por la siguiente ecuación

$$f = \hat{g}(e_1(1 - c_1^2) + e_2(c_1 + c_2) + \ddot{\theta}_{ref} + \hat{h}) \quad (21)$$

estabiliza el sistema.

Durante el diseño de la ley de control de adaptive backstepping, asumimos que el modelo de la planta está libre de rozamiento. Pero en los sistemas reales, este supuesto puede no ser válido. Cuando el conocimiento de los parámetros del péndulo invertido en un sistema de carro es incompleto o se dispone de datos aproximados del sistema, los errores de aproximación se introducen en la retroalimentación, ésta hace que el sistema sea difícil de estabilizar en el equilibrio estable para mucho tiempo. Siguiendo con el artículo de referencia [2], se ha propuesto la introducción de una función continua en la ley de adaptación de parámetros que tiene como objetivo mitigar este problema. La ley de adaptación modificada se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{g}} &= \gamma_1 e_2((1 - c_1^2)e_1 + (c_1 + c_2)e_2 + \ddot{\theta}_{ref} + \hat{h}) - \gamma_1 \sigma_{gs} \hat{g} \\ \dot{\hat{h}} &= \gamma_2 e_2 - \gamma_2 \sigma_{sh} \hat{h} \end{aligned} \quad (22)$$

Donde σ_{gs} y σ_{sh} se denominan de la siguiente forma

$$\sigma_{gs} = \begin{cases} 0 & \text{si } |\hat{g}| < g_0 \\ \sigma_{g0} \left(\frac{|\hat{g}| - g_0}{|\hat{g}|} \right) & \text{si } g_0 \leq |\hat{g}| \leq 2g_0 \\ \sigma_{g0} & \text{si } |\hat{g}| \geq 2g_0 \end{cases} \quad (23)$$

$$\sigma_{hs} = \begin{cases} 0 & \text{si } |\hat{h}| < h_0 \\ \sigma_{h0} \left(\frac{|\hat{h}| - h_0}{|\hat{h}|} \right) & \text{si } h_0 \leq |\hat{h}| \leq 2h_0 \\ \sigma_{h0} & \text{si } |\hat{h}| \geq 2h_0 \end{cases} \quad (24)$$

3.2. Ecuación de Riccati dependiente del estado para tiempo discreto

En esta sección veremos cómo alcanzar el objetivo de control a partir del método de la ecuación de Riccati dependiente del estado para tiempo discreto (discrete-time SDRE: State Dependent Riccati Equation) [1].

Primero que nada, hay que expresar la dinámica del modelo vista en la sección 2 en la forma pseudo lineal:

$$\frac{dz}{dt} = f(z, u) = A(z)z + B(z)u \quad (25)$$

en la que z es la variable de estados, u la entrada y los coeficientes A y B dependen de los estados.

A partir de la ecuación 11, tomamos la variable de estados $z = (\theta, \dot{\theta})$ y la entrada como f , entonces $A(z) = A(\theta, \dot{\theta})$ y $B(z) = B(\theta, \dot{\theta})$ toman la siguiente forma:

$$A(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(\psi_3 \dot{\theta}^2 - \frac{\psi_2}{\cos \theta} \right) \frac{\text{sinc} \theta}{\psi_3 \cos \theta + \psi_1 \sin \theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$B(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_1 \sec \theta + \psi_3 \cos \theta \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\text{donde } \text{sinc}(\theta) = \begin{cases} \frac{\sin \theta}{\theta} & \text{si } \theta \neq 0 \\ 1 & \text{si } \theta = 0 \end{cases}$$

A continuación, se discretiza (25) como si se tratara de un modelo lineal, en el que A y B fueran constantes. De esta forma, tenemos que

$$z_k = A_d(z_{k-1})z_{k-1} + B_d(z_{k-1})f_{k-1} \quad (28)$$

donde

$$A_d(z_{k-1}) = e^{A(z_{k-1})T} \quad (29)$$

$$B_d(z_{k-1}) = \left(\int_0^T e^{A(z_{k-1})\tau} d\tau \right) B(z_{k-1})$$

Cabe destacar que el período de muestreo T es suficientemente pequeño, como para que el vector de estados $z(t)$ no varíe significativamente en un intervalo de tiempo T .

El propósito de esta estrategia de control consiste en encontrar la señal de control óptima $u(t)$ tal que se minimice la siguiente función de costo

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (z_k^T \mathfrak{Q}(z_k) z_k + f_k^T \mathfrak{R}(z_k) f_k) \quad (30)$$

donde las matrices $\mathfrak{Q}(z_k)$ y $\mathfrak{R}(z_k)$ ponderan la incidencia en el costo del apartamiento del vector de estado z_k respecto al origen y el apartamiento de la acción de control f_k respecto al origen, respectivamente.

Esto se refleja en el compromiso del diseñador de elegir entre la performance del regulador y la magnitud de la acción de control. Es necesario que $\mathfrak{Q}(z_k)$ sea semi-definida positiva y $\mathfrak{R}(z_k)$ definida positiva para todo z . La acción de control que es solución a este problema es

$$f_k = -K(z_k)z_k \quad (31)$$

donde $K(z_k)$ es conocida como la ganancia del controlador. Para conocer esta ganancia es necesario tener acceso a todos los estados del sistema. Esta ganancia se puede escribir de la siguiente forma

$$K(z_k) = (\mathfrak{R}(z_k) + B_d^T P(z_k) B_d)^{-1} B_d^T P(z_k) A_d \quad (32)$$

siendo $P(z_k)$ la solución de la ecuación de Riccati en tiempo discreto en estado estacionario:

$$P(z_k) = \mathfrak{Q}(z_k) + A_d^T P(z_k) A_d - A_d^T P(z_k) B_d (\mathfrak{R}(z_k) + B_d^T P(z_k) B_d)^{-1} B_d^T P(z_k) A_d \quad (33)$$

Esta ecuación en general tiene muchas soluciones, normalmente se quiere obtener la única solución que estabiliza, si es que existe. Esta solución determina la solución del horizonte infinito invariante en el tiempo LQR. Este es un problema fundamental en la teoría de control.

Una solución a la ecuación de Riccati algebraica puede obtenerse por factorización de la matriz o iterando la ecuación de Riccati. También es posible encontrar la solución mediante la búsqueda de la eigendecomposition de un sistema mayor [4].

A continuación se puede observar los valores elegidos para las matrices \mathfrak{Q} y \mathfrak{R} :

$$\mathfrak{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{R} = [1]$$

4. Observador de estados

Para que los métodos de control analizados en la sección anterior sean implementables, es necesario que todas las componentes del vector de estados sean accesibles, ya que se trata de un control por realimentación de estados. Tal como se formuló el problema en la sección anterior, de las dos variables de estados que se están tratando, θ y $\dot{\theta}$, solo se puede medir (con cierta incertidumbre en la medida) la variable de la posición angular del péndulo θ . Entonces, para poder aplicar los métodos de control recién descritos al problema del péndulo invertido, es necesario diseñar un *observador de estados* que brinde la mejor estimación posible del vector de estados completo, a partir de medidas que se van adquiriendo en tiempo real y un modelo imperfecto de la planta a controlar.

4.1. Sliding Mode

En esta sección se utilizará superficies deslizantes para el diseño de un observador. La estructura del observador a diseñar tiene propiedades que lo destacan cuando se tiene incertidumbres en el modelado o ruido a la hora de medir.

Veamos primero que nada la idea básica de un modo deslizante, lo cual está fuertemente ligado al uso de leyes de control discontinuo (conmutación). Consideramos la dinámica del sistema, dada por la ecuación (13):

$$\ddot{\theta} = \frac{f}{g(\theta)} - h(\theta) \quad (34)$$

El objetivo es lograr que los estados, $\boldsymbol{\theta} = [\theta, \dot{\theta}]$, sigan una trayectoria específica $\boldsymbol{\theta}_d$, aún cuando se tiene un modelo impreciso (no se conoce exactamente los parámetros del sistema) o cuando existe alguna perturbación. Para poder lograr esto, debemos asumir que el error entre los estados y la trayectoria deseada, en tiempo cero, es cero:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}|_{t=0} = 0 \quad (35)$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_d$. Luego, definimos una superficie deslizante variante en el tiempo $S(t)$ en R^2 como $s(\boldsymbol{\theta}; t) = 0$ tal que

$$s(\boldsymbol{\theta}; t) := \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \quad \lambda > 0 \quad (36)$$

Dada la condición inicial asumida, el problema se resume en permanecer en la superficie $S(t)$ para todo tiempo positivo. Entonces, una condición suficiente de invarianza en la superficie deslizante $S(t)$ es elegir la acción de control f de forma tal que afuera de la superficie $S(t)$ se cumpla lo siguiente:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2(\boldsymbol{\theta}; t) \leq -\eta |s|, \quad \eta > 0 \quad (37)$$

Esta inecuación restringe las trayectorias a apuntar hacia la superficie $S(t)$ y se conoce como *Sliding condition*.

La idea detrás de las ecuaciones (36) y (37) es elegir una función s de acuerdo con (36), y luego de seleccionar la ley de control f de modo que s^2 sea una función de Lyapunov en el sistema en lazo cerrado.

El problema es que, en el diseño de controladores, el estado completo no está disponible para ser medido, y por lo tanto, la definición de la superficie deslizante no es adecuada. Sin embargo, sirve para desarrollar cierta intuición al respecto [5].

En este caso, tendremos acceso a una sola entrada del vector de estados. Es decir, vamos a suponer que podemos medir con un sensor la posición del péndulo respecto de la vertical (al cual venimos llamando θ y a partir de ahora llamaremos z_1), pero no tenemos conocimiento sobre la velocidad del mismo (que denominaremos ahora z_2).

Consideremos entonces la generación del comportamiento deslizante en un sistema de segundo orden a través de la conmutación entrada salida de acuerdo con el valor de una sola de las entradas del vector de estados:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -k_2 \operatorname{sgn}(z_1) \end{aligned} \quad (38)$$

donde k_2 es una constante positiva y sgn es la función signo. Este sistema no tiene un comportamiento deslizante, por lo cual, se adapta de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - k_1 \operatorname{sgn}(z_1) \\ \dot{z}_2 &= -k_2 \operatorname{sgn}(z_1) \end{aligned} \quad (39)$$

donde k_1 y k_2 son constantes positivas. Este último efecto genera un comportamiento deslizante en la región donde $|z_2| \leq k_1$, la cual llamaremos *sliding patch*. De esta manera, z_2 decrece exponencialmente a 0 una vez que llegó al sliding patch, con una constante de tiempo k_1/k_2 .

A partir de la ecuación de la dinámica del sistema (34), por simplicidad vamos a definir $w(\boldsymbol{\theta}) := \frac{f}{g(\boldsymbol{\theta})} - h(\boldsymbol{\theta})$, con lo cual, ahora tenemos que

$$\ddot{\theta} = w \quad (40)$$

donde podemos ver que w es una función no lineal que depende de los estados y de los parámetros del sistema.

En esta parte, también se introduce la idea de que los parámetros del modelo no son conocidos completamente, por lo cual, trabajaremos con el valor estimado de w .

Entonces, las ecuaciones del observador por Sliding Mode [6] son

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_1 &= -\alpha_1 \tilde{z}_1 + \hat{z}_2 - k_1 \operatorname{sgn}(\tilde{z}_1) \\ \dot{\hat{z}}_2 &= -\alpha_2 \tilde{z}_1 + \hat{w}(\cdot) - k_2 \operatorname{sgn}(\tilde{z}_1) \end{aligned} \quad (41)$$

donde $\tilde{z}_1 = \hat{z}_1 - z_1$ y $\hat{w}(\cdot)$ es el valor estimado de la función w . Los parámetros α_i , k_i son elegidos tal que

$$\begin{aligned} \hat{z}_2 &\leq k_1 + \alpha_1 \tilde{z}_1 & \text{si } z_1 > 0 \\ \hat{z}_2 &\geq -k_1 + \alpha_1 \tilde{z}_1 & \text{si } z_1 < 0 \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} k_2 &\geq |\Delta w| \\ \Delta w &= \hat{w} - w \end{aligned} \quad (43)$$

4.2. Filtro de Kalman

Un filtro de Kalman es un algoritmo usado para estimar las variables de un sistema basándose en medidas con ruido. Lo que hace este algoritmo es calcular las diferentes probabilidades del estado del sistema, superponiéndolas posteriormente con las diferentes mediciones teniendo en cuenta su componente de ruido añadido [7].

El filtro de Kalman se puede separar en dos pasos principalmente: La predicción donde, basándonos en el estado anterior del sistema y las ecuaciones que rigen su evolución, vamos a predecir el estado actual. La segunda parte es la corrección, con los datos de medición de los sensores, corregimos la primera predicción.

Suponiendo que nuestro sistema se puede escribir de la siguiente forma

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k)$$

y que las observaciones o mediciones del proceso se realizan según la siguiente ecuación

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)$$

Donde $\mathbf{x}(k)$ es el vector de estados, $\Phi(k)$ es la matriz que relaciona $\mathbf{x}(k)$ con $\mathbf{x}(k+1)$, \mathbf{B} es la matriz que relaciona $\mathbf{x}(k+1)$ con la entrada \mathbf{u} , \mathbf{u} es la entrada al sistema, $\mathbf{w}(k)$ es ruido blanco con covarianza conocida, $\mathbf{y}(k)$ es vector de observaciones o medidas, $\mathbf{C}(k)$ es una matriz que relaciona los estados y las observaciones y $\mathbf{v}(k)$ es ruido blanco con covarianza conocida.

Suponemos además las siguientes covarianzas entre ruidos de estado y de observación:

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}(i)^T] = \begin{cases} \mathbf{Q}(k) & i = k \\ \mathbf{0} & i \neq k \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}(i)^T] = \begin{cases} \mathbf{R}(k) & i = k \\ \mathbf{0} & i \neq k \end{cases}$$

$\mathbb{E}[\mathbf{v}(k)\mathbf{w}(i)^T] = \mathbf{0} \forall i, k$. Suponemos que tenemos un estimado del proceso en el tiempo k , basado en todo nuestro conocimiento hasta el tiempo $k-1$: $\hat{\mathbf{x}}(k | k-1) = \hat{\mathbf{x}}_k^-$. Suponemos que conocemos la matriz de covarianza del estimado:

$$\mathbf{e}_k^- = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbb{E}[\mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-T}]$$

Si comenzamos el problema sin mediciones, y si el proceso tiene media nula, en general tomamos el estimado inicial como 0 y como covarianza del error la de \mathbf{x} .

Consideramos que tenemos el estimado $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ y buscamos mejorarlo usando la información medida $\mathbf{y}(k)$ de la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)$$

El objetivo del filtro de Kalman es encontrar \mathbf{K}_k para que la actualización sea óptima en el sentido del MSE.

Una vez encontrada la forma de \mathbf{K}_k , necesitamos una forma de calcular $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ y \mathbf{P}_{k+1}^- de forma de tener condiciones iniciales para la próxima observación \mathbf{y}_{k+1} .

Utilizando la dinámica del sistema y por ser \mathbf{w}_k blanco (y por lo tanto de media nula):

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k$$

Para calcular la covarianza del error:

$$\mathbf{e}_{k+1}^- = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = (\Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k) - \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k$$

$$= \Phi_k \mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k$$

Luego,

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbb{E}[\mathbf{e}_{k+1}^- (\mathbf{e}_{k+1}^-)^T] = \mathbb{E}[(\Phi_k \mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k) (\Phi_k \mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k)^T]$$

$$= \Phi_k \mathbf{P}_k \Phi_k^T + \mathbf{Q}_k$$

De esta forma el algoritmo de este filtro a aplicar es el siguiente

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, y_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

$$\mathbf{x}_0^-, \mathbf{P}_0^-$$

Para $k = 0, 1, 2, \dots$, calcular:

- Ganancia de Kalman: $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$
- Actualización del estimador: $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)$
- Covarianza del estimador: $\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_k^-$
- Proyección a $k+1$: $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k$, $\mathbf{P}_{k+1}^- = \Phi_k \mathbf{P}_k \Phi_k^T + \mathbf{Q}_k$

4.2.1. Filtro de Kalman Extendido (EKF)

Consideramos ahora un modelo en el espacio de estados no lineal, de la forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}_{k+1}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_{k+1}) \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{n}_k) \end{cases}$$

El filtro de Kalman extendido se basa en una aproximación de primer orden del modelo, seguido del loop de Kalman con ecuaciones lineales.

La ecuación de estado se linealiza entorno a $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (\mathbf{x}_{k|k}, 0)$

La ecuación de medida se linealiza entorno a $(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = (\mathbf{x}_{k|k-1}, 0)$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}_{k+1}(\mathbf{x}_{k|k}, 0) + \mathbf{F}_{k+1}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k}) + \mathbf{G}_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_{k|k-1}, 0) + \mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k-1}) + \mathbf{U}_k\mathbf{n}_k \end{cases}$$

dónde

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{k+1} &= \frac{\partial \mathbf{f}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_{k|k}, 0), & \mathbf{G}_{k+1} &= \frac{\partial \mathbf{f}_{k+1}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_{k|k}, 0) \\ \mathbf{H}_k &= \frac{\partial \mathbf{h}_k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_{k|k-1}, 0), & \mathbf{U}_k &= \frac{\partial \mathbf{h}_k}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}_{k|k-1}, 0) \end{aligned}$$

Las ecuaciones para el EKF quedan entonces: Inicialización: $\mathbf{x}_0, \mathbf{P}_0$ Para $k = 0, 1, 2, \dots$, calcular:

- $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{f}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, 0)$
- $\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^T$
- $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{U}_k \mathbf{R}_k \mathbf{U}_k^T)^{-1}$
- $\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, 0))$
- $\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}$

5. Simulaciones y Análisis de resultados

5.1. Controlador basado en adaptive Backstepping

Para implementar el control diseñado en la sección 3.1 utilizamos los siguientes parámetros, que se pueden observar en el cuadro 2. Allí se encuentran los valores propuestos para los parámetros del modelo, los cuales se les da un valor arbitrario diferente a los valores presentados en el cuadro 1. A su vez, también se encuentran los valores de las constantes a utilizar para llevar a cabo la acción de control propuesta. Para el diseño de este controlador se utilizará la herramienta de Matlab llamada Simulink.

	Sistema	Controlador	Unidad
M	1	1.25	Kg
m	0.1	0.1	Kg
L	0.5	0.1	m
g	9.8	0.1	m/s^2
I	0.025/3	0.1	$kg \cdot m^2$
c_1	—	6	—
c_2	—	6.6	—
γ_1	—	9	—
γ_2	—	9	—
g_0	—	300	—
h_0	—	10	—
σ_{g0}	—	1	—
σ_{h0}	—	1	—

Cuadro 2: Valores de los parámetros para las simulaciones del Robust Adaptive Backstepping

En la figura 2 se puede observar el esquema de la realimentación de estados, donde está el bloque del péndulo, con su entrada f y su salida x (los estados θ y $\dot{\theta}$). Por otro lado, el otro bloque es la acción de control dada por la ecuación (21). También se puede observar que el bloque de control tiene en una de sus entradas una constante de referencia, la cual está seteada en 0 para estabilizar al péndulo en su posición de equilibrio inestable ($\theta = 0$). A su vez, en la figura 3 se encuentra detalladamente la implementación del bloque de control.

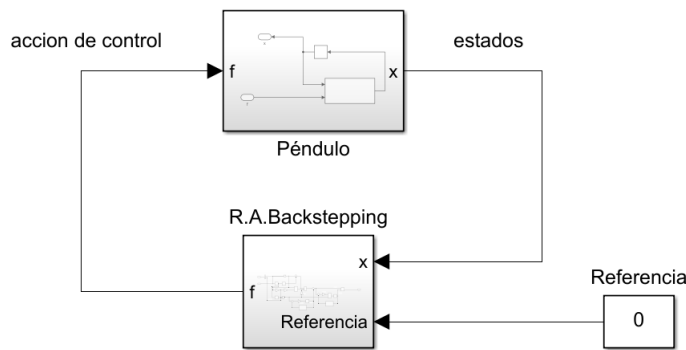


Figura 2: Esquema Realimentación de estados

En las figuras 4 y 5 se pueden observar dos simulaciones del sistema para diferentes condiciones iniciales, $[\theta \ \dot{\theta}] = [0.5 \ 0]$ y $[\theta \ \dot{\theta}] = [1 \ 0]$ respectivamente. Allí se puede ver la evolución de los estados a partir de las condiciones iniciales propuestas, la curva amarilla es la posición del péndulo respecto de la vertical θ , en azul se puede ver la velocidad del mismo $\dot{\theta}$ y en naranja la referencia. A su vez, la referencia vale 0, ya que queremos observar el comportamiento de los estados cuando se estabiliza al péndulo en su posición

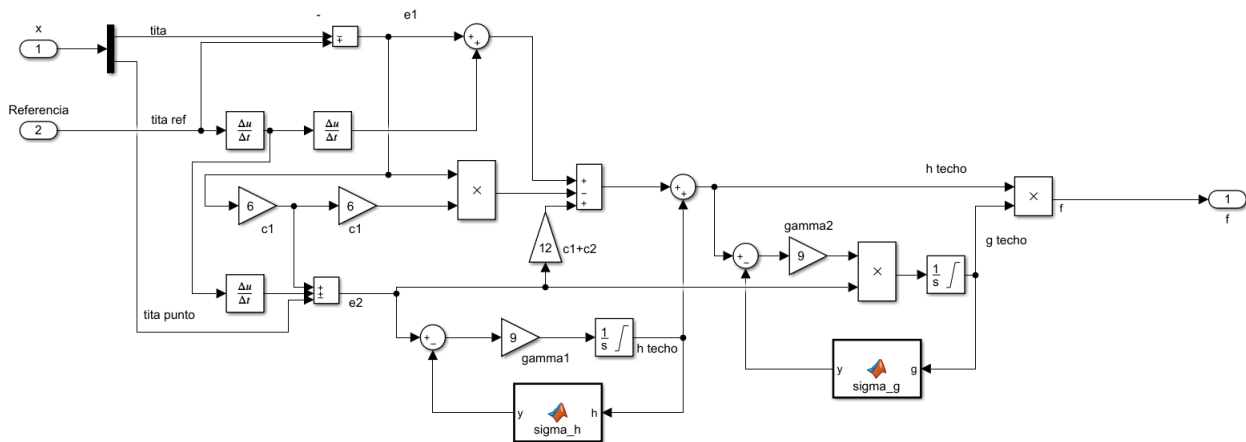


Figura 3: Esquema bloque de control

vertical de equilibrio inestable. Podemos apreciar que los estados tienden asintóticamente a cero, y por lo cual, concluir que el control se llevó a cabo con éxito.

Además, en la figura 4 podemos ver que el ángulo θ tiene un comportamiento oscilatorio, pero que rápidamente se estabiliza, ya que su tiempo de asentamiento es del entorno de 1.2 s. Podemos ver también en la figura 5 que, a medida que la condición inicial aumenta, la velocidad $\dot{\theta}$ máxima que toma el péndulo es mayor. Esto tiene sentido ya que necesita más impulso para llegar a la posición de equilibrio.

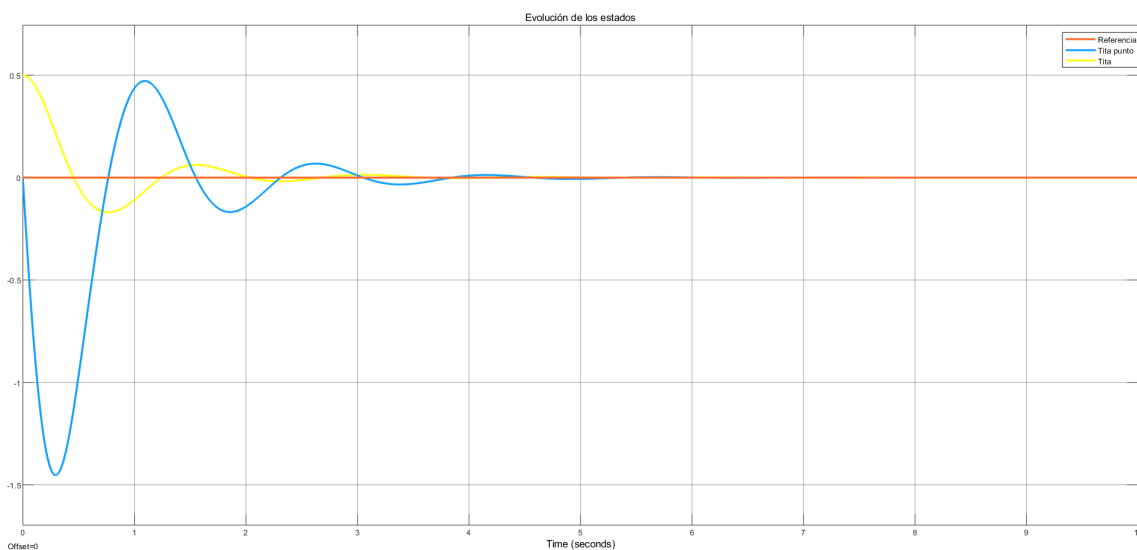


Figura 4: Evolución de los estados. Condiciones iniciales: $[\theta \ \dot{\theta}] = [0.5 \ 0]$. Referencia: $\theta_{ref} = 0$.

Luego, analizamos que sucede al cambiar la referencia. En las figuras 6 y 7 se puede apreciar la evolución de los estados cuando el valor de la referencia de la posición del péndulo es 0.3 radianes respecto la vertical. Podemos ver que se cumple con lo deseado. Por otra parte, también experimentamos qué ocurre cuando la señal de referencia es una senoide de amplitud 0.3 radianes. En la figura 8 se puede ver la evolución de los estados es ese caso.

Continuando con el análisis, vimos que ocurría cuando se pone el valor verdadero de la aceleración gravitatoria $g = 9.81m/s^2$ (parámetro que en realidad es conocido del sistema). En la figura 9 y 10 se pueden apreciar los resultados experimentales para las diferentes condiciones iniciales propuestas. Mínimamente el tiempo que demora en llegar a la posición de equilibrio es reducido introduciendo este conocimiento en el parámetro. Pudimos observar también que variando el resto de los parámetros no es notorio el cambio en la

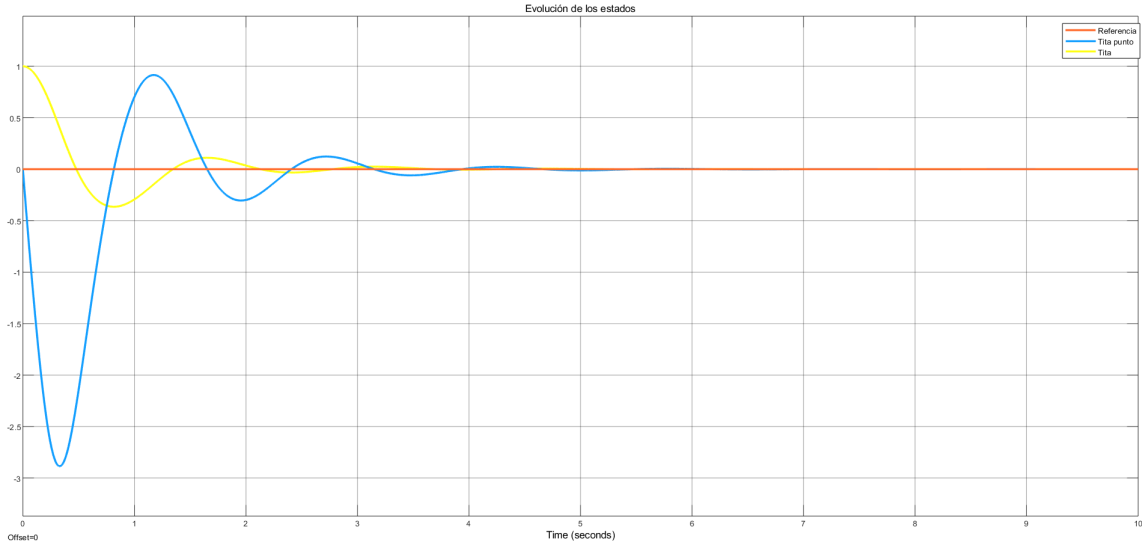


Figura 5: Evolución de los estados. Condiciones iniciales: $[\theta \ \dot{\theta}] = [1 \ 0]$. Referencia: $\theta_{ref} = 0$.

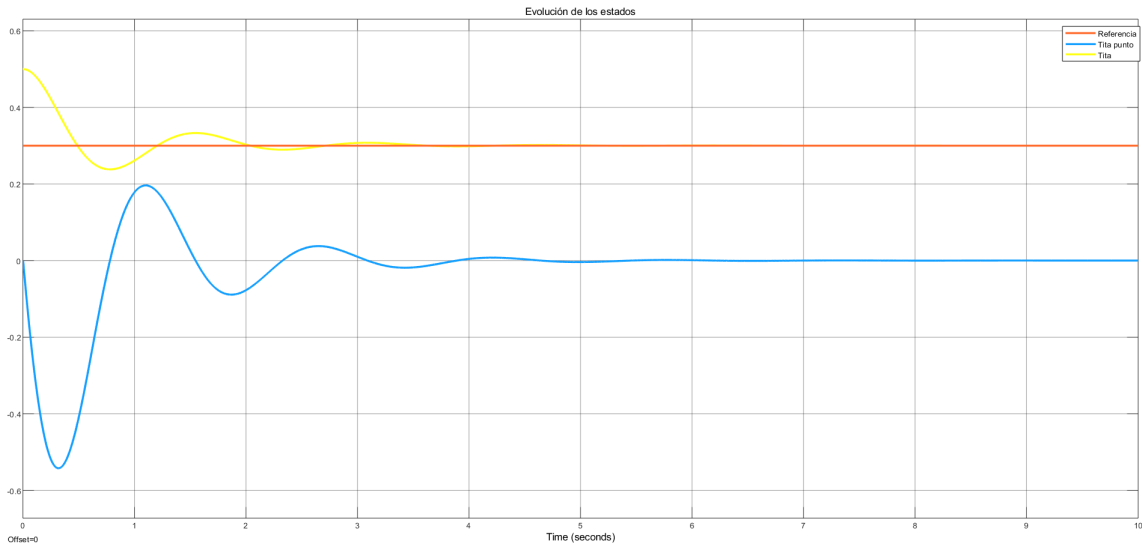


Figura 6: Evolución de los estados. Condiciones iniciales: $[\theta \ \dot{\theta}] = [0.5 \ 0]$. Referencia: $\theta_{ref} = 0.3$.

evolución de los estados a 0. Por lo cual, es bueno resaltar este comentario, ya que aún sin conocer exactamente los parámetros del modelo, éste se pudo estabilizar con éxito. Y más aún, aún sabiendo exactamente cuanto valen los parámetros, no es mucha la diferencia en el resultado.

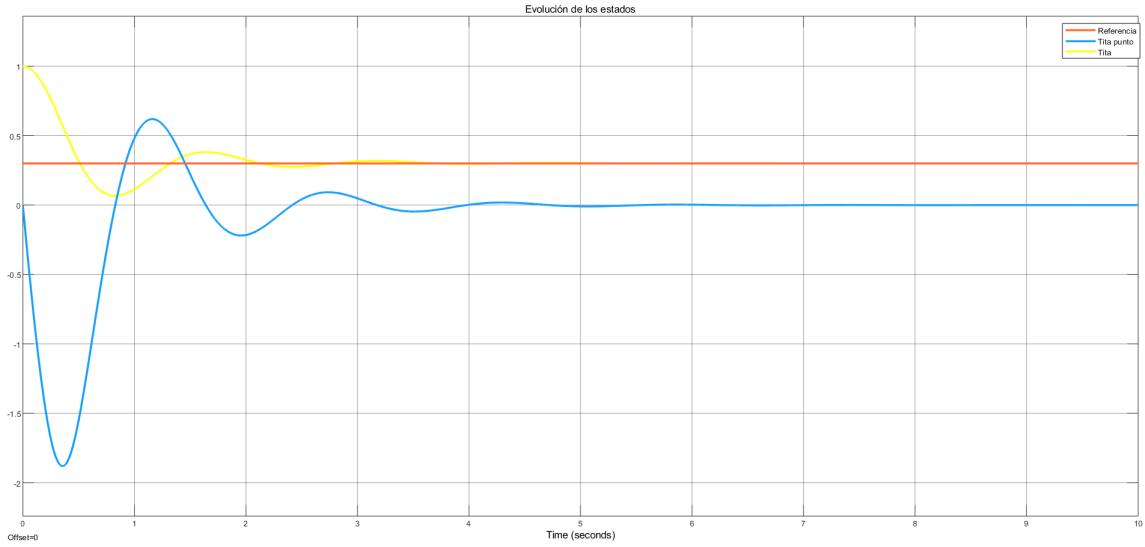


Figura 7: Evolución de los estados. Condiciones iniciales: $[\theta \ \dot{\theta}] = [1 \ 0]$. Referencia: $\theta_{ref} = 0.3$

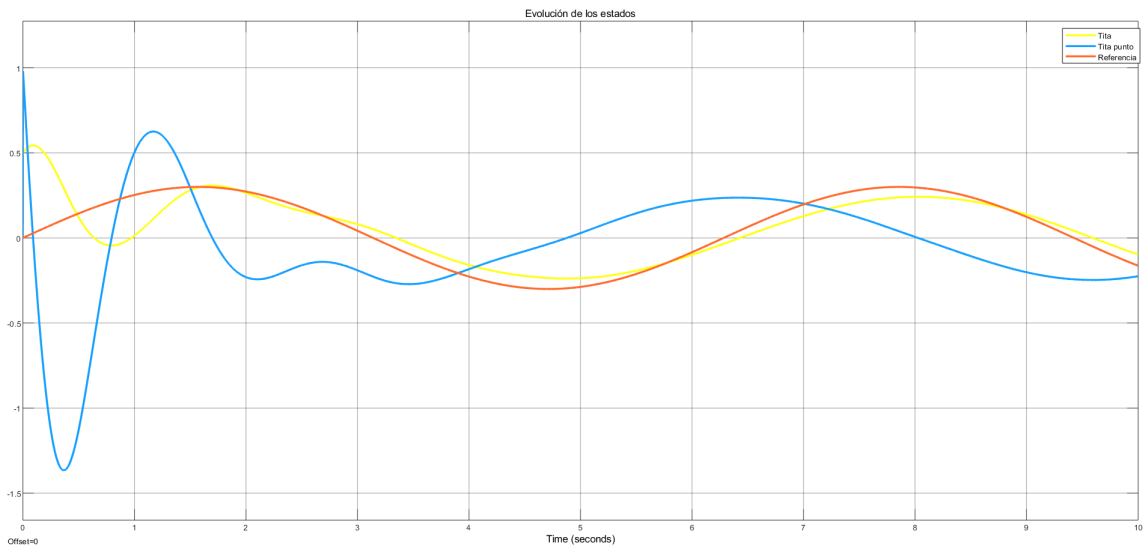


Figura 8: Evolución de los estados. Condiciones iniciales: $[\theta \ \dot{\theta}] = [0.5 \ 0]$. Referencia sinusoidal

Para concluir con el análisis de este controlador, en la figura 11 se puede apreciar el error cuadrático medio de la posición angular respecto de la vertical en relación con la referencia 0.

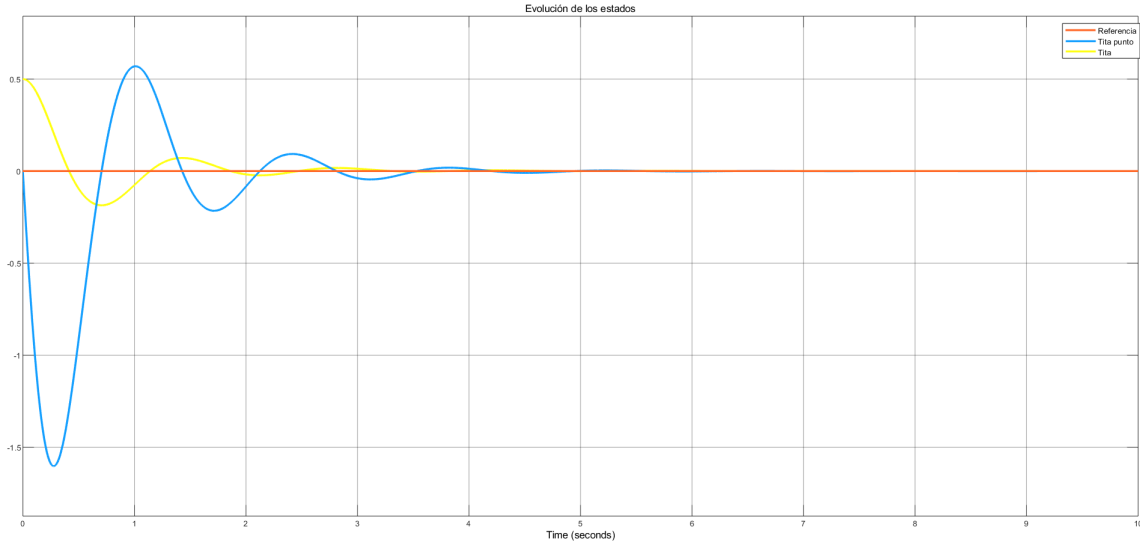


Figura 9: Evolución de los estados. Condiciones iniciales: $[\theta \ \dot{\theta}] = [0.5 \ 0]$. Variando parámetro g

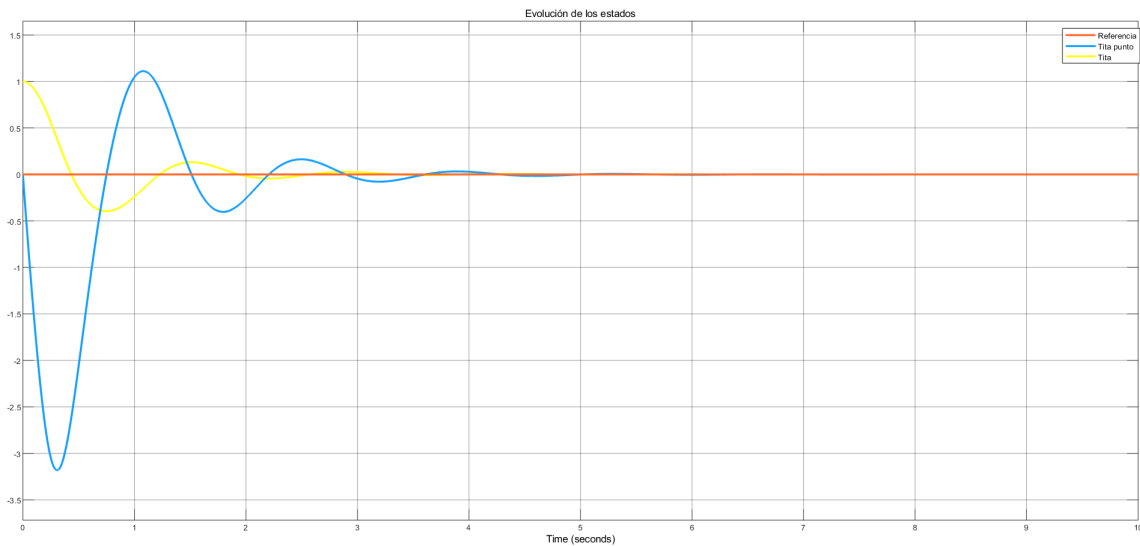


Figura 10: Evolución de los estados. Condiciones iniciales: $[\theta \ \dot{\theta}] = [1 \ 0]$. Variando parámetro g

5.2. Controlador basado en la ecuación de Riccati

Por otro lado, para implementar el control diseñado en la sección 3.2, no se pudo utilizar la herramienta de MATLAB, llamada Simulink, debido a que las funciones que se utilizan para el control no son compatibles en el Simulink. Para lograr el control usaremos los mismos valores para M, m, l y g que para el control anterior. También se utilizará la función de matlab lqr . A esta función se le ingresa las matrices A y B pseudolineales y las matrices \mathcal{Q} y \mathcal{R} y nos devuelve la matriz K mencionada en dicha sección. Para este caso, la matriz K tiene la siguiente forma

$$K = [0.9900 \quad 1.1893]$$

Para encontrar el vector controlado, además de la función lqr que nos devuelve el K , se utilizó la función $ode45$. Una vez que tenemos el K hallamos $\frac{dx}{dt}$ de la siguiente forma

$$\frac{dx}{dt} = (A - B * K) * x$$

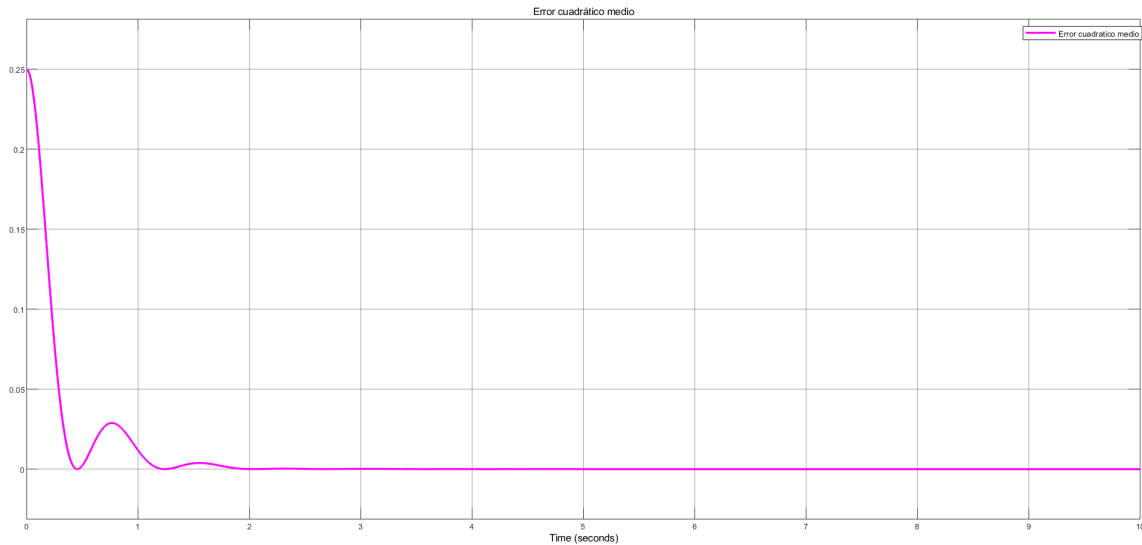


Figura 11: Error cuadrático medio. Condiciones iniciales: $[\theta \ \dot{\theta}] = [0.5 \ 0]$.

La función *ode45*, que resuelve ecuaciones diferenciales, se le pone en la entrada un vector de tiempo, $\frac{dx}{dt}$ y la condición inicial, y nos devuelve la terna $[t, x]$, donde en nuestro caso x es θ y $\dot{\theta}$. De esta forma llegamos al control deseado.

En la figura 12 se puede observar el control del sistema utilizando la técnica de Riccati, usando como condiciones iniciales $[\theta \ \dot{\theta}] = [0.5 \ 0]$, donde la curva azul es la posición del péndulo respecto de la vertical θ , en la curva roja se puede ver la velocidad del mismo $\dot{\theta}$ y en negra la referencia, esta, al igual que en el controlador anterior, será 0. En la figura 13 se puede ver el mismo control pero ahora con condiciones iniciales $[\theta \ \dot{\theta}] = [1 \ 0]$. También podemos observar que para estas condiciones iniciales la dinámica del control no tiene oscilaciones y tiene un tiempo de asentamiento de aproximadamente 3 segundos.

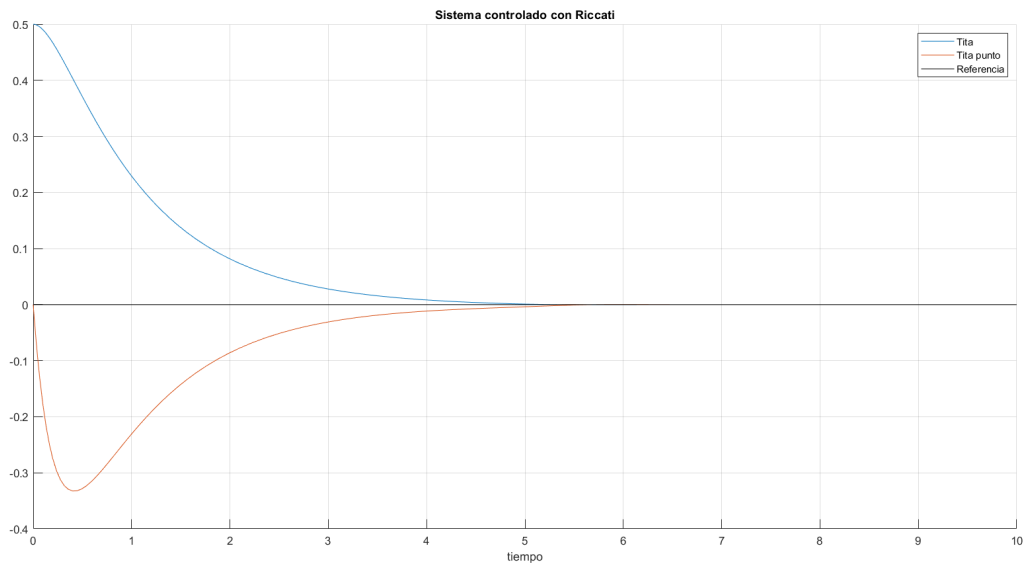


Figura 12: Evolución de los estados usando Riccati. Condiciones iniciales: $[\theta \ \dot{\theta}] = [0.5 \ 0]$

Podemos ver que a medida que la condición inicial de θ aumenta, la velocidad máxima que toma el péndulo es mayor, esto tiene sentido ya que tiene que ir con más impulso al equilibrio porque está más lejos de este.

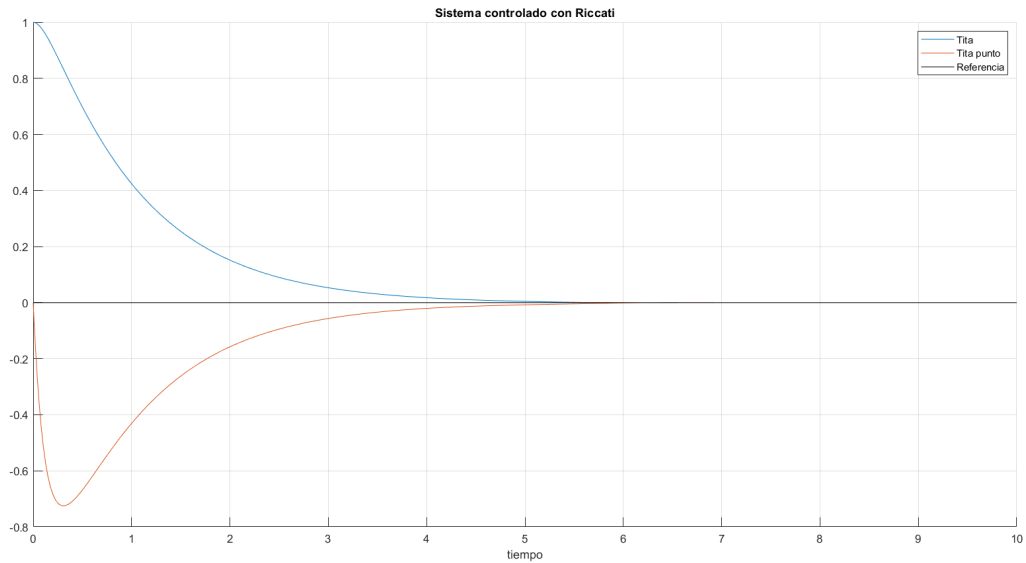


Figura 13: Evolución de los estados usando Riccati. Condiciones iniciales: $[\theta \ \dot{\theta}] = [1 \ 0]$

A su vez, si la condición inicial de $\dot{\theta}$ es diferente de cero y está en el entorno de -0.5, este control converge en menos tiempo. Sin embargo, si la velocidad está en el entorno de los -10, la convergencia sigue siendo buena, pero se puede apreciar que la posición tiene otro comportamiento en el transitorio significativamente diferente a los demás casos. Si la velocidad al principio es positiva, $\dot{\theta} = 1$, al comienzo el péndulo se aleja, pero luego se logra controlar. Podemos ver que el péndulo siempre llega a controlarse. Estos comportamientos se pueden ver en la figura 14

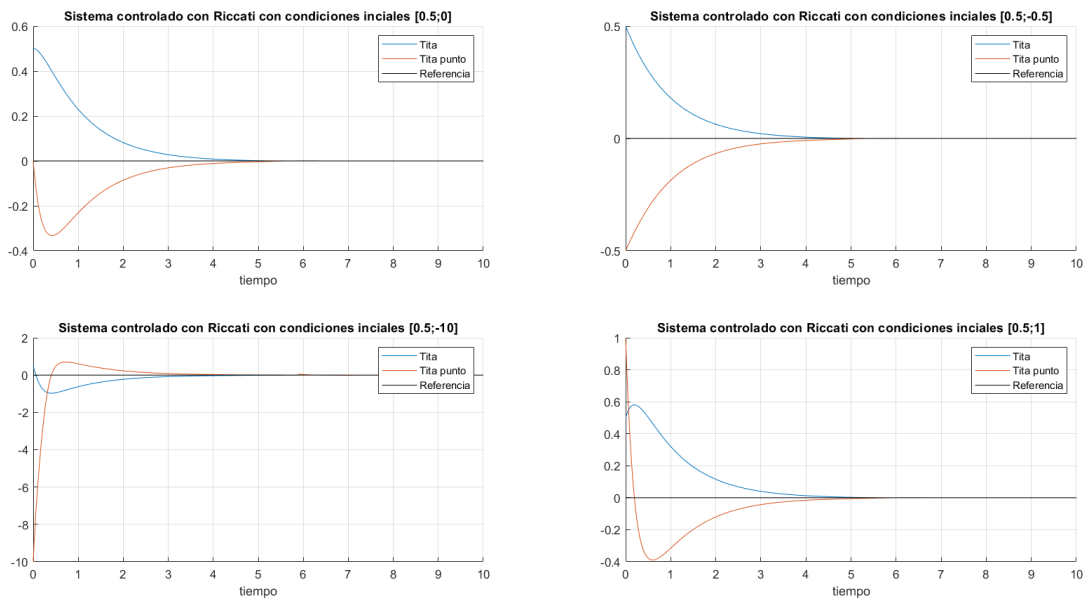


Figura 14: Evolución de los estados usando Riccati para diferentes condiciones iniciales

A su vez, si comparamos el error cuadrático medio de este controlador. Podemos ver en la figura 15 el error en función del tiempo.

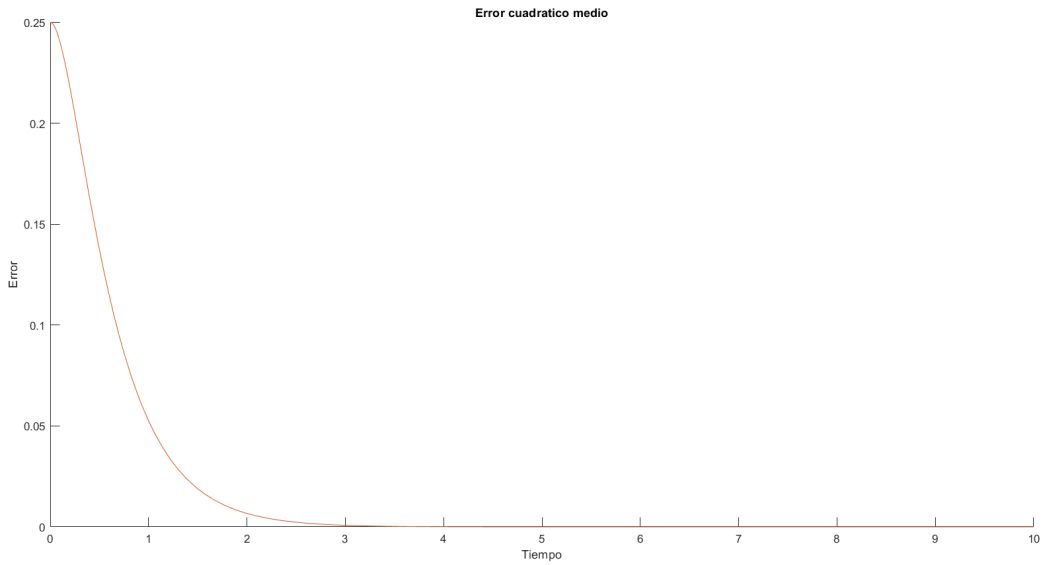


Figura 15: Error cuadrático medio con Riccati. Condiciones iniciales: $[\theta \ \dot{\theta}] = [0.5 \ 0]$

Por otro lado, si variamos los parámetros, por ejemplo, variamos g a su valor nominal $9.8m/s^2$, podemos ver en la figura 16 que el sistema se logra controlar, pero este tiene mayor cantidad de oscilaciones, en particular $\dot{\theta}$. Se puede apreciar, sin embargo, que el tiempo de asentamiento es relativamente menor en este caso, siendo este menor a 1 segundo. Al variar otros parámetros se pudo observar que el control no variaba considerablemente como en el ejemplo anterior.

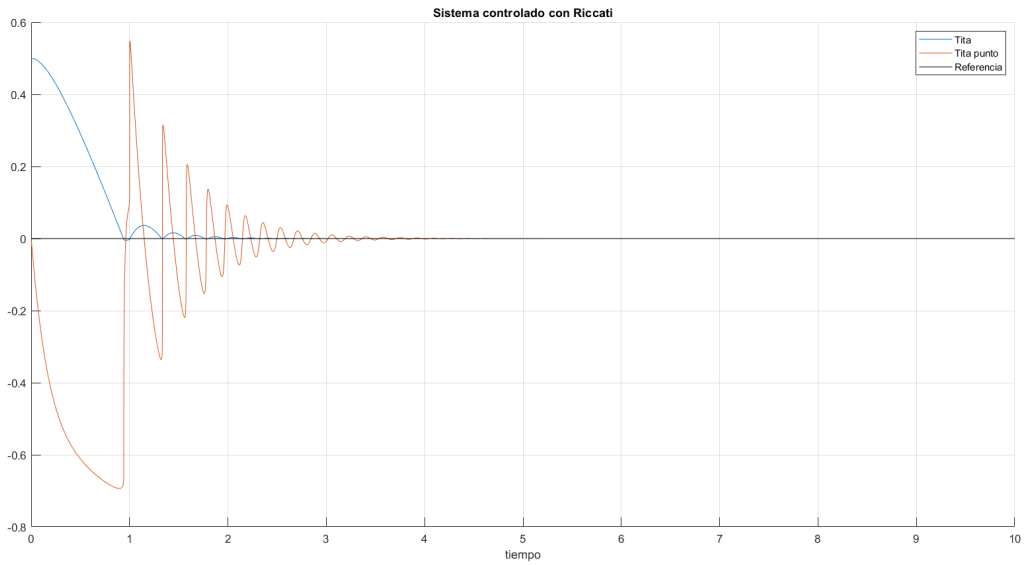


Figura 16: Control del sistema usando Riccati variando g a su valor nominal

5.3. Observador basado en sliding

Se puede observar en la figura 17 el esquema de la realimentación de estados donde tenemos el sistema del péndulo invertido con entrada f y salida x (los estados, θ y $\dot{\theta}$). Luego, el primer estado, θ , se conecta como entrada al observador, el cual es el que tendríamos realmente acceso en la vida real. Luego, la salida del observador, los estados estimados, son los que se conectan a la entrada del controlador. A su vez, en la figura 18 podemos observar el bloque del observador en detalle, que para su construcción nos basamos en la ecuación (41).

Tenemos el sistema del péndulo controlado a partir del Robust Adaptive Backstepping, donde podemos comparar los estados verdaderos del sistema con los estimados a partir del observador no lineal diseñado. En las figuras 19 y 20 se puede apreciar la evolución de los estados para las diferentes condiciones iniciales propuestas anteriormente, en amarillo se encuentra el primer estado y en azul el primer estado estimado. Luego, en rojo el segundo estado y en verde el segundo estado estimado y por último, en violeta la referencia. Se puede ver que la estimación de los estados es buena, ya que a partir de los 0.2 segundos la posición observada se iguala con la posición real. A su vez, si vemos la velocidad del péndulo, podemos ver que ésta observada es igual a la real en todo momento, aunque la velocidad observada presenta pequeñas oscilaciones en el tiempo (a modo de ruido) hasta que el péndulo se logra controlar de manera definitiva.

En las figuras 21 y 22 podemos observar el error cuadrático medio de θ para las condiciones iniciales antes mencionadas. En estas figuras podemos apreciar que el observador diseñado logra observar de buena forma a θ , ya que a los 0.1 segundos el error ya es 0. De la misma forma podemos ver que el error máximo que presenta es al inicio, ya que la condición inicial que se le da al observador es $[\theta \quad \dot{\theta}] = [0 \quad 0]$ y esta difiere con la condición inicial del sistema. Se le da esta condición inicial al observador para demostrar que este parte desde el reposo y de ahí comienza a seguirlo.

Por otro lado, en las figuras 23 y 24 podemos ver el error cuadrático medio de $\dot{\theta}$ para ambas condiciones iniciales utilizadas a lo largo del análisis. Debido a la construcción de este controlador, el interés nuestro es que $\dot{\theta}$ sea bien observado, ya que en la realidad no se tiene acceso a esta variable de estado. En estas figuras se puede observar que la mayor diferencia entre el estado observado y el estado real se da después del comienzo, esto es ya que ambos sistemas arrancan en reposo. Podemos ver también, que el observador logra seguir al estado real a partir de los 0.5 segundos, si bien se pueden apreciar perturbaciones (que fueron las antes mencionadas) podemos decir que el observador logra estimar de buena forma al estado desconocido del sistema $\dot{\theta}$.

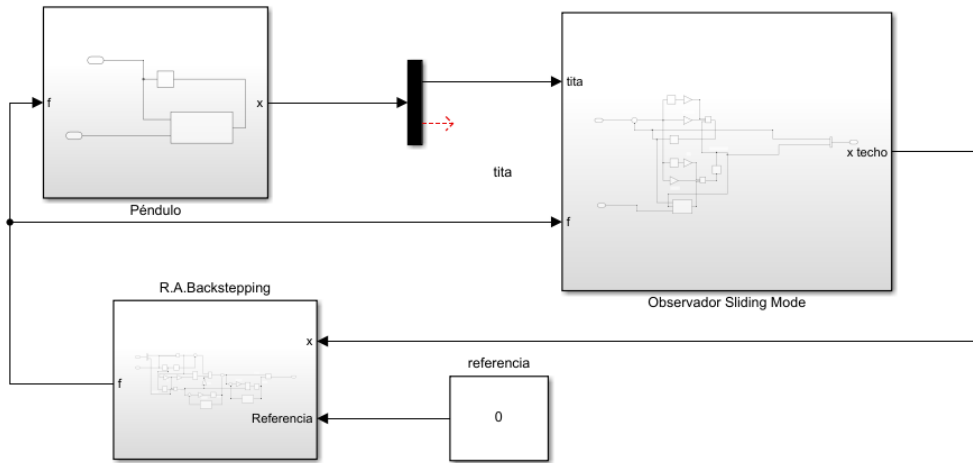


Figura 17: Esquema Realimentación de estados

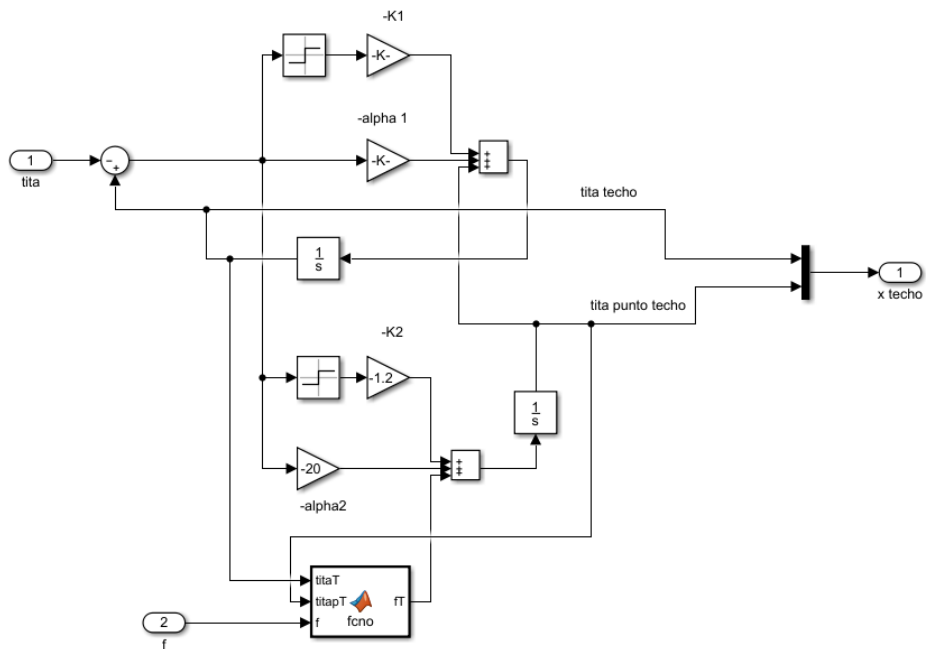


Figura 18: Esquema del bloque observador

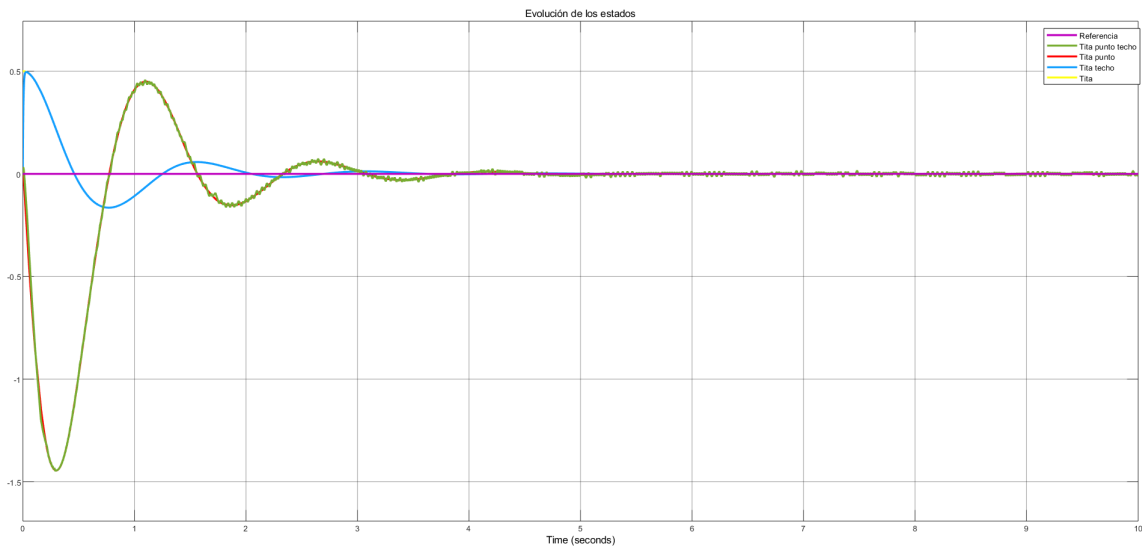


Figura 19: Evolución de los estados verdaderos y estimados. Condiciones iniciales: $[\theta \ \dot{\theta}] = [0.5 \ 0]$

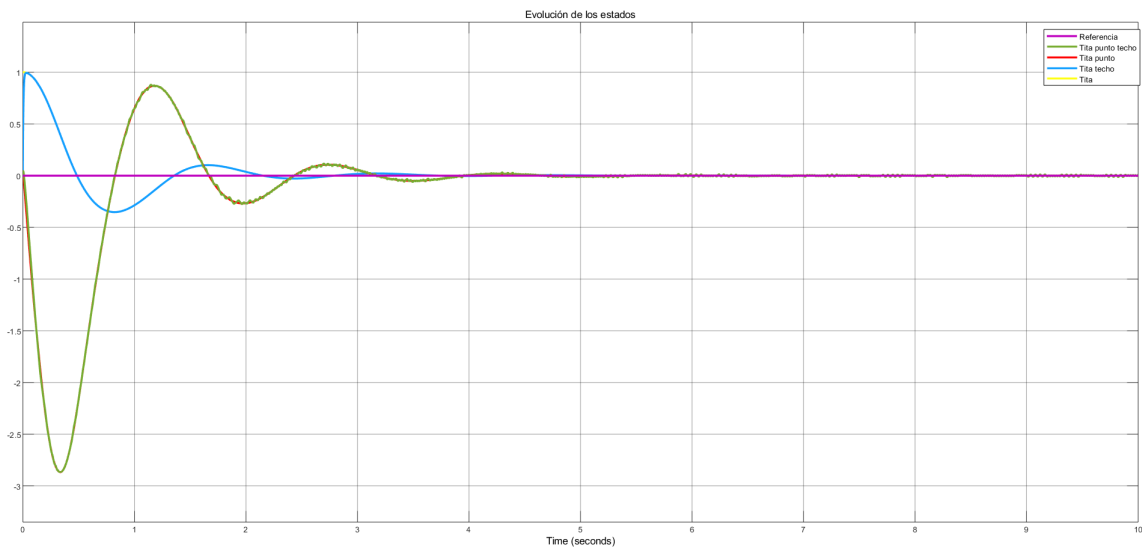


Figura 20: Evolución de los estados verdaderos y estimados. Condiciones iniciales: $[\theta \ \dot{\theta}] = [1 \ 0]$

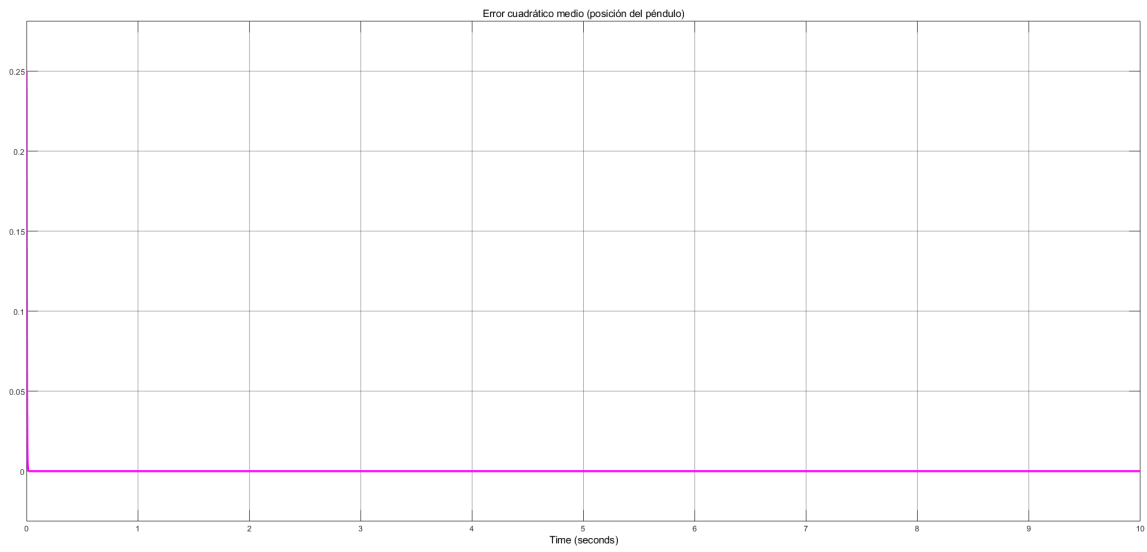


Figura 21: Error cuadrático medio de θ para la Condición inicial: $[\theta \ \dot{\theta}] = [0.5 \ 0]$

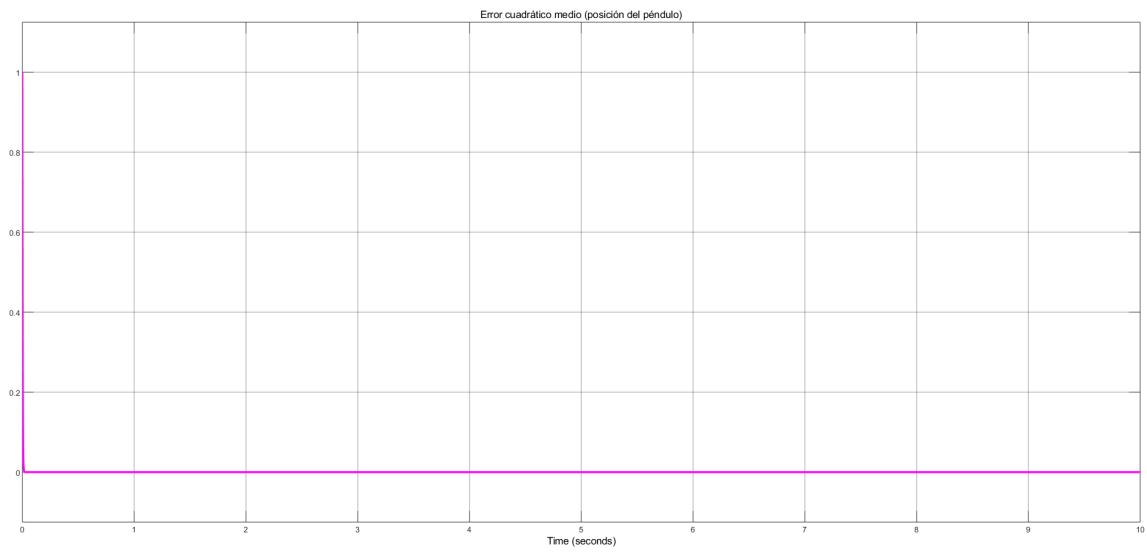


Figura 22: Error cuadrático medio de θ para la Condición inicial: $[\theta \ \dot{\theta}] = [1 \ 0]$

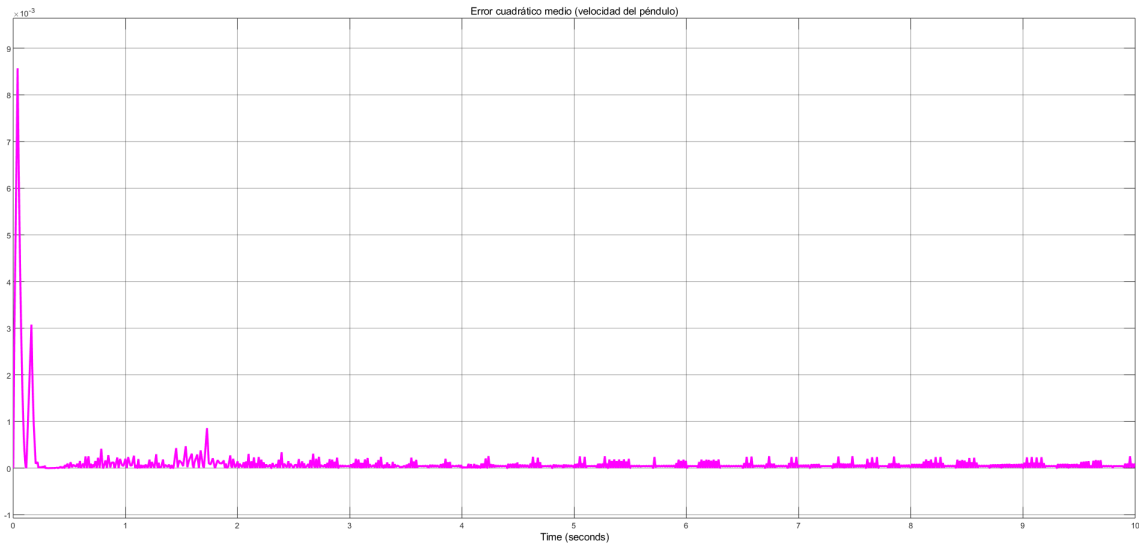


Figura 23: Error cuadrático medio de $\dot{\theta}$ para la Condición inicial: $[\theta \ \dot{\theta}] = [0.5 \ 0]$

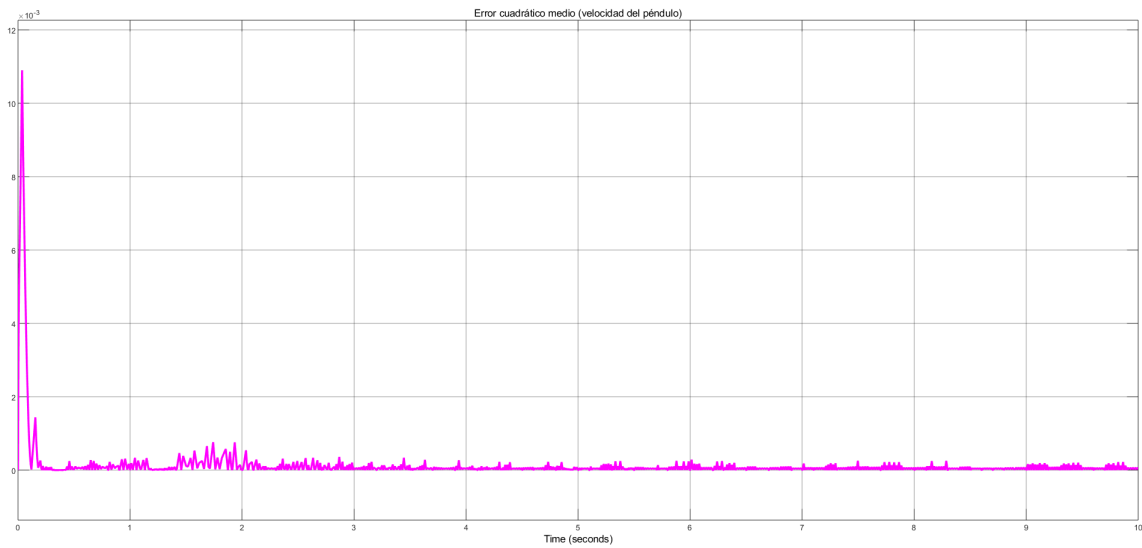


Figura 24: Error cuadrático medio de $\dot{\theta}$ para la Condición inicial: $[\theta \ \dot{\theta}] = [1 \ 0]$

5.4. Filtro Kalman

El filtro Kalman, lo usaremos para contrastar el observador basado Sliding, debido a que este filtro es comúnmente utilizado como un observador. Dadas las características de nuestro sistema no se puede utilizar el filtro de Kalman, ya que éste filtro es para sistemas lineales. Por esta razón utilizamos la extensión EKF del filtro de Kalman para sistemas no lineales. Podemos ver en la figura 25 el diagrama utilizado en el Simulink. Vale aclarar que para diseñar el filtro en este programa, se utilizó un bloque propio de su librería, donde solo se le tenía que ingresar las funciones del sistema y los parámetros del ruido. Las funciones del sistema, por un lado la dinámica de los estados y por el otro, las observaciones, son de la siguiente manera

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{f}{g(\theta)} - h(\theta, \dot{\theta}) \\ y = \theta \end{cases} \quad (44)$$

ya que nuestra medida se hace directamente a partir del primer estado.

Por otro lado los parámetros del ruido son

$$Q = \begin{bmatrix} 1e-3 & 0 \\ 0 & 1e-3 \end{bmatrix}$$
$$R = [0.01]$$

Debido a que es un filtro discreto, y como se mencionó anteriormente nuestro sistema no lo es, tuvimos que discretizarlo, para eso pusimos en las entradas del filtro un mantenedor de orden 0, de forma que la entrada al filtro fuera discreta. Esto se puede apreciar en la figura 25. Este mantenedor de orden 0, tiene un tiempo de muestreo de 0.005 segundos.

En las figuras 26 y 27 podemos observar la evolución de los estados para las diferentes condiciones iniciales propuestas anteriormente. En este caso tenemos el sistema del péndulo invertido, controlado a partir del Robust Adaptive Backstepping, al igual que con el observador basado en sliding, de forma de poder establecer una comparación. A partir de estas imágenes se puede ver que la estimación de los estados es buena.

En las figuras 28 y 29 se puede apreciar el error cuadrático medio entre θ y $\hat{\theta}$ observado. Podemos ver que, al igual que con el observador basado en sliding, el error máximo se da al inicio, ya que las condiciones iniciales son diferentes, pero después el error es 0.

Por otro lado en las figuras 30 y 31 se puede ver el error cuadrático medio de $\dot{\theta}$ y $\dot{\hat{\theta}}$ observado. En estas figuras se puede apreciar que el observador logra seguir al estado real, sin embargo, recién al segundo lo logra seguir con error 0. Podemos decir que éste observador cumple la función de buena manera, debido a que $\hat{\theta}$ logra observarse de forma rápida y precisa.

Por último, se decidió estudiar que sucede cuando al estado a observar (θ) se le agrega ruido blanco gaussiano antes de tomar la medida, el diagrama de Simulink se puede apreciar en la figura 32. En la figura 33 se puede ver como el filtro afecta a los estados estimados, si bien el filtro logra observar bien a ambos estados, podemos ver que el ruido sigue presente y genera pequeñas perturbaciones en los estados estimados.

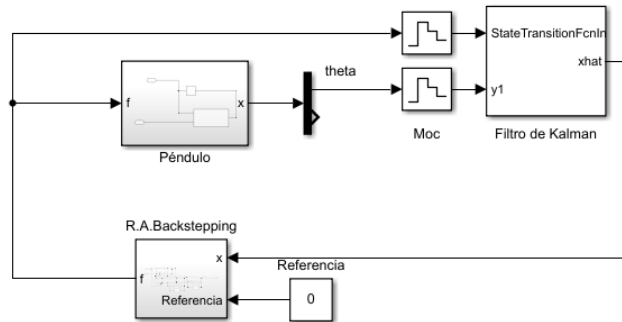


Figura 25: Esquema de Realimentación de estados

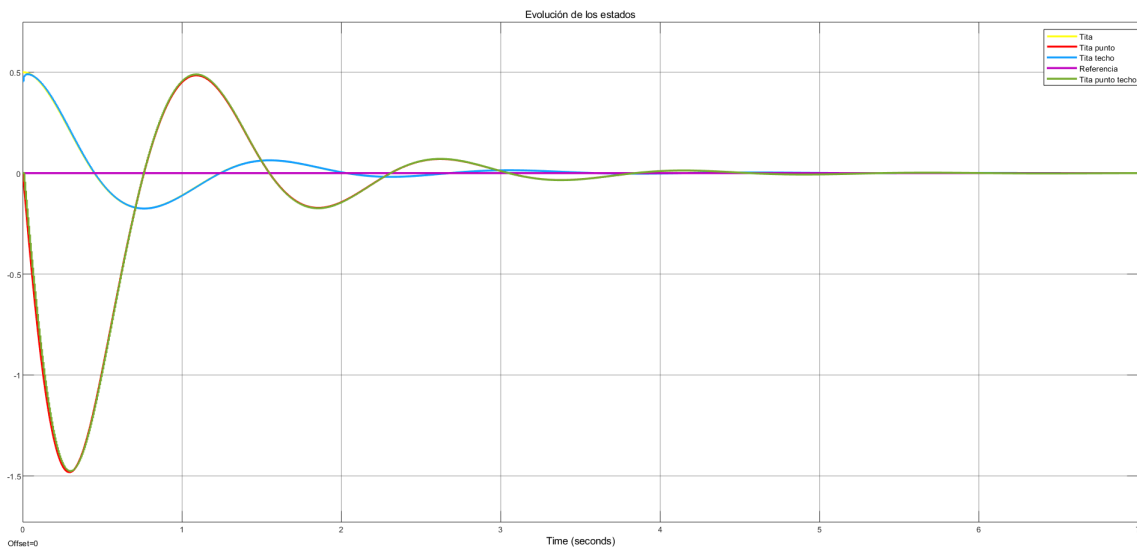


Figura 26: Evolución de los estados verdaderos y estimados. Condiciones iniciales: $[\theta \quad \dot{\theta}] = [0.5 \quad 0]$

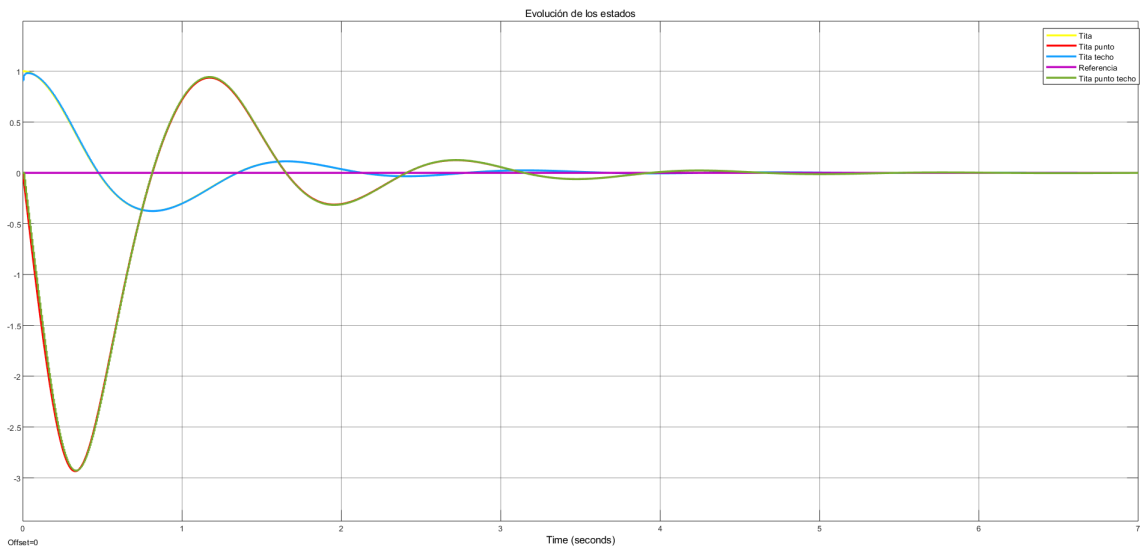


Figura 27: Evolución de los estados verdaderos y estimados. Condiciones iniciales: $[\theta \ \dot{\theta}] = [1 \ 0]$

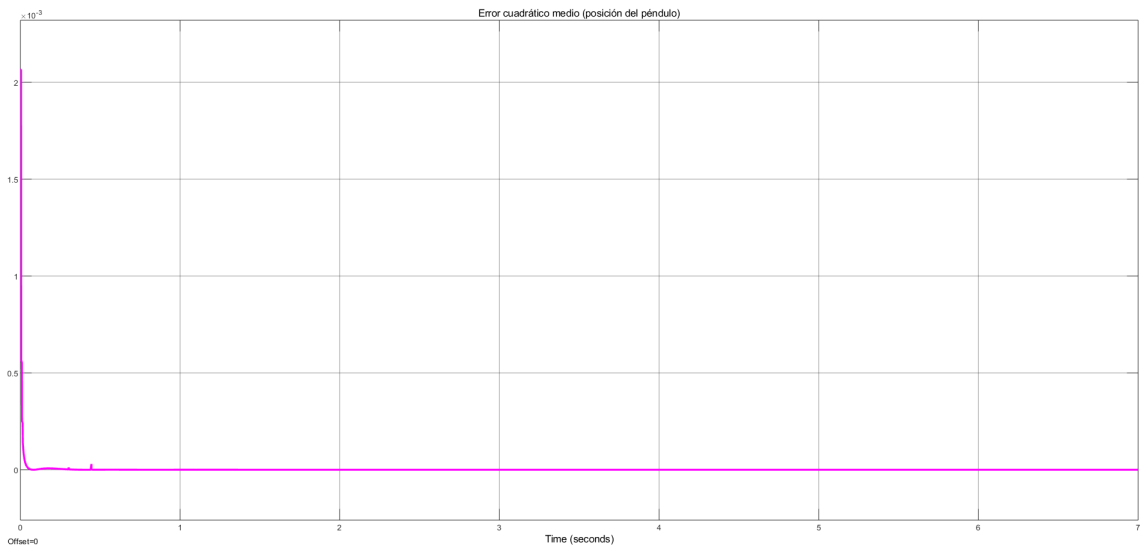


Figura 28: Error cuadrático medio de θ para la Condición inicial: $[\theta \ \dot{\theta}] = [0.5 \ 0]$

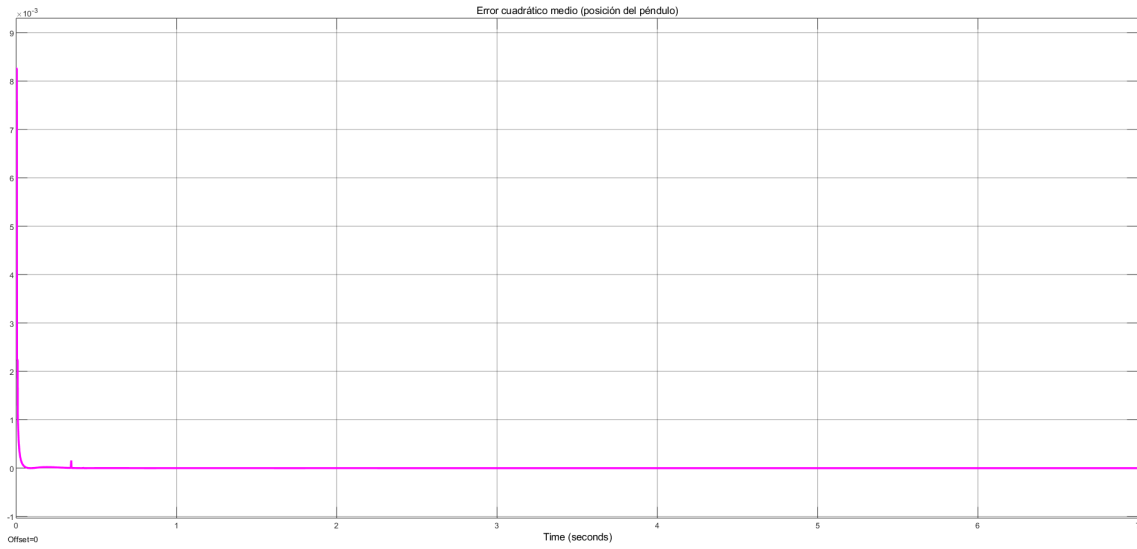


Figura 29: Error cuadrático medio de θ para la Condición inicial: $[\theta \ \dot{\theta}] = [1 \ 0]$

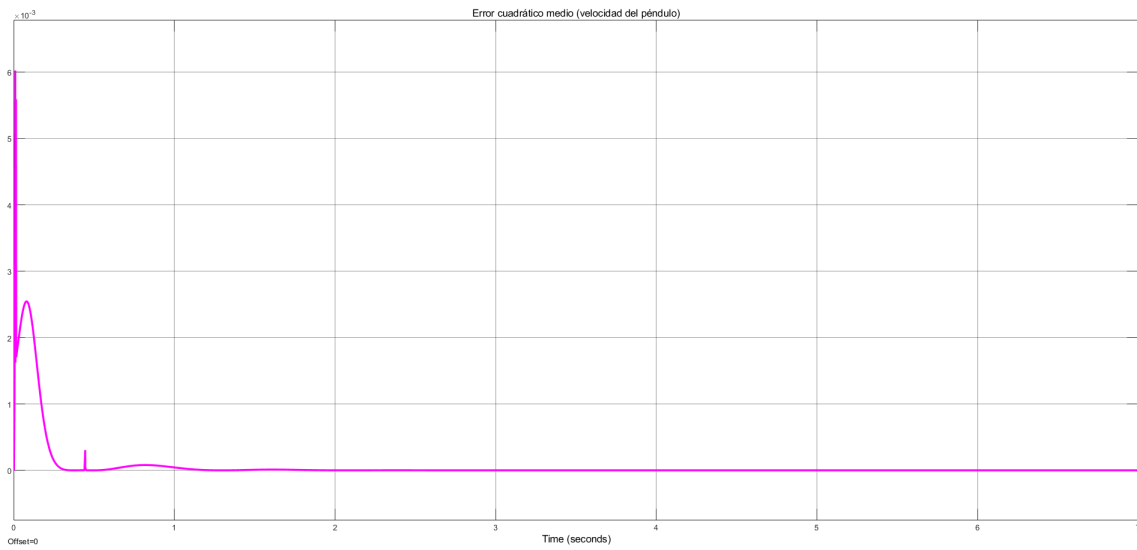


Figura 30: Error cuadrático medio de $\dot{\theta}$ para la Condición inicial: $[\theta \ \dot{\theta}] = [0.5 \ 0]$

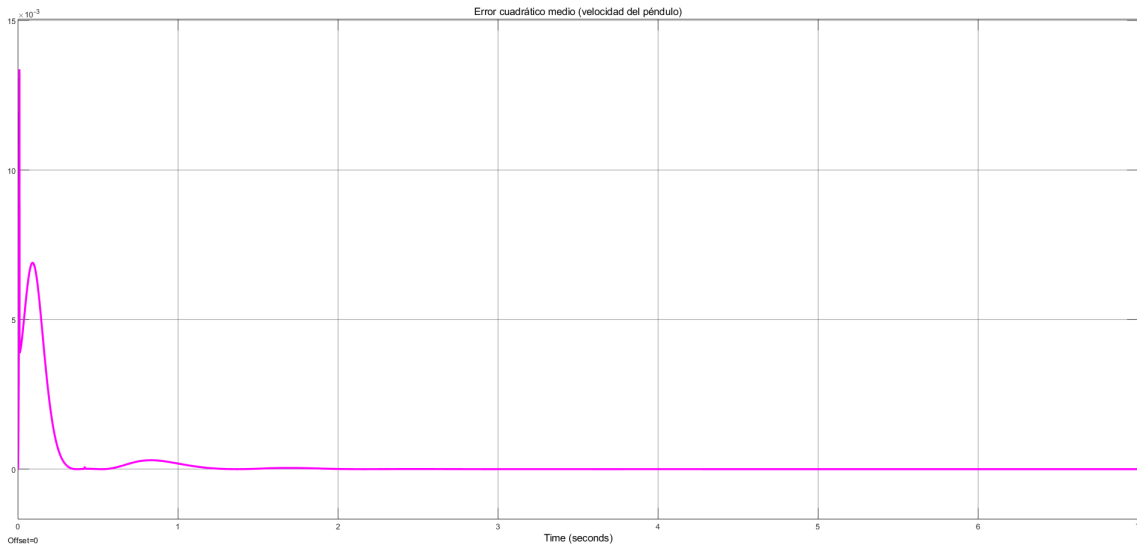


Figura 31: Error cuadrático medio de $\dot{\theta}$ para la Condición inicial: $[\theta \ \dot{\theta}] = [1 \ 0]$

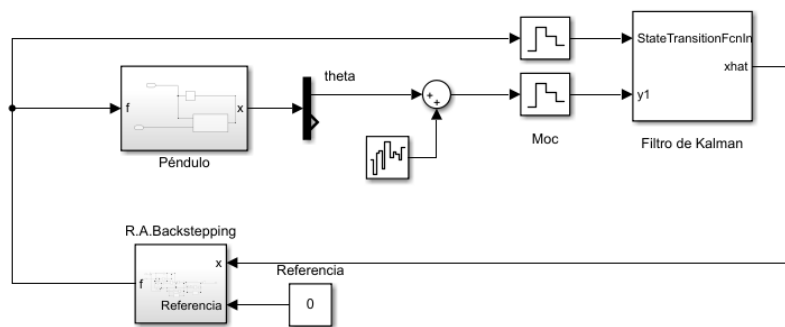


Figura 32: Esquema de Realimentación de estados con ruido

6. Conclusiones

A modo de conclusión, podemos ver en la sección anterior que ambos controladores diseñados logran controlar de buena forma al sistema del péndulo invertido. Se puede apreciar que el control mediante Robust Adaptive Backstepping es más flexible que el controlador mediante la ecuación de Riccati. Esto se puede ver ya que al cambiar la referencia del primer controlador, logra seguirlo controlando sin hacer ningún cambio adicional en el algoritmo. Sin embargo, si se quisiera cambiar la referencia en el otro control, eso implicaría cierto costo computacional adicional que no está contemplado. También podemos ver que el tiempo de asentamiento del primer controlador es menor al del segundo controlador. Sin embargo, podemos ver que la evolución de la posición del péndulo en este controlador no oscila entorno a la vertical, en cambio en el controlador basado en Backstepping si.

De igual manera, podemos ver que ambos controladores logran controlar el péndulo cuando modificamos las condiciones iniciales. Ambos controladores funcionan bien, más allá de haber sido diseñados sin tener conocimiento sobre los parámetros del modelo. Por último, si estudiamos el MSE de cada controlador, podemos ver que si bien el controlador basado en Backstepping oscila un poco más, éste es más rápido que el controlador basado en Riccati. De igual manera, ambos controladores a los 3 segundos ya tienen error 0.

Si comparamos ambos observadores, podemos ver que ambos tienen un comportamiento similar. Vemos que el hecho de que el filtro de Kalman sea discreto, introduce un error a costas del tiempo de muestreo. Por otro lado, podemos ver que si queremos cambiar la referencia de estos, modificar el Sliding será más sencillo, ya que como se explico en la sección 4.2, el filtro de Kalman esta construido en base de la linealización jacobiana en el punto de referencia, por ende al cambiar la referencia se tendría que linealizar de nuevo y evaluar en el nuevo punto de interés. Si analizamos el error cuadrático medio de ambos estados, vemos que θ se logra observar de forma precisa en todo momento, sin embargo, esto no es meritorio, ya que θ es el estado visible de nuestro sistema. En cambio si analizamos $\dot{\theta}$ vemos que ambos observadores logran observarlo de forma precisa luego de un tiempo de seguimiento, sin embargo, el observador basado en sliding tiene un ruido a lo largo del tiempo, pero logra seguirlo en un tiempo anterior al filtro de Kalman. Este filtro demora más en llegar al error 0, pero no cuenta con perturbaciones una vez que se estabiliza.

Por otro lado, si bien nuestro objetivo fue solo controlar θ y $\dot{\theta}$, no tenemos conocimiento acerca de la evolución de la posición y velocidad del carro. Es importante destacar esto ya que podría influir en el desempeño del control realizado. Podríamos tener una muy buena evolución de la posición del péndulo, pero a costa de que la posición o velocidad del carro se nos vaya del área de trabajo y ya no sería útil el control. A futuro se podría estudiar como modificar óptimamente los mecanismos de control diseñados en esta monografía, para controlar con los mismos controladores los 4 estados, en vez de solo los 2 controlados.

Bibliografía

- [1] A. Pascual, “EKF y UKF: dos extensiones del filtro de Kalman para sistemas no lineales aplicadas al control de un péndulo invertido,” Monografía, Instituto de Ingeniería Eléctrica - Facultad de Ingeniería - UDELAR, 2006.
- [2] S. Rudra and R. K. Barai, “Robust adaptive backstepping control of inverted pendulum on cart system,” 2012.
- [3] M. J. L. S. Francisco Rodríguez Rubio, *Control adaptativo y robusto*. Universidad de Sevilla, 1996.
- [4] L. R. Peter Lancaster, “ecuaciones algebraicas de Riccati,” *Oxford University Press*, 1995.
- [5] J. K. H. J. J, E. Slotine and E. A. Mlsawa, “On sliding observers for nonlinear systems.”
- [6] L. T. May-Win and E. A. Misawa, “Comparison of the Sliding Observer to Several State Estimators Using a Rotational Inverted Pendulum,” 1995.
- [7] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*. Pearson, 2014.

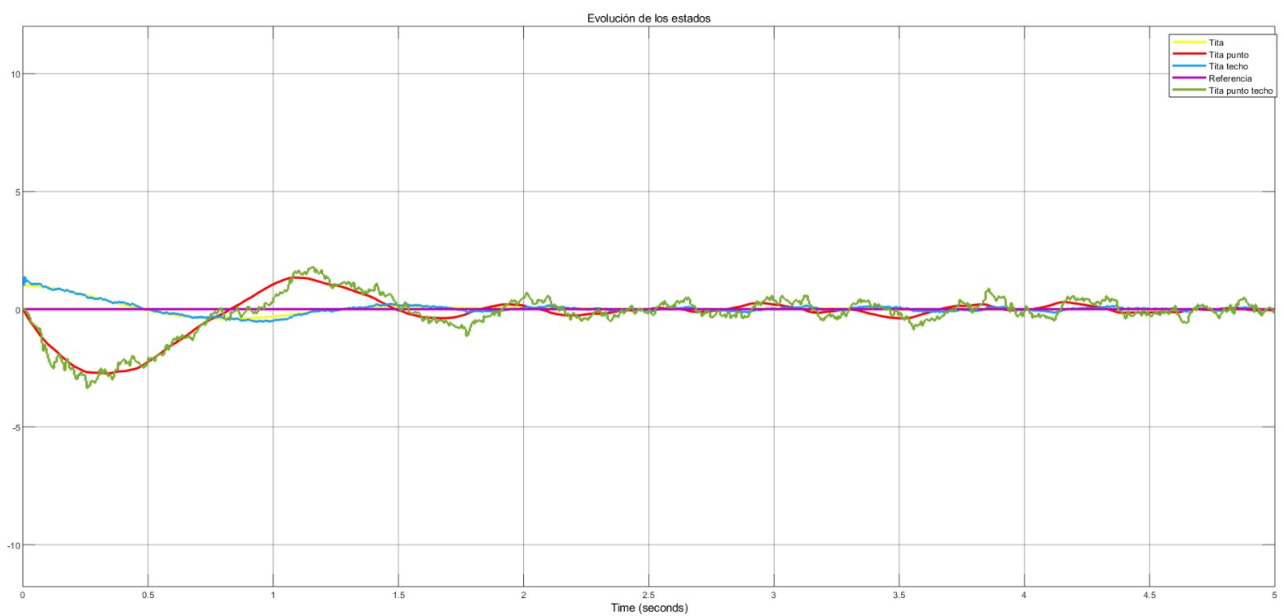


Figura 33: Evolución de los estados verdaderos y estimados con ruido aditivo. Condiciones iniciales: $[\theta \ \dot{\theta}] = [0.1 \ 0]$