

Trabajo final del curso

Análisis y control de sistemas no lineales

Brandon Sebastián Martínez Bacciarini
brandonmartinez.ief@gmail.com

Agosto 2021

Abstract

La presente monografía representa un análisis del artículo *Robust adaptive control of induction motors*, C.-M. Kwan, 1995. El artículo presenta un nuevo acercamiento al control no lineal de motores de inducción tomando las ideas del método de variables deslizantes pero presentando una nueva formulación del mismo para adecuarlo al problema. Se plantea un método que intenta ser robusto frente a incertidumbres paramétricas (resistencia del rotor y torque de carga, desconocidos pero acotadas) que no cumplen con la llamada *matching condition*.

1 Introducción

El artículo comienza con distintas menciones a artículos que presentan diferentes aproximaciones al problema del control no lineal de motores de inducción con distintas técnicas y bajo distintas hipótesis de trabajo. Las más recientes a la fecha de creación del artículo: *Adaptive input-output linearization method*, Marino et al. (1993) y *Sliding mode control*, Soto y Yeung (1992).

Organización del artículo El artículo está organizado de la siguiente manera:

1. Introducción
2. Descripción del modelo de 5^{to} orden para la máquina de inducción presentado en el artículo de Marino et al. (1993). Y se presenta la descripción del modelo equivalente (*field-oriented*), sobre el que se trabaja posteriormente
3. Desarrollo de dos esquemas de control robusto:
 - 3.1. Control no adaptativo
 - 3.2. Control adaptativo

Ambos esquemas de control se basan en la metodología de las “*nonlinear sliding variables*”. Se presentan las simulaciones correspondientes para cada caso

4. Conclusiones

Aclaración En **éste** trabajo, en especial a partir de la sección que desarrolla el control adaptativo, los nombres de las variables y funciones definidas difieren a aquellas definidas en el artículo original por C.-M. Kwan. Por el hecho que resulta un poco más sencilla su lectura y su relación con la sección previa.

2 Descripción del modelo y del modelo equivalente

En el artículo de Marino et al. (1993), se presenta un modelo de quinto orden para el motor de inducción con la inclusión de la dinámica del rotor, bajo el supuesto de inductancias mutuas iguales y un circuito magnético lineal. El modelo se resume en la siguiente ecuación de estado

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{n_p M}{J L_r} (\psi_{ra} i_{sb} - \psi_{rb} i_{sa}) - \frac{T_L}{J} \\
\frac{d\psi_{ra}}{dt} &= -\frac{R_r}{L_r} \psi_{ra} - n_p \omega \psi_{rb} + \frac{R_r M}{L_r} i_{sa} \\
\frac{d\psi_{rb}}{dt} &= -\frac{R_r}{L_r} \psi_{rb} + n_p \omega \psi_{ra} + \frac{R_r M}{L_r} i_{sb} \\
\frac{di_{sa}}{dt} &= \frac{M R_r}{\sigma L_s L_r^2} \psi_{ra} + \frac{n_p M}{\sigma L_s L_r} \omega \psi_{rb} - \left(\frac{M^2 R_r + L_r^2 R_s}{\sigma L_s L_r^2} \right) i_{sa} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{sa} \\
\frac{di_{sb}}{dt} &= \frac{M R_r}{\sigma L_s L_r^2} \psi_{rb} - \frac{n_p M}{\sigma L_s L_r} \omega \psi_{ra} - \left(\frac{M^2 R_r + L_r^2 R_s}{\sigma L_s L_r^2} \right) i_{sb} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{sb}
\end{aligned} \tag{1}$$

Donde ω es la velocidad angular, ψ_{ra} , ψ_{rb} denotan los los flujos magnéticos por el rotor, e i_{sa} , i_{sb} las corrientes estáticas¹.

La ecuación de estado (1), puede escribirse de manera compacta como

$$\dot{x} = f(x) + Gu + F(x)\theta \tag{2}$$

Si se definen:

$$\begin{cases}
x = [\omega \ \psi_{ra} \ \psi_{rb} \ i_{sa} \ i_{sb}]^T & \text{[estado]} \\
u = [u_{sa} \ u_{sb}]^T & \text{[entrada]} \\
\theta = [T_L - T_{LN} \ R_r - R_{rN}]^T & \text{[desviaciones de parámetros desconocidos]}
\end{cases} \tag{3}$$

Y donde²,

$$f(x) = \begin{bmatrix} \mu(x_2 x_5 - x_3 x_4) - \frac{T_{LN}}{J} \\ -\alpha x_2 - n_p x_1 x_3 + \alpha M x_4 \\ -\alpha x_3 + n_p x_1 x_2 + \alpha M x_5 \\ \alpha \beta x_2 + n_p \beta x_1 x_3 - \gamma x_4 \\ \alpha \beta x_3 - n_p \beta x_1 x_2 - \gamma x_5 \end{bmatrix}, \quad G = \frac{1}{\sigma L_s} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{J} & 0 \\ 0 & \frac{M x_4 - x_2}{L_r} \\ 0 & \frac{M x_5 - x_3}{L_r} \\ 0 & \frac{M(x_2 - M x_4)}{\sigma L_s L_r^2} \\ 0 & \frac{M(x_3 - M x_5)}{\sigma L_s L_r^2} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Cabe mencionar en éste punto, que no es posible aplicar el método de las variables deslizantes al modelo descrito en (4), ya que cuando lo reescribimos en la forma regular (5) la incertidumbre aditiva δ_η no cumple con la condición $\delta_\eta(0, 0) = 0$.

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} &= f(\eta, \zeta) + \delta_\eta(\eta, \zeta) \\
\dot{\zeta} &= f_a(\eta, \zeta) + G_a(\eta, \zeta) [u + \delta_\zeta(\eta, \zeta, u)]
\end{aligned} \tag{5}$$

Definiendo: $\eta = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, $\zeta = [x_4 \ x_5]^T$. Se transforma (3) en la forma regular (5), donde:

¹Los significados de los parámetros y constantes involucradas en el modelado se encuentran listados en el apéndice dentro de la sección *Nomenclatura*.

²Se definen los parámetros conocidos: $\alpha = R_{rN}/L_r$, $\beta = M/\sigma L_s L_r$, $\gamma = M^2 R_r N / \sigma L_s L_r^2 + R_s / \sigma L_s$, y $\mu = n_p M / J L_r$.

$$\begin{aligned}
f(\eta, \zeta) &= \begin{bmatrix} \mu(\eta_2\zeta_2 - \eta_3\zeta_1) \\ -\alpha\eta_2 - n_p\eta_1\eta_3 + \alpha M\zeta_1 \\ -\alpha\eta_3 + n_p\eta_1\eta_2 + \alpha M\zeta_2 \end{bmatrix} \implies f(0, 0) = 0 \\
\delta_\eta(\eta, \zeta) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{J} (T_{L_N} + \theta_1) \\ \left(\frac{M\zeta_1 - \eta_2}{L_r} \right) \theta_2 \\ \left(\frac{M\zeta_2 - \eta_3}{L_r} \right) \theta_2 \end{bmatrix} \implies \delta_\eta(0, 0) = \left[-\frac{1}{J} (T_{L_N} + \theta_1) \quad 0 \quad 0 \right]^T \neq 0 \\
f_a(\eta, \zeta) &= \begin{bmatrix} \alpha\beta\eta_2 + n_p\beta\eta_1\eta_3 - \gamma\zeta_1 \\ \alpha\beta\eta_3 - n_p\beta\eta_1\eta_2 - \gamma\zeta_2 \end{bmatrix} \implies f_a(0, 0) = 0 \\
\delta_\zeta(\eta, \zeta, u) &= \frac{M}{L_r^2} \begin{bmatrix} \eta_2 - M\zeta_1 \\ \eta_3 - M\zeta_2 \end{bmatrix} \implies \|\delta_\zeta(\eta, \zeta, u)\| = \frac{M}{L_r^2} \left\| \begin{bmatrix} \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} - M \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \right\| \leq \|\eta\| + M\|\zeta\| = \rho(\eta, \zeta), \quad k = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

En lugar de trabajar con el modelo en variables de estado planteado, se trabaja con el modelo *field-oriented* obtenido mediante la transformación presentada por Blaschke (1972),

$$\begin{aligned}
(x, u) &\xleftrightarrow{T} (z, v) \\
(z, v) &= T(x, u) = (T_1(x), T_2(x, u)), \quad (x, u) = T^{-1}(z, v) = (T_1^{-1}(z), T_2^{-1}(z, v))
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
z = T_1(x) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \\ \frac{x_2x_4 + x_3x_5}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} \\ \frac{x_2x_5 - x_3x_4}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} \\ \tan^{-1} \frac{x_3}{x_2} \end{bmatrix}, \quad z = [\omega \quad \psi_d \quad i_d \quad i_q \quad \rho]^T \\
v = T_2(x, u) &= \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} \begin{bmatrix} x_2 & -x_3 \\ x_3 & x_2 \end{bmatrix} u, \quad v = [u_d \quad u_q]^T
\end{aligned} \tag{8}$$

Que involucra una transformación entre el marco de referencia fijo del estator (a, b) a un marco (d, q) , que rota en conjunto con el vector de flujos (ψ_{ra}, ψ_{rb}) .

La transformación inversa de T es,

$$x = T_1^{-1}(z) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \cos z_5 \\ z_2 \sin z_5 \\ z_3 \cos z_5 - z_4 \sin z_5 \\ z_3 \sin z_5 + z_4 \cos z_5 \end{bmatrix}, \quad u = T_2^{-1}(z, v) = \begin{bmatrix} \cos z_5 & \sin z_5 \\ -\sin z_5 & \cos z_5 \end{bmatrix} v \tag{9}$$

Ahora, la dinámica de la transformación resulta

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \mu z_2 z_4 - \frac{T_{LN}}{J} - \frac{1}{J} \theta_1 \\ \dot{z}_2 = -\alpha z_2 + \alpha M z_3 + \left(\frac{M z_3 - z_2}{L_r} \right) \theta_2 \\ \dot{z}_3 = -\gamma z_3 + \alpha \beta z_2 - n_p z_1 z_4 + \alpha M \frac{z_4^2}{z_2} + \frac{1}{\sigma L_s} v_1 + \left[\frac{M z_4^2}{L_r z_2} + \frac{M(z_2 - M z_3)}{\sigma L_s L_r^2} \right] \theta_2 \\ \dot{z}_4 = -\gamma z_4 - n_p \beta z_1 z_2 + n_p z_1 z_3 - \alpha M \frac{z_3 z_4}{z_2} + \frac{1}{\sigma L_s} v_2 + \left[-\frac{M^2 z_4}{\sigma L_s L_r^2} - \frac{M z_3 z_4}{L_r z_2} \right] \theta_2 \\ \dot{z}_5 = n_p z_1 + \alpha M \frac{z_4}{z_2} + \frac{M z_4}{L_r z_2} \theta_2 \end{cases} \quad (10)$$

Notar nuevamente que no es posible expresar (10) en la forma regular presentada en (5). En éste caso no sólo es debido a que la incertidumbre aditiva $\delta_\eta(0,0) \neq 0$, sino que también se debe a que $\#f(0,0), f_a(0,0)$.

3 Control deslizante del motor de inducción

Hemos notado que para las incertidumbres planteadas en éste problema no hay una manera explícita de lidiar con ellas mediante la aplicación del método de *sliding variables* en su formulación regular. La formulación del método basado en variables deslizantes que se estudia en el presente artículo es dinámico, debido al uso de dos señales de referencia que intentarán resolver el problema de las incertidumbres presentes. Se asumirá en el posterior estudio lo siguiente:

El momento de carga T_L y la resistencia del rotor R_r son desconocidos pero se encuentran acotados, y sus cotas inferior y superior son conocidas.

3.1 Control no adaptativo

Con el objetivo de regular la velocidad angular del rotor y la magnitud del flujo magnético, se utiliza una técnica basada en la de las variables deslizantes explotando la estructura del modelo descrito por (10). Denotando ω_r y ψ_{dr} los deseados niveles de referencia para z_1 y z_2 , se definen³

$$\begin{aligned} e_1 &= z_1 - \omega_r \\ e_2 &= z_2 - \psi_{dr} \end{aligned} \quad (11)$$

Considerando las trayectorias de referencias como valores constantes, la dinámica del error se corresponde con

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{z}_1 = \mu z_2 z_4 - \frac{T_{LN}}{J} - \frac{1}{J} \theta_1 \\ \dot{e}_2 = \dot{z}_2 = -\alpha z_2 + \alpha M z_3 + \left(\frac{M z_3 - z_2}{L_r} \right) \theta_2 \end{cases} \quad (12)$$

En ausencia de incertidumbre en los parámetros ($\theta = 0$), para que la dinámica del error: $\dot{e}_i = -k_i e_i$, $k_i > 0$, $i = 1, 2$, sea exponencialmente estable con tasas de decaimiento k_1 y k_2 . Se debe cumplir que

³Se asume que las trayectorias de referencia ω_r y ψ_{dr} son diferenciables y acotadas.

$$\begin{aligned}
z_4 &= \frac{1}{\mu z_2} \left(\frac{T_{LN}}{J} - k_1 e_1 \right) \\
z_3 &= \frac{z_2}{M} - \frac{k_2 e_2}{\alpha M}
\end{aligned} \tag{13}$$

Para lograr la realización del control ideal presentado en (13), se definen las variables deslizantes

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_4 \\ z_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu z_2} \left(\frac{T_{LN}}{J} - k_1 e_1 \right) \\ \frac{z_2}{M} - \frac{k_2 e_2}{\alpha M} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Cómo en la formulación del control deslizante, se deriva la ecuación (14) con ayuda de la dinámica descrita en 10.

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_1 &= \dot{z}_4 + \frac{k_1 \dot{e}_1 z_2 - (k_1 e_1 - \frac{T_{LN}}{J}) \dot{z}_2}{\mu z_2^2} \\
&= \dot{z}_4 + \frac{k_1}{\mu} \frac{\dot{z}_1}{z_2} + \left(\frac{T_{LN}}{\mu J} - \frac{k_1}{\mu} e_1 \right) \frac{\dot{z}_2}{z_2^2} \\
&= -\gamma z_4 - n_p \beta z_1 z_2 - n_p z_1 z_3 - \alpha M \frac{z_3 z_4}{z_2} + \frac{1}{\sigma L_s} v_2 + \left[-\frac{M^2 z_4}{\sigma L_s L_r^2} - \frac{M z_3 z_4}{L_r z_2} \right] \theta_2 + \\
&\quad + \frac{k_1}{\mu} \left(\mu z_4 - \frac{T_{LN}}{J z_2} - \frac{1}{J z_2} \theta_1 \right) + \left(\frac{T_{LN}}{\mu J} - \frac{k_1}{\mu} e_1 \right) \left[-\frac{\alpha}{z_2} + \frac{\alpha M z_3}{z_2^2} + \left(\frac{M z_3 - z_2}{L_r z_2^2} \right) \theta_2 \right] \\
&= f_{\sigma_1} + g_{\sigma_{11}} \theta_1 + g_{\sigma_{12}} \theta_2 + \frac{1}{\sigma L_s} v_2
\end{aligned} \tag{15}$$

Donde se definen,

$$\begin{cases} f_{\sigma_1} = -\gamma z_4 - n_p \beta z_1 z_2 - n_p z_1 z_3 - \alpha M \frac{z_3 z_4}{z_2} + k_1 \left(\frac{\mu z_2 z_4 - \frac{T_{LN}}{J}}{\mu z_2} \right) + \frac{\alpha \left(\frac{T_{LN}}{J} - k_1 e_1 \right) (M z_3 - z_2)}{\mu z_2^2} \\ g_{\sigma_{11}} = -\frac{k_1}{\mu J z_2} \\ g_{\sigma_{12}} = \frac{M^2 z_4}{\sigma L_s L_r^2} - \frac{M z_3 z_4}{L_r z_2} + \left(\frac{T_{LN}}{J} - k_1 e_1 \right) \left(\frac{M z_3 - z_2}{\mu L_r z_2^2} \right) \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_2 &= \dot{z}_3 + \frac{k_2 \dot{e}_2}{\alpha M} - \frac{\dot{z}_2}{M} \\
&= \dot{z}_3 + \left(\frac{k_2}{\alpha} - \frac{1}{M} \right) \dot{z}_2 \\
&= -\gamma z_3 + \alpha \beta z_2 + n_p z_1 z_4 + \alpha M \frac{z_4^2}{z_2} + \frac{1}{\sigma L_s} v_1 + \left[\frac{M z_4^2}{L_r z_2} + \frac{M(z_2 - M z_3)}{\sigma L_s L_r^2} \right] \theta_2 + \\
&\quad + \left(\frac{k_2}{\alpha} - \frac{1}{M} \right) \left[-\alpha z_2 + \alpha M z_3 + \left(\frac{M z_3 - z_2}{L_r} \right) \theta_2 \right] \\
&= f_{\sigma_2} + g_{\sigma_{22}} \theta_2 + \frac{1}{\sigma L_s} v_1
\end{aligned} \tag{17}$$

Donde se definen,

$$\begin{cases} f_{\sigma_2} = -\gamma z_3 + \alpha\beta z_2 + n_p z_1 z_4 + \alpha M \frac{z_4^2}{z_2} + \frac{\alpha \left(\frac{k_2}{\alpha} - 1\right) (M z_3 - z_2)}{M} \\ g_{\sigma_{22}} = \frac{M z_4^2}{L_r z_2} + \frac{M(z_2 - M z_3)}{\sigma L_s L_r^2} + \frac{\left(\frac{k_2}{\alpha} - 1\right) (M z_3 - z_2)}{M L_r} \end{cases} \quad (18)$$

Recapitulando, la dinámica encontrada tiene la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_{\sigma_{11}} & g_{\sigma_{12}} \\ 0 & g_{\sigma_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{\sigma_1} \\ f_{\sigma_2} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sigma L_s} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= G_\sigma \theta + f_\sigma + G_a v = \Delta + f_\sigma + G_a v \end{aligned} \quad (19)$$

Donde quedan implícitas las definiciones realizadas en la segunda igualdad⁴. Definiendo la nueva acción de control w a diseñar y el control equivalente⁵ v_{eq} de la siguiente manera

$$\begin{cases} v = v_{\text{eq}} + G_a^{-1} w = \sigma L_s \begin{bmatrix} w_2 - f_{\sigma_2} \\ w_1 - f_{\sigma_1} \end{bmatrix} \\ v_{\text{eq}} = -G_a^{-1} f_\sigma = -\sigma L_s \begin{bmatrix} f_{\sigma_2} \\ f_{\sigma_1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (20)$$

Resulta,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 + w_1 \\ \Delta_2 + w_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Calculando las siguientes cotas para Δ_i :

$$\begin{cases} |\Delta_1| = |g_{\sigma_{11}} \theta_1 + g_{\sigma_{12}} \theta_2| \leq |g_{\sigma_{11}}| |\theta_1| + |g_{\sigma_{12}}| |\theta_2| \leq |g_{\sigma_{11}}| |\theta_1|_{\max} + |g_{\sigma_{12}}| |\theta_2|_{\max} = \rho_1 \\ |\Delta_2| = |g_{\sigma_{22}} \theta_2| \leq |g_{\sigma_{22}}| |\theta_2| \leq |g_{\sigma_{22}}| |\theta_2|_{\max} = \rho_2 \end{cases} \quad (22)$$

Donde se denota: $|\theta_i|_{\max} = \max |\theta_i|$, $i = 1, 2$ cuyo valor se asume conocido. Con la misma idea de *Lyapunov redesign*, se eligen $\eta_1, \eta_2 > 0$ y se diseña w_i de la siguiente manera:

$$w_i = -(\rho_i + \eta_i) \text{sgn}(\sigma_i) = -h_{\sigma_i} \text{sgn}(\sigma_i) \quad , \quad i = 1, 2 \quad (23)$$

Para entonces considerar las funciones de Lyapunov $V_i(\sigma_i) = \frac{1}{2} \sigma_i^2$ para $1 \leq i \leq 2$, para las que se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\sigma_i) &= \sigma_i \dot{\sigma}_i = -(\rho_i + \eta_i) \sigma_i \text{sgn}(\sigma_i) + \sigma_i \Delta_i \\ &\leq -(\rho_i + \eta_i) |\sigma_i| + |\sigma_i| \rho_i = -\eta_i |\sigma_i| = -\eta_i \sqrt{2V_i(\sigma_i)} \end{aligned} \quad (24)$$

Lo cual asegura que $\sigma_i = 0$ es un invariante y además se garantiza que la trayectoria $\sigma_i(t)$ alcanza la superficie $\sigma_i = 0$ en un tiempo finito menor que $\frac{|\sigma_i(0)|}{\eta_i}$.

Por lo tanto, el control obtenido mediante este método resulta

$$v = \begin{bmatrix} \sigma L_s \{-f_{\sigma_2} - h_{\sigma_2} \text{sgn}(\sigma_2)\} \\ \sigma L_s \{-f_{\sigma_1} - h_{\sigma_1} \text{sgn}(\sigma_1)\} \end{bmatrix} \iff u = \begin{bmatrix} \cos z_5 & \sin z_5 \\ -\sin z_5 & \cos z_5 \end{bmatrix} v \quad (25)$$

⁴Notar que $G_a^{-1} = (\sigma L_s)^2 G_a$.

⁵En ausencia de incertidumbre, el control equivalente impone: $\dot{\sigma}_i = 0$, $i = 1, 2$.

Observación 1 Cuando el sistema se encuentra deslizando (*sliding mode*) el control solo afecta la dinámica de las variables z_1 y z_2 , mientras que no tiene otros efectos en las demás variables.

Observación 2 Para suavizar el efecto del *chattering* debido a la no linealidad discontinua $\text{sgn}(\cdot)$, se utiliza una aproximación continua del control mediante el uso de la función $\text{sat}(\cdot)$ con una pendiente alta. Es decir,

$$v = \begin{bmatrix} \sigma L_s \{-f_{\sigma_2} - h_{\sigma_2} \text{sat}(\sigma_2/\delta_2)\} \\ \sigma L_s \{-f_{\sigma_1} - h_{\sigma_1} \text{sat}(\sigma_1/\delta_1)\} \end{bmatrix}, \quad \delta_1, \delta_2 > 0 \text{ (pequeños)} \quad (26)$$

En el límite $\delta_i \rightarrow 0$ la no linealidad $\text{sat}(\frac{\sigma_i}{\delta_i})$ aproxima la no linealidad $\text{sgn}(\sigma_i)$.

$$\text{sat}\left(\frac{\sigma_i}{\delta_i}\right) = \begin{cases} \sigma_i/\delta_i, & |\sigma_i| < \delta_i \\ \text{sgn}(\sigma_i), & |\sigma_i| \geq \delta_i \end{cases} \quad (27)$$

Analizando el comportamiento de σ_i con la función de Lyapunov: $V_i(\sigma_i) = \frac{1}{2}\sigma_i$, la derivada de V_i cumple,

$$\dot{V}_i = \sigma_i \dot{\sigma}_i = -(\rho_i + \eta_i)\sigma_i \text{sat}(\sigma_i/\delta_i) + \sigma_i \Delta_i \quad (28)$$

En la región $|\sigma_i| \geq \delta_i$, se tiene que $\text{sat}(z_i) = \text{sgn}(z_i)$ y por lo tanto $\dot{V}_i \leq -\eta_i|\sigma_i|$. Siempre que $|z_i(0)| > \delta_i$, $|z_i(t)|$ decrece estrictamente hasta alcanzar el conjunto $\{|z_i| \leq \delta_i\}$ ⁶ en un tiempo finito y permanece en él para todo tiempo posterior.

3.1.1 Simulaciones

Se simulan los resultados de la aplicación del control encontrado para la dinámica de un motor de inducción con las siguientes características (tabla [1]).

Resistencia estator	R_s	0.18 Ω
Resistencia rotor	R_r	0.15 Ω
Flujo rotor	ψ_r	1.3 Wb (rated)
Numero de pares de polos	n_p	1
Inductancia estator	L_s	0.0699 H
Inductancia rotor	L_r	0.0699 H
Inductancia mutua	L_s	0.068 H
Inercia del rotor	J	0.0586 kg·m ⁻²
Torque carga	T_{L_r}	70 Nm (rated)

Table 1: Datos del motor de inducción (Marino et al. 1993).

Se fijan los siguientes valores para simular los resultados del controlador, ver tabla (2).

Las señales de referencia elegidas para la simulación ω_r y ψ_{d_r} se encuentran graficadas en [1], en conjunto con la aclaración de que se supone (en contraposición con el artículo), que $T_L(t) = 40$ Nm, $\forall t \geq 0$ (se muestra en rojo en el gráfico de la izquierda).

⁶Dicho conjunto es denominado banda de acotación (*boundary layer*).

⁷Ver figura (1).

R_{r_N}	0.075Ω
T_{L_N}	0 Nm
η_1, η_2	10^3
k_1, k_2	25
δ_1, δ_2	0.1

Table 2: Se supone también que: $\theta_1 = T_L(t) = 40 \text{ Nm}$ ⁷, $|\theta_1|_{\max} = T_{L_r} = 70 \text{ Nm}$ y $\theta_1 = |\theta_1|_{\max} = R_r - R_{r_N} = R_{r_N} = 0.075\Omega$.

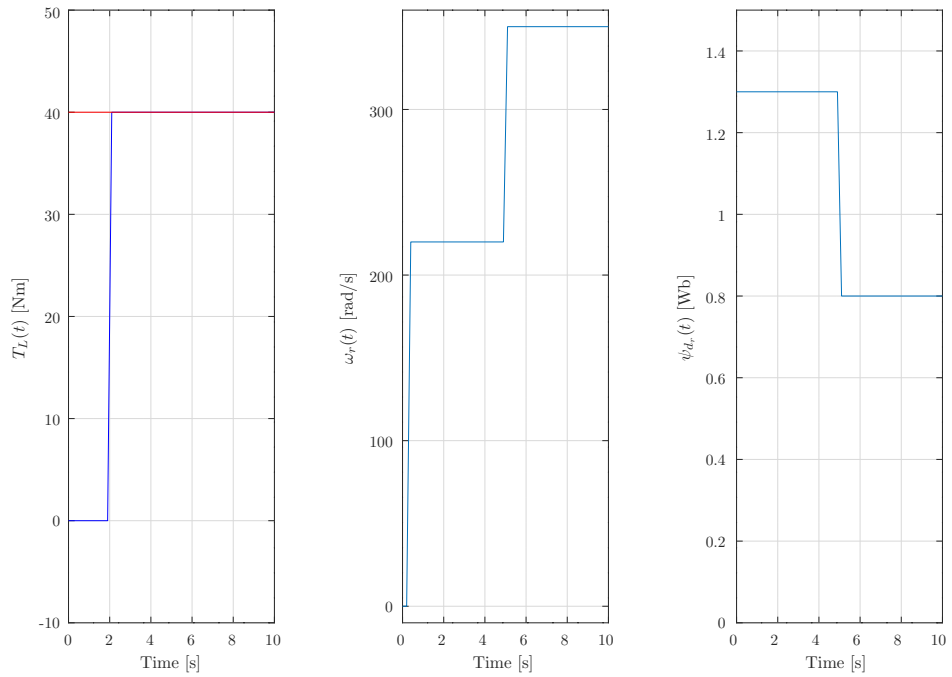


Figure 1: Señales de referencia. En el artículo se aclara: ω_r is zero from 0 to 0.3s, 220 rad/s from 0.3 to 5s, and 350 rad/s from 5 s onwards. ψ_{d_r} is 1.3Wb from 0 to 5s and 0.8Wb after 5s. The discontinuities are smoothed by linear interpolations (se asume un tiempo de transición de 0.2s entre valores constantes).

A continuación se muestran los resultados de la dinámica de la máquina de inducción para el controlador basado en la no linealidad discontinua $\text{sgn}(\cdot)$. Los resultados cuando se cambia la no linealidad discontinua por la aproximación continua $\text{sat}(\cdot/\delta)$, se muestran en el [apéndice](#).

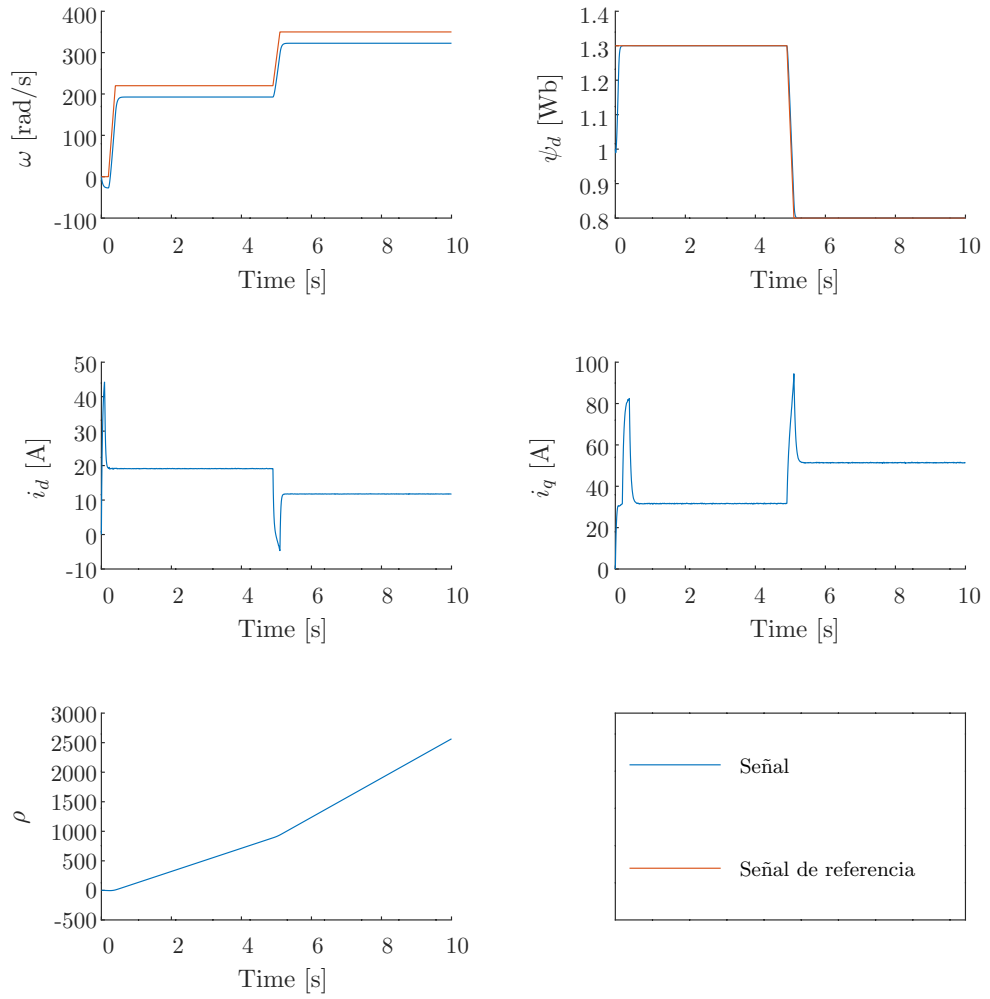
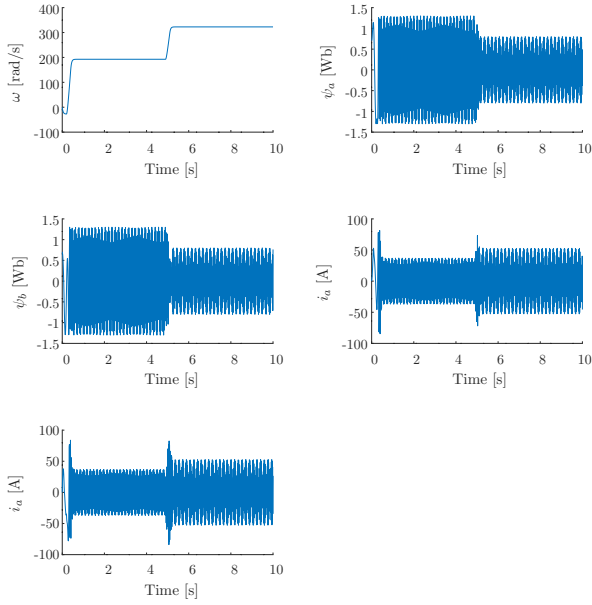
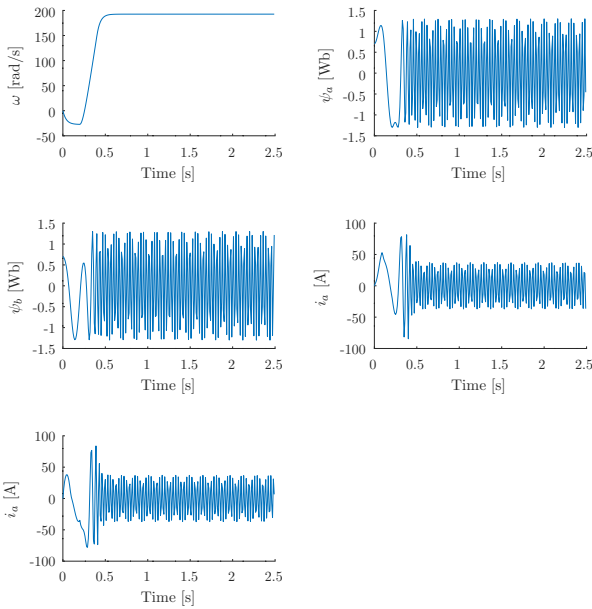


Figure 2: Resultado de la simulación del sistema controlado en las variables del modelo *field-oriented*.

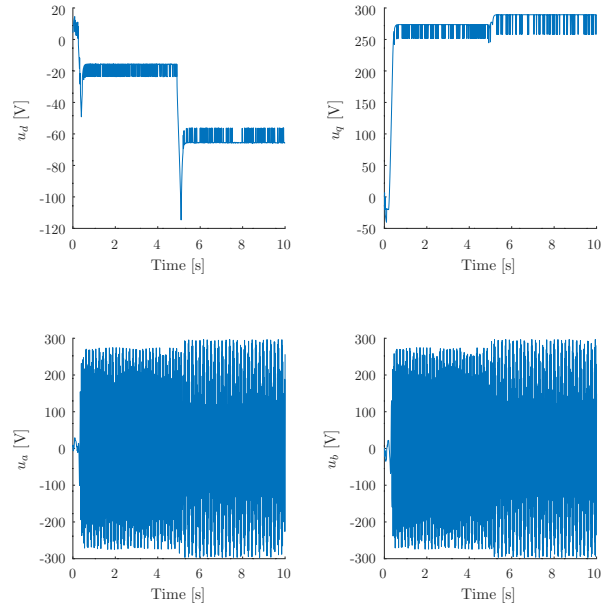


(a) Resultado de la simulación del sistema controlado.

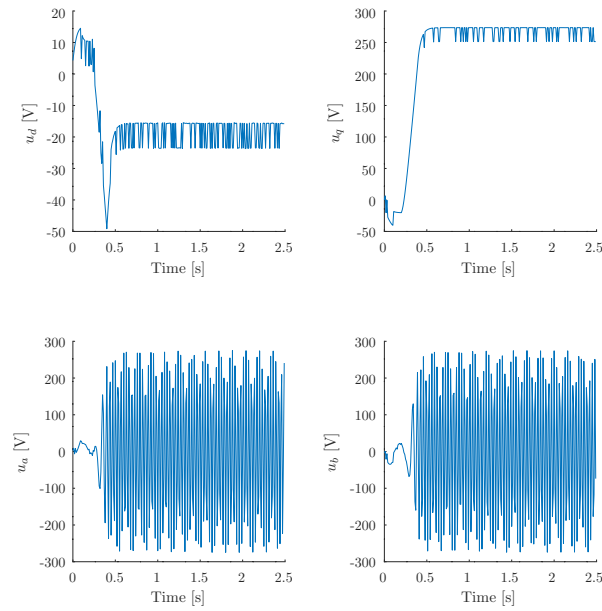


(b) Primeros segundos del resultado que observamos en la figura (3.a).

Figure 3



(a) Señales de control en ambos referenciales.



(b) Primeros segundos del resultado que observamos en la figura (a).

Figure 4

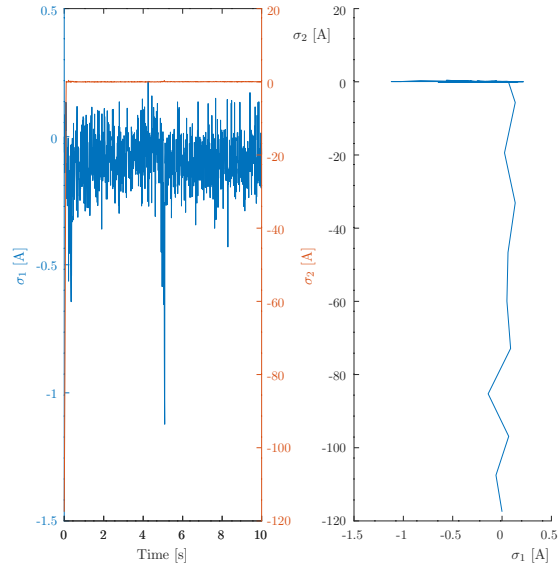


Figure 5: Dinámica de las variables deslizantes σ_1, σ_2 .

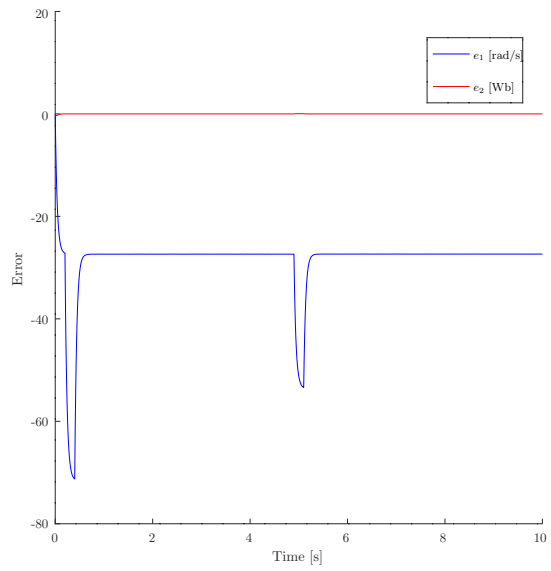


Figure 6: Dinámica del error.

3.2 Control adaptativo

El propósito de esta sección es llevar a cabo un análisis sobre la estabilidad del motor de inducción para todo tiempo. Para ello se trata a las variables z_3 y z_4 como entradas en la ecuación (12) y a partir de un estimativo de las incertidumbres en los parámetros $\hat{\theta}_i$ se propone la ley de control

$$\begin{aligned}\bar{z}_3 &= \frac{1}{\alpha M} \left[-k_2 e_2 + \alpha z_2 - \hat{\theta}_2 \left(\frac{M z_3 - z_2}{L_r} \right) \right] = z_3 - \sigma_2 - \hat{\theta}_2 \left(\frac{M z_3 - z_2}{\alpha L_r M} \right) \\ \bar{z}_4 &= \frac{1}{\mu z_2} \left(-k_1 e_1 + \frac{T_{LN}}{J} + \frac{\hat{\theta}_1}{J} \right) = z_4 - \sigma_1 + \frac{\hat{\theta}_1}{\mu J z_2}\end{aligned}\quad (29)$$

En el caso $\hat{\theta}_i = \theta_i$ ($i = 1, 2$), si $z_j = \hat{z}_j$ ($j = 3, 4$) entonces $\dot{e}_i = -k_i e_i$, $i = 1, 2$. Con esto en mente, se definen las variables deslizantes (s_i)

$$\begin{cases} s_1 = z_3 - \bar{z}_3 = \sigma_2 + \hat{\theta}_2 \left(\frac{M z_3 - z_2}{\alpha L_r M} \right) \\ s_2 = z_4 - \bar{z}_4 = \sigma_1 - \frac{\hat{\theta}_1}{\mu J z_2} \end{cases}\quad (30)$$

Derivando (30) en el tiempo, a partir de los resultados de (10), (15) y (17). Se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= \dot{\sigma}_2 + \left(\frac{M z_3 - z_2}{\alpha L_r M} \right) \dot{\hat{\theta}}_2 + \left(\frac{M \dot{z}_3 - \dot{z}_2}{\alpha L_r M} \right) \hat{\theta}_2 \\ &= f_{\sigma_2} + \left(\frac{M z_3 - z_2}{\alpha L_r M} \right) \dot{\hat{\theta}}_2 + \underbrace{\left[\frac{-\gamma z_3 + \alpha \beta z_2 + n_p z_1 z_4 + \alpha M \frac{z_4^2}{z_2} + \frac{z_2 - M z_3}{L_r M}}{\alpha L_r} \right]}_{f_{s_1}} \hat{\theta}_2 + \\ &\quad + \underbrace{\left(g_{\sigma_{22}} + \left\{ \frac{1}{\alpha L_r} \left[\frac{M z_4^2}{L_r z_2} + \frac{M(z_2 - M z_3)}{\sigma L_s L_r^2} \right] - \frac{M z_3 - z_2}{\alpha L_r^2 M} \right\} \hat{\theta}_2 \right)}_{\Delta_{s_1} = g_{s_{12}} \theta_2} \theta_2 + \frac{1}{\sigma L_s} \left(1 + \frac{\hat{\theta}_2}{\alpha L_r} \right) v_1 \\ &= f_{s_1} + \Delta_{s_1} + \frac{1}{\sigma L_s} \left(1 + \frac{\hat{\theta}_2}{\alpha L_r} \right) v_1\end{aligned}\quad (31)$$

$$\begin{aligned}\dot{s}_2 &= \dot{\sigma}_1 - \left(\frac{1}{\mu J z_2} \right) \dot{\hat{\theta}}_1 + \left(\frac{\dot{z}_2}{\mu J z_2^2} \right) \hat{\theta}_1 \\ &= f_{\sigma_1} - \left(\frac{1}{\mu J z_2} \right) \dot{\hat{\theta}}_1 + \underbrace{\left[\frac{\alpha(M z_3 - z_2)}{\mu J z_2^2} \right]}_{f_{s_2}} \hat{\theta}_1 + \underbrace{\left(g_{\sigma_{11}} \theta_1 + \left(g_{\sigma_{12}} + \frac{M z_3 - z_2}{\mu J L_r z_2^2} \right) \theta_2 + \frac{1}{\sigma L_s} v_2 \right)}_{\Delta_{s_2} = g_{s_{21}} \theta_1 + g_{s_{22}} \theta_2} \\ &= f_{s_2} + \Delta_{s_2} + \frac{1}{\sigma L_s} v_2\end{aligned}\quad (32)$$

Las ecuaciones (31) y (32) se pueden representar matricialmente como

$$\begin{aligned}\dot{s} &= f_s + G_s \theta + \hat{G}_a v = f_s + \Delta_s + \hat{G}_a v, \quad \text{donde} \quad \hat{G}_a = \frac{1}{\sigma L_s} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\hat{\theta}_2}{\alpha L_r} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ f_s &= [f_{s_1} \quad f_{s_2}]^T, \quad \Delta_s = [\Delta_{s_1} \quad \Delta_{s_2}]^T, \quad \text{con} \quad s = [s_1 \quad s_2]^T\end{aligned}\quad (33)$$

Cotas para Δ_{s_i} :

$$\begin{aligned} |\Delta_{s_1}| &= |g_{s_{12}}\theta_2| \leq |g_{s_{12}}||\theta_2| \leq |g_{s_{12}}||\theta_2|_{\max} = \rho_{s_1} \\ |\Delta_{s_2}| &= |g_{s_{21}}\theta_1 + g_{s_{22}}\theta_2| \leq |g_{s_{21}}||\theta_1| + |g_{s_{22}}||\theta_2| \leq |g_{s_{21}}||\theta_1|_{\max} + |g_{s_{22}}||\theta_2|_{\max} = \rho_{s_2} \end{aligned} \quad (34)$$

Suponiendo nuevamente una especie de proceso quasi-estático donde ω_r y ψ_{dr} no son considerados en la dinámica del error definido en (11). A partir de (30) se tiene que: $z_3 = s_1 + \bar{z}_3$ y $z_4 = s_2 + \bar{z}_4$, donde \bar{z}_3 y \bar{z}_4 son los definidos por la ecuación (29). Ahora, reescribiendo la dinámica del error derivada en (12):

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \mu z_2(s_2 + \bar{z}_4) - \frac{T_{LN}}{J} - \frac{\theta_1}{J} = -k_1 e_1 - \frac{1}{J}(\theta_1 - \hat{\theta}_1) + \mu z_2 s_2 \\ \dot{e}_2 = -\alpha z_2 + \alpha M(s_1 + \bar{z}_3) + \left(\frac{M z_3 - z_2}{L_r}\right)\theta_2 = -k_2 e_2 + \left(\frac{M z_3 - z_2}{L_r}\right)(\theta_2 - \hat{\theta}_2) + \alpha M s_1 \end{cases} \quad (35)$$

Definiendo: $e = [e_1 \quad e_2]^T$, $\tilde{\theta} = [\theta_1 - \hat{\theta}_1 \quad \theta_2 - \hat{\theta}_2]^T$, se reescribe (35) de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ae + W\tilde{\theta} + Ds \quad , \quad \text{donde } A = \text{diag}(-k_1, -k_2), \quad W = \text{diag}\left(-\frac{1}{J}, \frac{M z_3 - z_2}{L_r}\right) \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & \mu z_2 \\ \alpha M & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

Para el diseño del controlador se estudia la estabilidad del punto de equilibrio $(e, \tilde{\theta}, s) = 0$ de la ecuación (36) con la función de Lyapunov,

$$V = \frac{1}{2}e^T P e + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \frac{1}{2}s^T s \quad (37)$$

Con $P = P^T > 0$ y $\Gamma = \Gamma^T > 0$ invertible.

Calculando la derivada de V sobre las trayectorias de (36).

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2}\dot{e}^T P e + \frac{1}{2}e^T P \dot{e} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\theta}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} + \frac{1}{2}\dot{s}^T s + \frac{1}{2}s^T \dot{s} \\ &= \frac{1}{2}(Ae + W\tilde{\theta} + Ds)^T P e + \frac{1}{2}e^T P (Ae + W\tilde{\theta} + Ds) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\theta}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} + \frac{1}{2}\dot{s}^T s + \frac{1}{2}s^T \dot{s} \\ &= \frac{1}{2}e^T (AP + PA)e + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T (WPe + \Gamma^{-1}\dot{\tilde{\theta}}) + \\ &\quad + \frac{1}{2}e^T PW\tilde{\theta} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\theta}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \\ &\quad + s^T D^T P e + s^T \dot{s} \end{aligned} \quad (38)$$

Recordar que las matrices A , W , P , Γ son matrices simétricas.

Entonces, diseñado P tal que⁸

$$AP + PA = -Q \quad , \quad Q > 0 \quad (39)$$

⁸Es fácil notar que: $\begin{bmatrix} 2k_1 p_{11} & (k_1 + k_2)p_{12} \\ (k_1 + k_2)p_{12} & 2k_2 p_{22} \end{bmatrix} = Q > 0$, entonces se tienen las siguientes condiciones para el diseño de P : $p_{11} > 0$, $p_{11}p_{22}/p_{12}^2 > \frac{(k_1+k_2)^2}{4k_1k_2} > 0$.

Usando la siguiente ley de actualización de los parámetros⁹:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} = -\Gamma W^T P e \quad (40)$$

Y el control no lineal¹⁰,

$$\begin{cases} v = \hat{v}_{\text{eq}} + \hat{G}_a^{-1} w \\ \hat{v}_{\text{eq}} = -\hat{G}_a^{-1} f_s, \quad w = -D^T P e + w_s \end{cases} \quad (41)$$

A partir de (41), recordando la expresión (33) para \dot{s} se tiene que

$$s^T \dot{s} = -s^T D^T P e + s^T (\Delta_s - w_s) \quad (42)$$

Por lo tanto a partir de (39), (40) y (42) resulta

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} e^T Q e + s^T (\Delta_s - w_s) \quad (43)$$

Al igual que el resultado encontrado para el control robusto no adaptativo, a partir de la elección de w_s se acota $s^T (\Delta_s - w_s)$. Si $w_s = [w_{s_1} \quad w_{s_2}]^T$, proponiendo

$$\begin{cases} w_{s_i} = -(\rho_{s_i} + \eta_i) \text{sgn}(s_i) = -h_{s_i} \text{sgn}(s_i) \\ \eta_i > 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2 \quad (44)$$

Se tiene,

$$\begin{aligned} s^T (\Delta_s - w_s) &= s_1 (\Delta_{s_1} - w_{s_1}) + s_2 (\Delta_{s_2} - w_{s_2}) \\ &= s_1 \Delta_{s_1} + s_2 \Delta_{s_2} - (\rho_{s_1} + \eta_1) |s_1| - (\rho_{s_2} + \eta_1) |s_2| \\ &\leq \rho_{s_1} |s_1| + \rho_{s_2} |s_2| - (\rho_{s_1} + \eta_1) |s_1| - (\rho_{s_2} + \eta_1) |s_2| \\ &\leq -(\eta_1 |s_1| + \eta_2 |s_2|) \end{aligned} \quad (45)$$

Con lo que resulta \dot{V} ser semi-definida negativa y vale la siguiente desigualdad:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} e^T Q e - (\eta_1 |s_1| + \eta_2 |s_2|) \leq 0, \quad \text{para todo } e, s, \tilde{\theta} \text{ en } \mathbb{R}^2 \quad (46)$$

Como consecuencia del teorema de Lyapunov, el punto de equilibrio es estable para la señal de control

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\sigma L_s}{1 + \frac{\hat{\theta}_2}{\alpha L_r}} \left[-f_{s_1} - \alpha M (p_{12} e_1 + p_{22} e_2) - h_{s_1} \text{sgn}(s_1) \right] \\ v_2 = \sigma L_s \left[-f_{s_2} - \mu z_2 (p_{11} e_1 + p_{12} e_2) - h_{s_2} \text{sgn}(s_2) \right] \end{cases} \quad (47)$$

3.2.1 Convergencia a 0 de e , \dot{e} y s cuando t tiende a ∞

(i) $e(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ Por el teorema de Lyapunov, (46) implica que las trayectorias e , s , $\tilde{\theta}$ son estables y por ende, están acotadas en el tiempo¹¹. Por otro lado, se nota que

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} e^T Q e - (\eta_1 |s_1| + \eta_2 |s_2|) \leq -\frac{1}{2} e^T Q e \leq 0 \quad (48)$$

La desigualdad anterior se mantiene con la integración en el tiempo, por lo tanto

⁹La cual implica $\dot{\theta} = 0$.

¹⁰ $\hat{G}_a^{-1} = (\sigma L_s) \text{diag} \left(\left[1 + \frac{\hat{\theta}_2}{\alpha L_r} \right]^{-1}, 1 \right)$

¹¹ $e, s, \tilde{\theta} \in L^\infty$. Donde $f \in L^\infty$ si existe y es finito $\inf\{m \geq 0 : |f(t)| \leq m, \forall t\}$.

$$V(\infty) - V(0) \leq - \int_0^\infty e^T Q e dt \leq 0 \iff V(0) - V(\infty) \geq \int_0^\infty e^T Q e dt \geq 0 \quad (49)$$

Al ser V acotada, entonces también lo es la diferencia $V(0) - V(\infty)$, y por ende e es cuadrado integrable (tomar $Q = I$, entonces $\int_0^\infty e^2(t) dt < \infty \iff e \in L^2$). A partir de (36) se observa que $\dot{e} \in L^\infty$ por ser suma de funciones en L^∞ .

$$\begin{aligned} \|\dot{e}\|_\infty &\leq \|A\|_\infty \|e\|_\infty + \|W\|_\infty \|\tilde{\theta}\|_\infty + \|D\|_\infty \|s\|_\infty \\ &\leq \max\{k_1, k_2\} \cdot \|e\|_\infty + \max\left\{\frac{1}{J}, \frac{|Mz_3 - z_2|}{L_r}\right\} \cdot \|\tilde{\theta}\|_\infty + \max\{\mu z_2, \alpha M\} \cdot \|s\|_\infty \end{aligned} \quad (50)$$

Entonces, por el Corollary 2.9 (*Barbalat's Lemma*)¹²,

$$e \in L^2, \dot{e} \in L^\infty \text{ por el Lema de Barbalat: } e(t) \longrightarrow 0 \text{ cuando } t \longrightarrow \infty \quad (51)$$

(ii) $\dot{e}(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$ Por (36), \dot{e} es uniformemente continua. Como $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$, entonces por el Lemma 4.2¹³

$$\dot{e}(t) \longrightarrow 0 \text{ cuando } t \longrightarrow \infty \quad (52)$$

(iii) $s(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$ A partir de (46) también se tiene

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} e^T Q e - (\eta_1 |s_1| + \eta_2 |s_2|) \leq -\eta_i |s_i| \leq 0 \quad (53)$$

Integrando la anterior ecuación en el tiempo

$$V(0) - V(\infty) \geq \eta_i \int_0^\infty |s_i| dt \geq 0 \quad (54)$$

Debido a que $\dot{e}, e, s, \tilde{\theta}$ están acotadas, también lo están v_1 y v_2 . Por lo tanto, \dot{s}_i están acotadas lo que implica que s_i es uniformemente continua. Con este hecho en conjunto con (54), aplicando el Lemma 2.12¹⁴ se muestra que s_i tiende a cero cuando t tiende a ∞ .

(iv) $\tilde{\theta}_1(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$ Debido a que \dot{e}, e, s tienden a cero, (36) implica que $W\tilde{\theta}$ tiende a cero. Por lo tanto,

$$M\tilde{\theta} = \begin{bmatrix} -\frac{\tilde{\theta}_1}{J} \\ \frac{Mz_3 - z_2}{L_r} \tilde{\theta}_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \iff \begin{cases} \tilde{\theta}_1 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \\ \left(\frac{Mz_3 - z_2}{L_r}\right) \tilde{\theta}_2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \end{cases} \quad (55)$$

Por lo tanto $\tilde{\theta}_1(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$. Por otro lado, (55) no garantiza por si sola que también $\tilde{\theta}_2(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Recordar que el objetivo de hacer converger al error $e(t)$ a cero se estaría logrando de todas maneras.

¹²Ver enunciado en anexo.

¹³Ver enunciado en anexo.

¹⁴Ver enunciado en anexo.

Observación 3 Se debe notar que la ley de control, v_1 , presenta una singularidad en $\hat{\theta}_2 = -\alpha L_r$. Para evitar esto, una alternativa se encuentra en la técnica conocida como *parameter projection*. Conocidas las cotas de θ_2 (algo que se asume en el artículo), se intenta, modificando la ley de actualización de parámetros mantener $\hat{\theta}_2$ dentro de los límites de θ_2 . Suponiendo que $\theta_2 \in [\theta_2^-, \theta_2^+]$, la ley de actualización de parámetros debe ser

$$\dot{\hat{\theta}} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \hat{\theta}_2 = \theta_2^-, \dot{\hat{\theta}}_2 < 0 \text{ o } \hat{\theta}_2 = \theta_2^+, \dot{\hat{\theta}}_2 > 0 \\ -\dot{\hat{\theta}} = \Gamma W P e, & \text{ en otro caso} \end{cases} \quad (56)$$

Lo que intenta esta nueva ley es frenar a $\hat{\theta}_2$ cuando se intenta escapar de los límites de θ_2 .

3.2.2 Simulaciones

Con los datos del motor resumidos en la tabla [1] y fijando $Q = I$, $\Gamma = \text{diag}(10, 10)$, en el artículo de Kwan se obtienen los siguientes resultados en la simulación.

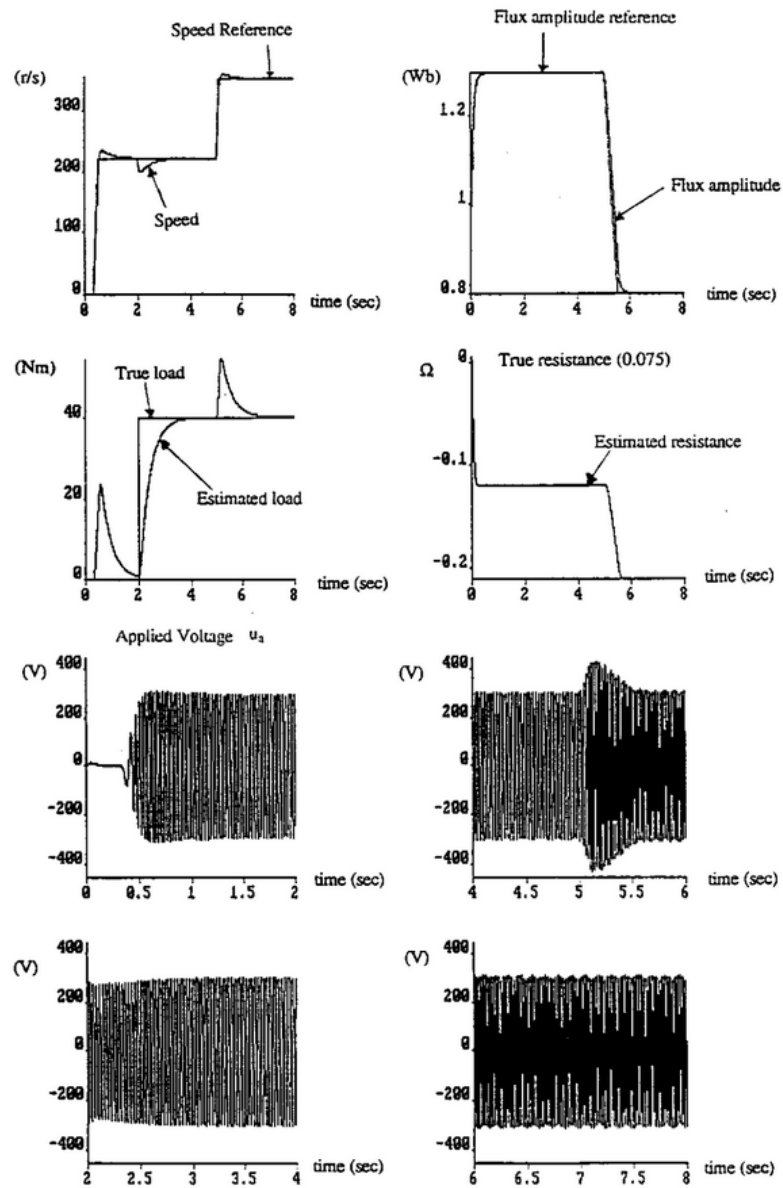


Figure 7: Desempeño de la aplicación del controlador adaptativo. Extraído de C.-M. Kwan, 1997, *Robust adaptive control of induction motors*.

4 Conclusiones

En el documento se derivan dos métodos de control a partir de la idea detrás del control con variables deslizantes (*sliding control*). Uno de ellos a partir del supuesto de poder estimar las incertidumbres en tiempo real para poder llevar al sistema al estado deseado de referencia. Para la aplicación práctica del modelo, se debe ser capaz de acceder y medir el estado del sistema, en especial medir las amplitudes de los flujos magnéticos rotóricos.

5 Preguntas

Un par de preguntas sobre la resolución propuesta en éste trabajo final surgen. La primera de ellas es sobre z_5 que resulta no acotada, en especial $|z_5| > \pi/2$. ¿Dónde resulta válido el cambio de variable? Recordar que,

$$z_5 = \tan^{-1} \left(\frac{x_3}{x_2} \right) \quad (57)$$

Otra inquietud o más bien una observación, es cómo resulta la dinámica del error en el caso del control no adaptativo (en el adaptativo tampoco se considera la derivada de las trayectorias de referencia).

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} \mu z_2 & 0 \\ 0 & \alpha M \end{bmatrix} \sigma + \begin{bmatrix} -\frac{1}{J} & 0 \\ 0 & \frac{M z_3 - z_2}{L_r} \end{bmatrix} \theta - \begin{bmatrix} \dot{\psi}_{d_r} \\ \dot{\psi}_{d_r} \end{bmatrix} \quad (58)$$

En régimen (observar figura 14), los estados z_2 y z_3 “resultan” estacionarios en valores constantes. Además se prueba que con el controlador diseñado $\sigma \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ (control con no linealidad discontinua $\text{sgn}(\cdot)$), en el peor caso $\sigma_i \leq \delta_i = 0.1$ (al usar la no linealidad continua $\text{sat}(\cdot)$). Si las derivadas de las trayectorias de referencia también se estacionan en valores constantes, así como para un supuesto θ constante en régimen, se tiene que¹⁵

$$0 = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} e_\infty + \begin{bmatrix} \mu z_{2_\infty} & 0 \\ 0 & \alpha M \end{bmatrix} \sigma_\infty + \begin{bmatrix} -\frac{1}{J} & 0 \\ 0 & \frac{M z_{3_\infty} - z_{2_\infty}}{L_r} \end{bmatrix} \theta_\infty - \begin{bmatrix} \dot{\psi}_{d_r} \\ \dot{\psi}_{d_r} \end{bmatrix}_\infty \quad (59)$$

$$\begin{aligned} e_\infty &= \begin{bmatrix} -k_1^{-1} & 0 \\ 0 & -k_2^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mu z_{2_\infty} & 0 \\ 0 & \alpha M \end{bmatrix} \sigma_\infty + \begin{bmatrix} -\frac{1}{J} & 0 \\ 0 & \frac{M z_{3_\infty} - z_{2_\infty}}{L_r} \end{bmatrix} \theta_\infty - \begin{bmatrix} \dot{\psi}_{d_r} \\ \dot{\psi}_{d_r} \end{bmatrix}_\infty \right) \\ &\preceq \begin{bmatrix} -k_1^{-1} & 0 \\ 0 & -k_2^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mu z_{2_\infty} & 0 \\ 0 & \alpha M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{J} & 0 \\ 0 & \frac{M z_{3_\infty} - z_{2_\infty}}{L_r} \end{bmatrix} \theta_\infty - \begin{bmatrix} \dot{\psi}_{d_r} \\ \dot{\psi}_{d_r} \end{bmatrix}_\infty \right) \\ &\preceq \begin{bmatrix} k_1^{-1} \left(\dot{\omega}_{r_\infty} + \frac{\theta_{1_\infty}}{J} - \mu z_{2_\infty} \delta_1 \right) \\ k_2^{-1} \left(\dot{\psi}_{d_r_\infty} - \frac{M z_{3_\infty} - z_{2_\infty}}{L_r} \theta_{2_\infty} - \alpha M \delta_2 \right) \end{bmatrix} \quad (60) \end{aligned}$$

En la ecuación [46], se llega a la misma relación encontrada con la diferencia que resulta una igualdad no una desigualdad.

Cómo prueba que $\dot{e} \in L^\infty$, ya que luego no afirma que necesariamente $|M z_3 - z_2|$ es acotado. Más aún, cómo afirma \dot{e} es uniformemente continua.

¹⁵El símbolo \preceq simboliza que existe una desigualdad coordenada a coordenada del tipo \leq .

6 Apéndice

6.0.1 Nomenclatura

R_s : resistencia del estator

R_r : resistencia del rotor

i_s : corriente por el estator

ψ_s : flujo por el estator

i_r : corriente por el rotor

ψ_r : flujo por el rotor

ψ_d : magnitud del flujo compartido del rotor

u : tensión de entrada

ω : frecuencia angular

ρ : ángulo entre los flujos ψ_a y ψ_b en el rotor

n_p : número de pares de polos

L_s : inductancia del estator

L_r : inductancia del rotor

M : inductancia mutua

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}$$

J : inercia del rotor

T_L : torque ejercido por la carga conectada

$(\cdot)_d, (\cdot)_q$: (\cdot) en el marco de referencia (d, q)

$(\cdot)_a, (\cdot)_b$: (\cdot) en el marco de referencia (a, b)

$\sigma_1, \sigma_2, s_1, s_2$: variables deslizantes (*sliding variables*)

$(\cdot)_N$: valor nominal de (\cdot)

$(\cdot)_r$: trayectoria de referencia de (\cdot)

$\hat{(\cdot)}$: estimativo de (\cdot)

Se utilizan también las siguientes definiciones de parámetros:

$$\alpha = \frac{R_r N}{L_r}$$

$$\beta = \frac{M}{\sigma L_s L_r}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sigma L_s} \left[R_s + R_r N \left(\frac{M}{L_r} \right)^2 + \right]$$

$$\mu = \frac{n_p M}{J L_r}$$

6.1 Transformación $T : (a, b) \longrightarrow (d, q)$ y el modelo equivalente (*field oriented*)

A partir de la dinámica de \dot{x} y de la transformación $z = T(x)$:

\dot{z}_1 :

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 = \mu(x_2x_5 - x_3x_4) - \frac{T_{LN}}{J} - \frac{1}{J}\theta_1 = \mu z_2 z_4 - \frac{T_{LN}}{J} - \frac{1}{J}\theta_1 \quad (61)$$

\dot{z}_2 :

$$\dot{z}_2 = \frac{d}{dt} \sqrt{x_2^2 + x_3^2} = \frac{x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3}{z_2} = -\alpha z_2 + \alpha M z_3 + \left(\frac{M z_3 - z_2}{L_r} \right) \theta_2 \quad (62)$$

$$\begin{cases} (1) & x_2\dot{x}_2 = -\alpha x_2^2 - n_p x_1 x_2 x_3 + \alpha M x_2 x_4 + \frac{M x_2 x_4 - x_2^2}{L_r} \theta_2 \\ (2) & x_3\dot{x}_3 = -\alpha x_3^2 + n_p x_1 x_2 x_3 + \alpha M x_3 x_5 + \frac{M x_3 x_5 - x_3^2}{L_r} \theta_2 \\ \sum_{1,2} & = -\alpha (x_2^2 + x_3^2) + \alpha M (x_2 x_4 + x_3 x_5) + \left[\frac{M(x_2 x_4 + x_3 x_5) - (x_2^2 + x_3^2)}{L_r} \right] \theta_2 \end{cases} \quad (63)$$

\dot{z}_3 :

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{x_2 x_4 + x_3 x_5}{z_2} \right) = \frac{\frac{d}{dt} (x_2 x_4 + x_3 x_5)}{z_2} - \left(\frac{x_2 x_4 + x_3 x_5}{z_2} \right) \frac{\dot{z}_2}{z_2} \\ &= \frac{\dot{x}_2 x_4 + x_2 \dot{x}_4 + \dot{x}_3 x_5 + x_3 \dot{x}_5}{z_2} - z_3 \frac{\dot{z}_2}{z_2} \\ &= -\gamma z_3 + \alpha \beta z_2 + n_p z_1 z_4 + \alpha M \frac{z_4^2}{z_2} + \frac{1}{\sigma L_s} v_1 + \left[\frac{M z_4^2}{L_r z_2} + \frac{M(z_2 - M z_3)}{\sigma L_s L_r^2} \right] \theta_2 \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{cases} (1) & \dot{x}_2 x_4 = -\alpha x_2 x_4 - n_p x_1 x_3 x_4 + \alpha M x_4^2 + \frac{M x_4^2 - x_2 x_4}{L_r} \theta_2 \\ (2) & \dot{x}_3 x_5 = -\alpha x_3 x_5 + n_p x_1 x_2 x_5 + \alpha M x_5^2 + \frac{M x_5^2 - x_3 x_5}{L_r} \theta_2 \\ (3) & x_2 \dot{x}_4 = \alpha \beta x_2^2 + n_p \beta x_1 x_2 x_3 - \gamma x_2 x_4 + \frac{1}{\sigma L_s} x_2 u_1 + \frac{M(x_2^2 - M x_2 x_4)}{\sigma L_s L_r^2} \theta_2 \\ (4) & x_3 \dot{x}_5 = \alpha \beta x_3^2 + n_p \beta x_1 x_2 x_5 - \gamma x_3 x_5 + \frac{1}{\sigma L_s} x_3 u_2 + \frac{M(x_3^2 - M x_3 x_5)}{\sigma L_s L_r^2} \theta_2 \\ \sum_{1,2,3,4} & = \alpha \beta (x_2^2 + x_3^2) - \alpha (x_2 x_4 + x_3 x_5) + n_p x_1 (x_2 x_5 - x_3 x_4) + \alpha M (x_4^2 + x_5^2) - \gamma (x_2 x_4 + x_3 x_5) + \\ & \quad + \frac{1}{\sigma L_s} (x_2 u_1 + x_3 u_2) + \left\{ \frac{M(x_4^2 + x_5^2) - (x_2 x_4 + x_3 x_5)}{L_r} + \frac{M[x_2^2 + x_3^2 - M(x_2 x_4 + x_3 x_5)]}{\sigma L_s L_r^2} \right\} \theta_2 \\ z_3 \frac{\dot{z}_2}{z_2} &= -\alpha z_3 + \frac{\alpha M z_3^2}{z_2} + \frac{M z_3^2 - z_2 z_3}{L_r z_2} \theta_2 \end{cases} \quad (65)$$

\dot{z}_4 :

$$\begin{aligned}
\dot{z}_4 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{x_2 x_5 - x_3 x_4}{z_2} \right) = \frac{\frac{d}{dt} (x_2 x_5 - x_3 x_4)}{z_2} - \left(\frac{x_2 x_5 - x_3 x_4}{z_2} \right) \frac{\dot{z}_2}{z_2} \\
&= \frac{\dot{x}_2 x_5 + x_2 \dot{x}_5 - (\dot{x}_3 x_4 + x_3 \dot{x}_4)}{z_2} - z_4 \frac{\dot{z}_2}{z_2} = \frac{\dot{x}_2 x_5 - \dot{x}_3 x_4 + x_2 \dot{x}_5 - x_3 \dot{x}_4}{z_2} - z_4 \frac{\dot{z}_2}{z_2} \\
&= -\gamma z_4 - n_p \beta z_1 z_2 - n_p z_1 z_3 - \alpha M \frac{z_3 z_4}{z_2} + \frac{1}{\sigma L_s} v_2 + \left[-\frac{M^2 z_4}{\sigma L_s L_r^2} - \frac{M z_3 z_4}{L_r z_2} \right] \theta_2
\end{aligned} \tag{66}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
(1) \quad \dot{x}_2 x_5 = -\alpha x_2 x_5 - n_p x_1 x_3 x_5 + \alpha M x_4 x_5 + \frac{M x_4 x_5 - x_2 x_5}{L_r} \theta_2 \\
(2) \quad \dot{x}_3 x_4 = -\alpha x_3 x_4 + n_p x_1 x_2 x_4 + \alpha M x_4 x_5 + \frac{M x_4 x_5 - x_3 x_4}{L_r} \theta_2 \\
(3) \quad x_2 \dot{x}_5 = \alpha \beta x_2 x_3 - n_p \beta x_1 x_2^2 - \gamma x_2 x_5 + \frac{1}{\sigma L_s} x_2 u_2 + \frac{M(x_2 x_3 - M x_2 x_5)}{\sigma L_s L_r^2} \theta_2 \\
(4) \quad x_3 \dot{x}_4 = \alpha \beta x_2 x_3 + n_p \beta x_1 x_3^2 - \gamma x_3 x_4 + \frac{1}{\sigma L_s} x_3 u_1 + \frac{M(x_2 x_3 - M x_3 x_4)}{\sigma L_s L_r^2} \theta_2 \\
\sum_{1,2} - \sum_{3,4} = -\alpha(x_2 x_5 - x_3 x_4) - n_p x_1(x_2 x_4 + x_3 x_5) - n_p \beta x_1(x_2^2 + x_3^2) - \gamma(x_2 x_5 - x_3 x_4) + \\
\quad + \frac{1}{\sigma L_s}(x_2 u_2 - x_3 u_1) + \left[-\frac{x_2 x_5 - x_3 x_4}{L_r} - \frac{M^2(x_2 x_5 - x_3 x_4)}{\sigma L_s L_r^2} \right] \theta_2 \\
z_4 \frac{\dot{z}_2}{z_2} = -\alpha z_4 + \frac{\alpha M z_3 z_4}{z_2} + \frac{M z_3 z_4 - z_2 z_4}{L_r z_2} \theta_2
\end{array} \right. \tag{67}$$

\dot{z}_5 :

$$\tan z_5 = \frac{x_3}{x_2} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
\implies \frac{\dot{z}_5}{\cos^2 z_5} &= \frac{\dot{x}_3 x_2 - x_3 \dot{x}_2}{x_2^2} \\
\implies \dot{z}_5 &= \frac{\dot{x}_3 x_2 - x_3 \dot{x}_2}{z_2^2}
\end{aligned} \tag{69}$$

$$= n_p z_1 + \alpha M \frac{z_4}{z_2} + \frac{M z_4}{L_r z_2} \theta_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
(1) \quad \dot{x}_3 x_2 = -\alpha x_2 x_3 + n_p x_1 x_2^2 + \alpha M x_2 x_5 + \frac{M x_2 x_5 - x_2 x_3}{L_r} \theta_2 \\
(2) \quad x_3 \dot{x}_2 = -\alpha x_2 x_3 - n_p x_1 x_3^2 + \alpha M x_3 x_4 + \frac{M x_3 x_4 - x_2 x_3}{L_r} \theta_2 \\
(1) - (2) = n_p x_1(x_2^2 + x_3^2) + \alpha M(x_2 x_5 - x_3 x_4) + \frac{M(x_2 x_5 - x_3 x_4)}{L_r} \theta_2
\end{array} \right. \tag{70}$$

6.2 Control basado en la no linealidad continua, $\text{sat}(\cdot/\delta)$

Basado en la no linealidad continua,

$$\text{sat}\left(\frac{\sigma_i}{\delta_i}\right) = \begin{cases} \sigma_i/\delta_i, & |\sigma_i| < \delta_i \\ \text{sgn}(\sigma_i), & |\sigma_i| \geq \delta_i \end{cases} \quad (71)$$

Que intenta aproximar,

$$\text{sgn}(\sigma_i) = \begin{cases} -1, & \sigma_i < 0 \\ 1, & \sigma_i > 0 \end{cases} \quad (72)$$

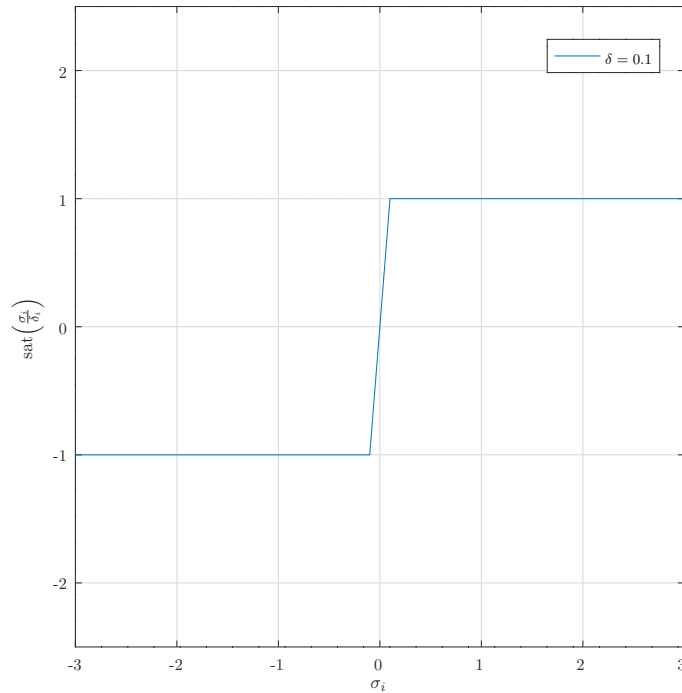


Figure 8: Aproximación continua de la función $\text{sgn}(\sigma_i)$ con la función $\text{sat}(10\sigma_i)$.

A partir de la aproximación planteada por el gráfico de la figura (8), se obtienen los siguientes resultados para las mismas simulaciones que se muestran en las figuras [3] a [6].

6.2.1 Simulación: $t = 0$ s a $t = 10$ s

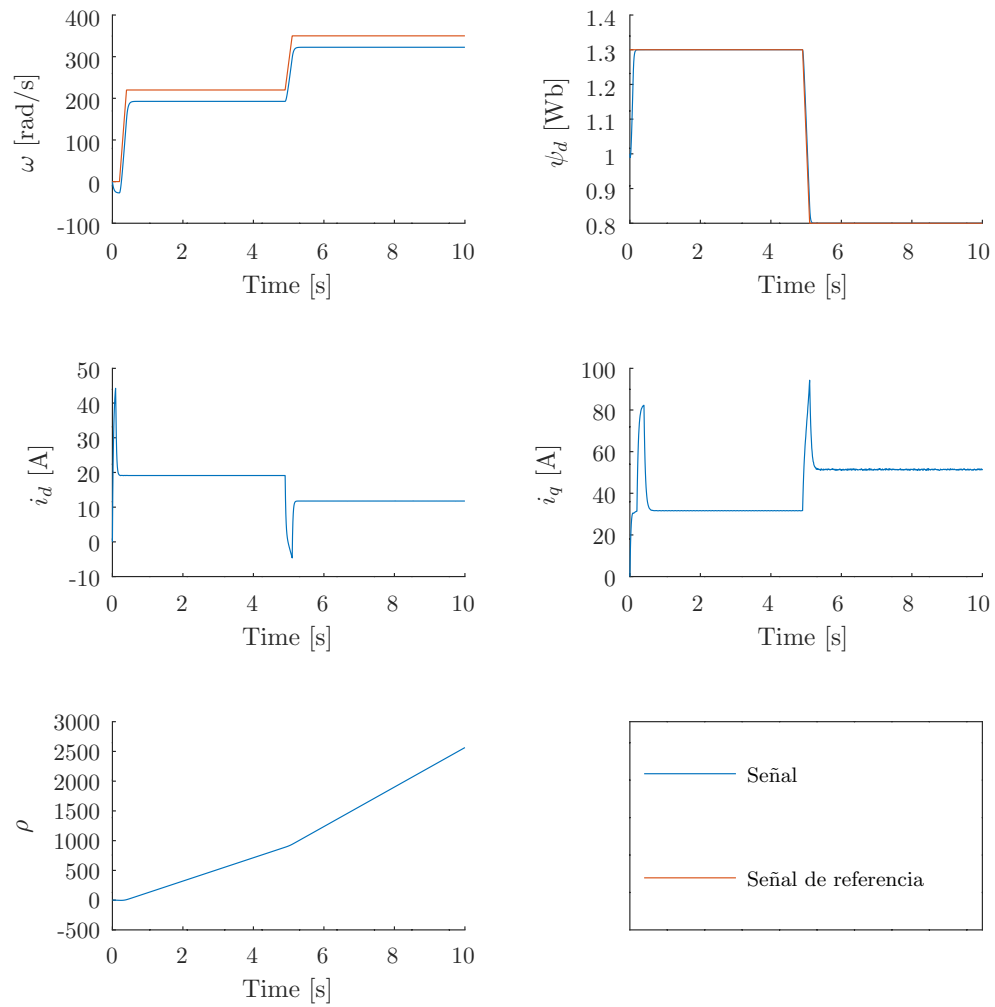
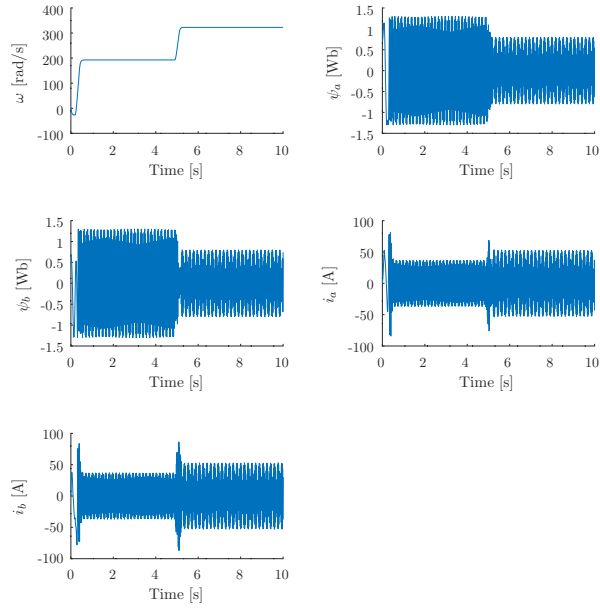
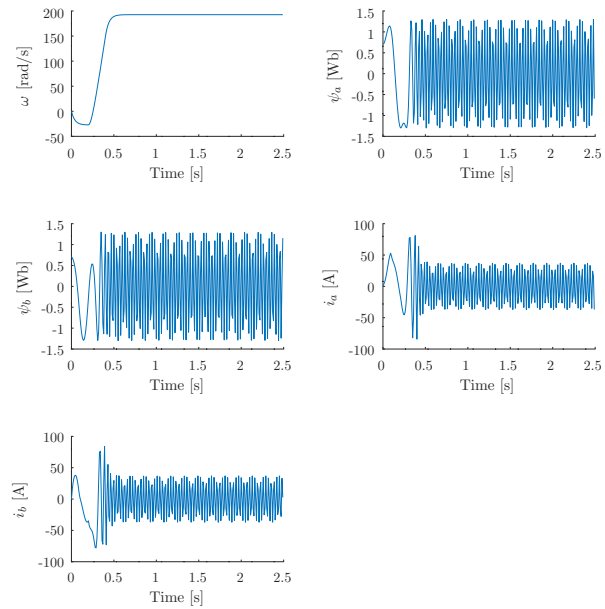


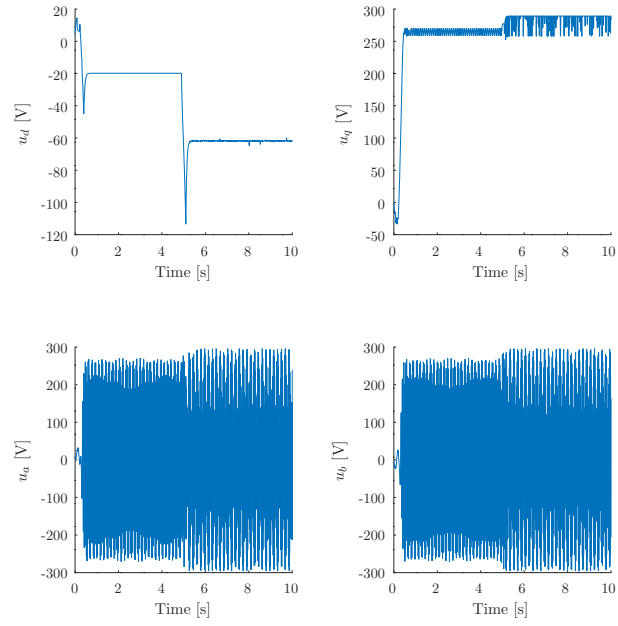
Figure 9: Resultado de la simulación del sistema controlado en las variables del modelo *field-oriented*.



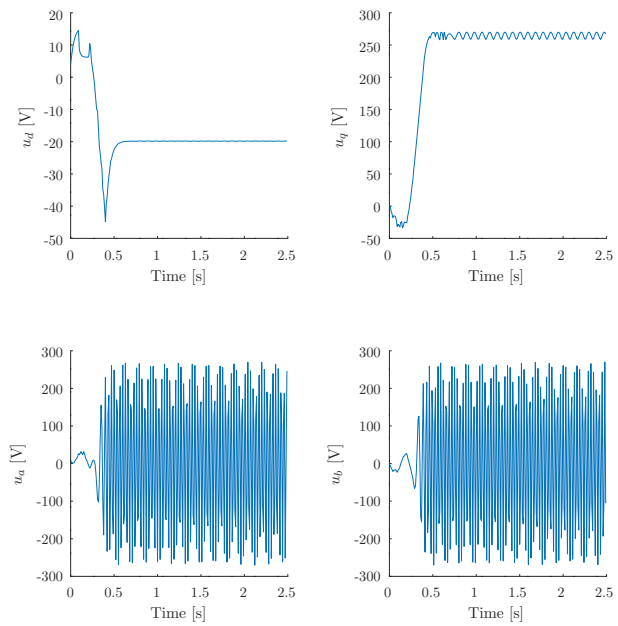
(a) Resultado de la simulación del sistema controlado.



(b) Primeros segundos del resultado que observamos en la figura (a).



(a) Señales de control en ambos referenciales.



(b) Primeros segundos del resultado que observamos en la figura (a).

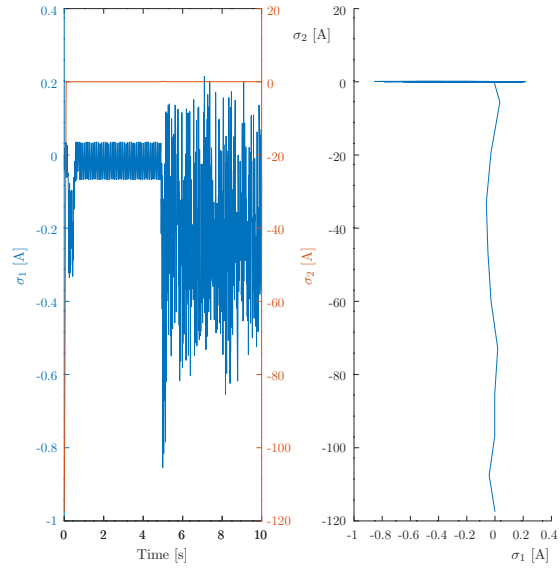


Figure 12: Dinámica de las variables deslizantes σ_1, σ_2 .

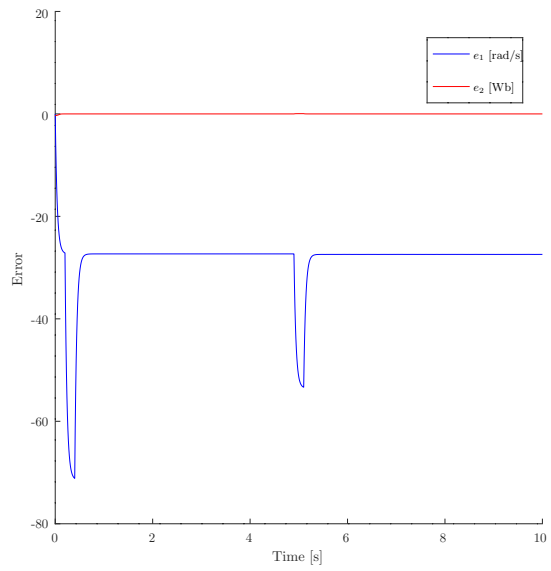


Figure 13: Dinámica del error.

6.2.2 Simulación: $t = 0$ s a $t = 100$ s

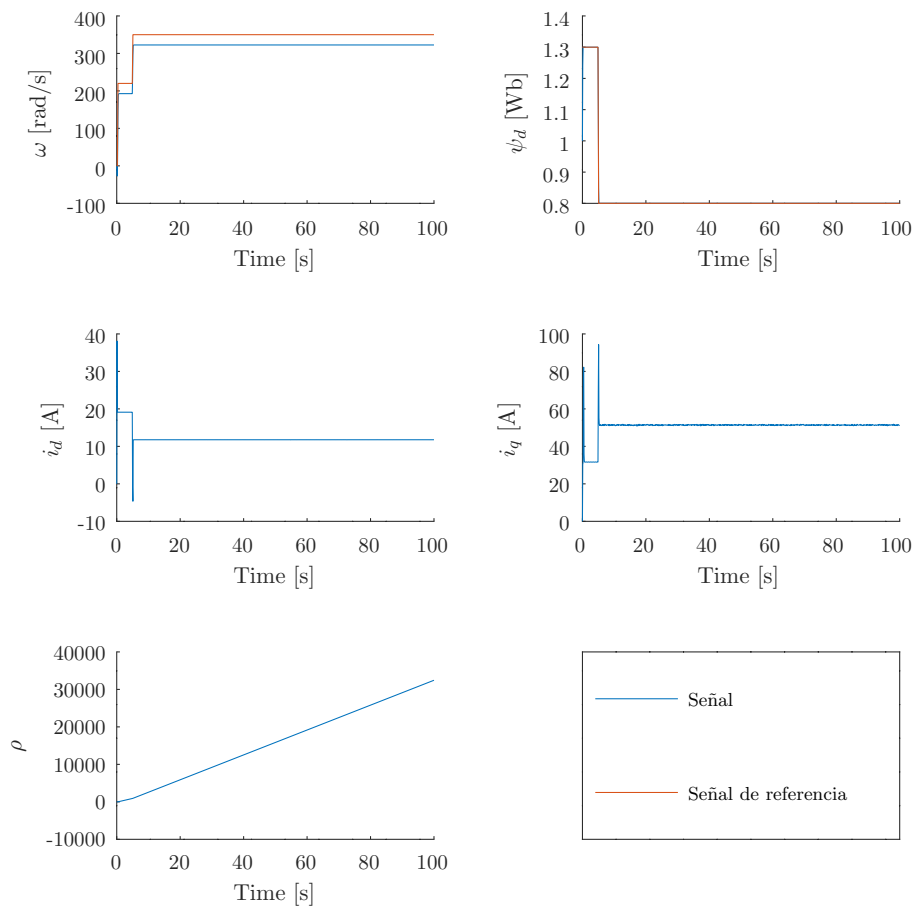
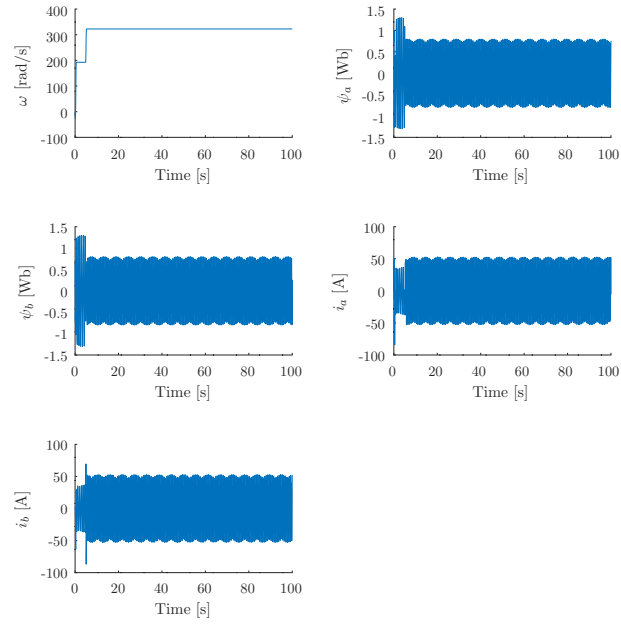
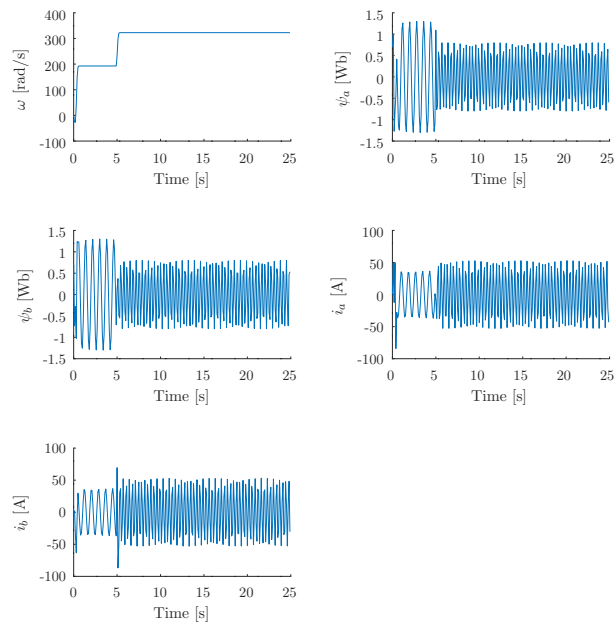


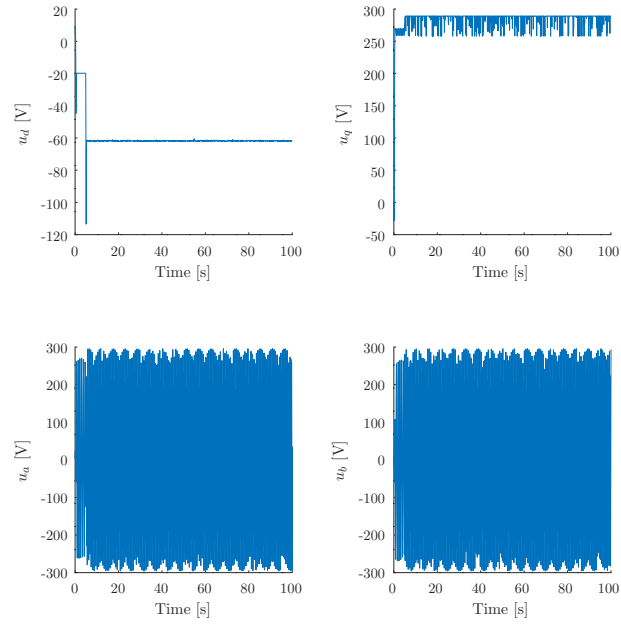
Figure 14: Resultado de la simulación del sistema controlado en las variables del modelo *field-oriented*.



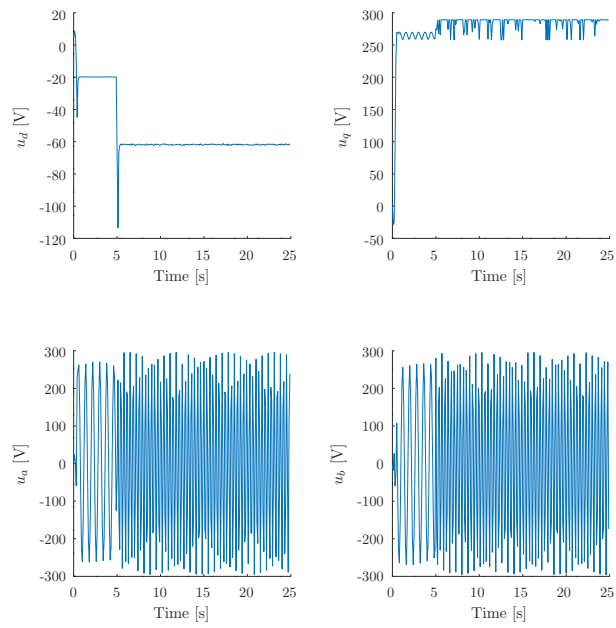
(a) Resultado de la simulación del sistema controlado.



(b) Primeros segundos del resultado que observamos en la figura (a).



(a) Señales de control en ambos referenciales.



(b) Primeros segundos del resultado que observamos en la figura (a).

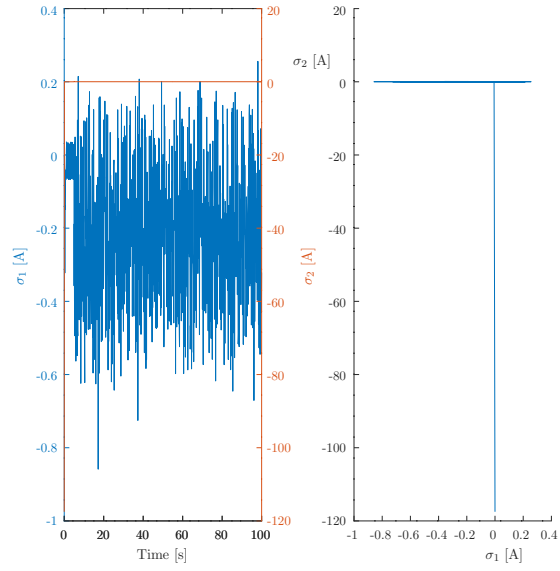


Figure 17: Dinámica de las variables deslizantes σ_1, σ_2 .

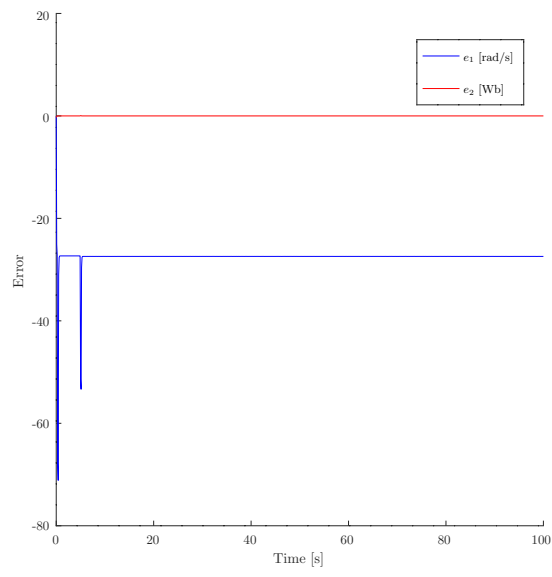


Figure 18: Dinámica del error.

7 Teoremas, lemas y colorarios

Theorem 1 (Lyapunov stability theorem (Khalil, 1995)) *Let $x = 0$ be an equilibrium point $\dot{x} = f(x)$ and $D \subset \mathbb{R}^n$ be a domain containing $x = 0$. Let $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuously differentiable function, such that*

$$V(0) = 0 \text{ and } V(x) > 0 \text{ in } D - \{0\}, \\ \dot{V}(x) \leq 0 \text{ in } D$$

Then, $x = 0$ is stable. Moreover, if

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ in } D - \{0\}$$

then $x = 0$ is asymptotical stable.

Corollary 1.1 (Corollary 2.9 (Narendra and Annaswamy, 1989)) *If $g \in C^2 \cap L^\infty$, and is bounded, then $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$.*

Lemma 2 (Lemma 4.2, Barbalat (Slotine and Li, 1991)) *If the differentiable function f has a finite limit as $t \rightarrow \infty$, and if \dot{f} is uniformly continuous, then $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$.*

Lemma 3 (Lemma 2.12 (Narendra and Annaswamy, 1989)) *If $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ is uniformly continuous for $t \geq 0$, and if the limit of the integral*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |f(\tau)| d\tau$$

exists and is finite, then

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

8 Referencias

- 0 C.-M. Kwan, 1997, Robust adaptive control of induction motors, *International Journal of Control*, 67:4, 539-552, DOI: 10.1080/002071797224063.
- 1 Soto, R., and Yeung, K. S., 1992, Sliding-mode control of an induction motor without flux measurement. *Proceedings of the 27th Annual Meeting and Conference of the IEEE Industry Application Society*.
- 2 Marino, R., Peresada, S., and Valigi, P., 1993, Adaptive input-output linearization control of induction motor. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38, 208-221.
- 3 H. K. Khalil, 1995, *Nonlinear Systems*.
- 4 Pablo Monzón, 2021, *Tópicos de control: Lyapunov redesign*, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República Uruguay.
- 5 Pablo Monzón, 2021, *Tópicos de control: Parte 3 (“Backstepping, Sliding Control”)*, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República Uruguay.
- 6 Narendra, K. S., and Annaswamy, A. M., 1989, *Stable Adaptive Systems* (Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A.: Prentice Hall).
- 7 Slotine, J. E., and Li, W., 1991, *Applied Nonlinear Control* (Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A.: Prentice Hall)