

Monografía CNL

Alejandro Bellati

22 de julio de 2020

Resumen

En este documento se revisita un artículo que busca transformar las ecuaciones del Péndulo de Furuta en las del péndulo plano y aplicar una técnica de Energy Shaping sobre el último. Se implementa con éxito el controlador con los parámetros del artículo. Luego se ajusta el controlador para el prototipo con el que se cuenta y se compara contra un LQR tradicional. Finalmente se aplica un sliding mode controller para poder manejar el controlador desde el voltaje de un motor DC, lo cual permitió implementar el controlador experimentalmente con éxito.

1. Introducción

En este trabajo se busca visitar lo hecho en [4]. En este artículo se deriva una ley para estabilizar asintóticamente el Péndulo de Furuta, [3], en la posición invertida. La ley de control se deriva primero aplicando una entrada que lleva las ecuaciones del péndulo a las del péndulo plano¹ en un carrito más un *gyroscope force*. Luego se utiliza una técnica de energy shaping sobre el péndulo plano utilizando el método de los Lagrangianos controlados, basados fuertemente en una técnica desarrollada en [2, 1]. Finalmente los autores prueban estabilidad exponencial.

En este documento se reproducen los principales argumentos del artículo y se implementa el controlador final. Luego se ajusta el controlador para los parámetros del prototipo del péndulo con el que se cuenta y para terminar se aplica un sliding mode controller que permite probar el controlador experimentalmente.

1.1. El método de Lagrangianos controlados

El método de Lagrangianos controlados utiliza energy-shaping para estabilizar sistemas mecánicos subactuados. El método de Lagrangianos controlados provee una ley de control tal que el lazo cerrado tiene una dinámica que deriva de un Lagrangiano. El objetivo del método es elegir la ley de control para que la energía del nuevo Lagrangiano tenga una forma que sirva para probar estabilidad.

En general calcular una ley de control y una energía deseada requiere resolver ecuaciones en derivadas parciales por lo cual la técnica puede ser muy difícil de aplicar. Sin embargo, Bloch, Leonard y Mardesen construyeron, para cierto tipo de sistemas, una familia estructurada de Lagrangianos controlados para el cual el desarrollo del controlador se vuelve algorítmico.

Uno de esos tipos de sistemas son los que se presentan en [2, 1], son los sistemas que satisfacen *the simplified matching conditions*. En [2] se construye un nuevo Lagrangiano modificando solamente la energía cinética permitiendo estabilizar, por ejemplo, el péndulo plano en posición invertida pero no

¹A lo largo de todo el documento se usa indistintamente los términos *péndulo plano* y *péndulo invertido*.

teniendo control sobre la variable del carrito. En [1] se extiende la técnica modificando tanto la energía cinética como la potencial logrando estabilización en todo el espacio de estado, es decir, logrando estabilizar también la variable del carrito, siguiendo con el ejemplo del péndulo plano. Finalmente, la estabilidad asintótica se logra agregando un término disipativo.

El péndulo de Furuta no caé en los sistemas tratados por estos artículos. Sin embargo, el autor de [4] muestra que aplicando una cierta ley de control el péndulo de Furuta luce como un péndulo plano, el cual sí cumple con las hipótesis de [2, 1], pero que tiene sumado a la entrada una *gyroscope force*. A este sistema el autor le llama forma normal. Utilizando una técnica esencialmente igual a la de los artículos [2, 1] el autor prueba que se puede estabilizar asintóticamente este tipo de sistemas.

1.2. Un ejemplo esclarecedor

Para ganar intuición de la técnica desarrollo aquí un ejemplo del método de Lagrangianos controlados sobre el péndulo plano donde solo se hace *kinetic shaping*. Dicho ejemplo se encuentra en [2]. El péndulo plano en un carrito se muestra en la figura 1.

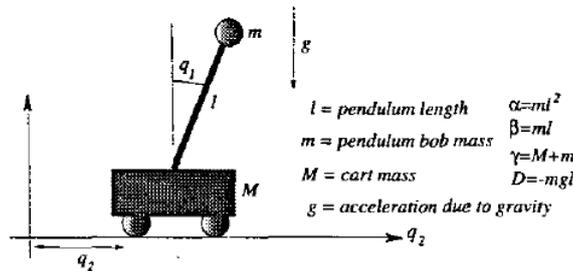


Figura 1: Péndulo plano en un carrito. Tomado de [4].

Calculando la energía cinética y la energía potencial se llega a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}_1^2 + \beta \cos q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2}\gamma\dot{q}_2^2 + D \cos q_1$$

para un lagrangiano como el mostrado se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} &= u \end{aligned}$$

en este ejemplo concreto

$$\left(\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma} \cos^2 q_1 - \beta k(q_1) \cos q_1 \right) \ddot{q}_1 + \left(\frac{\beta^2}{\gamma} \cos q_1 \sin q_1 - \beta \cos q_1 k'(q_1) \right) \dot{q}_1^2 + D \sin q_1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma \dot{q}_2 + \beta \cos q_1 \dot{q}_1) = u \quad (2)$$

Notar que la cantidad $p_{q_2} := \gamma \dot{q}_2 + \beta \cos q_1 \dot{q}_1$ es una cantidad conservada del sistema sin controlar ($u = 0$). A dicha cantidad se le llama el momento conjugado a q_2 . Ahora es necesario elegir un Lagrangiano controlado, en este caso simplemente modificamos la energía cinética, pero no de cualquier forma

$$\mathcal{L}_{k,\sigma} := \frac{1}{2} (\alpha \dot{q}_1^2 + 2\beta \cos q_1 (\dot{q}_2 + k \dot{q}_1) \dot{q}_1 + \gamma (\dot{q}_2 + k \dot{q}_1)^2) + \frac{\sigma}{2} \gamma k^2 \dot{q}_1^2 + D \cos q_1 \quad (3)$$

donde $k = k(q_1)$ y σ es una constante. La idea es elegir la función k , σ y una ley de control u tal que la dinámica del sistema realimentado provenga de $\mathcal{L}_{k,\sigma}$ sin entradas. Para buscar u se hace uso de la cantidad conservada por $\mathcal{L}_{k,\sigma}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{k,\sigma}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{d}{dt} (\gamma \dot{q}_2 + \beta \cos q_1 \dot{q}_1 + \gamma k \dot{q}_1) = 0 \quad (4)$$

dicha ecuación se puede reescribir como

$$\frac{d}{dt} p_{q_2} = -\frac{d}{dt} (\gamma k(q_1) \dot{q}_1) \quad (5)$$

comparando esta ecuación con 2 se sigue que debemos definir $u := -\frac{d}{dt} (\gamma k(q_1) \dot{q}_1)$ para que la ecuación 2 coincida. Ahora debemos elegir k y σ para que 1 coincida con $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{k,\sigma}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}_{k,\sigma}}{\partial q_1} = 0$. Haciendo las cuentas y utilizando 4 se llega a que la ecuación de q_1 para $\mathcal{L}_{k,\sigma}$ es

$$\left(\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma} \cos^2 q_1 + \sigma \gamma k^2(q_1) \right) \ddot{q}_1 + \left(\frac{\beta^2}{\gamma} \cos q_1 \sin q_1 + \sigma \gamma k(q_1) k'(q_1) \right) \dot{q}_1^2 + D \sin q_1 = 0 \quad (6)$$

comparando esta ecuación con 1 vemos que existe k y σ tal que estas ecuaciones pueden ser hechas iguales. En efecto, tomando $\sigma \gamma (k(q_1))^2 = -\beta k(q_1) \cos q_1$ se cumple lo deseado. Como σ era solo una constante se puede elegir $k(q_1) = k_0 \frac{\beta}{\gamma} \cos q_1$ con k_0 una constante ($= -\frac{1}{\sigma}$). Para derivar la ley de control utilizamos

$$u = -\frac{d}{dt} (\gamma k(q_1) \dot{q}_1) = \frac{k_0 \beta \sin q_1 (\alpha \dot{q}_1^2 + \cos q_1 D)}{\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma} (1 + k_0) \cos^2 q_1}$$

para que la señal de control tenga sentido se exige $k_0 > \frac{\alpha \gamma - \beta^2}{\beta^2}$. La señal de control valdra en un intervalito entorno a $q_1 = 0$. Si $k_0 \rightarrow \infty$ la señal de control tenderá a estar definida en $q_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$.

La ventaja de tener una Lagrangiano para la dinámica del sistema en lazo cerrado es que naturalmente tenemos una energía conservada, y además el momento conservado. La energía es clave para probar estabilidad.

Sobre la generalización El lector perfectamente podría objetar que se ha tenido suerte en la existencia de k y σ . Sin embargo, los autores en [2] generalizan el ejemplo anterior mostrando que este procedimiento se puede hacer siempre que se cumplan determinadas condiciones sobre el Lagrangiano.

El contexto de trabajo es bien general, se parte de ver las posiciones del péndulo como puntos en una variedad Q , la variedad configuración. Además se exige que el sistema cuente con cierta simetría, esto se formaliza utilizando un grupo de Lie que actúa en Q , y tal que el Lagrangiano es invariante a la acción de G . En el ejemplo del péndulo plano se puede utilizar $Q = S^1 \times \mathbb{R}$ y $G = \mathbb{R}$ el grupo de los reales bajo la suma, actuando solo en el segundo factor mediante traslaciones. El objetivo del autor se transforma en controlar las variables de Q/G (en el ejemplo es $\cong S_1$ correspondiente a q_1) usando controles que actúan directamente sobre las variables en G .

La esencia de la elección para el Lagrangiano controlado es modificar la métrica de Q , la cual define la energía cinética. Los autores descomponen el espacio tangente en dos subespacios perpendiculares. Uno de dichos subespacios es tangente a las orbitas generada por la acción del grupo G y el otro es el perpendicular. Los autores dejan intacta la métrica a lo largo de las orbitas de G y modifican solo en el subespacio perpendicular.

El autor además exige que se cumplan las *simplified matching conditions* para probar que puede lograr elegir el Lagrangiano para el lazo cerrado.

Sobre la estabilidad Finalmente, el autor da condiciones para la estabilidad de estos sistemas en lazo cerrado, usando un criterio llamado el criterio de energía-momento, utilizando la energía del lagrangiano controlado. El paper finaliza mostrando que se puede agregar un termino disipativo para

obtener estabilidad asintótica.

En el siguiente paper [1], los autores extienden la técnica modificando también la energía potencial. Esto rompe la simetría con la que viene el sistema y permite controlar además las otras variables de estado. En el ejemplo del péndulo plano esto permite además controlar la posición del carrito q_2 . Nuevamente dan criterios para estabilidad y nuevamente muestran como obtener estabilidad asintótica usando un termino disipativo.

1.3. El péndulo plano como forma normal

Para un sistema mecánico en general si denotamos por q_1^α las coordenadas para las direcciones sin acción, con α índice yendo de 1 a m y q_2^a con a yendo de 1 hasta n las coordenadas para las direcciones actuadas. El lagrangiano del sistema se puede escribir de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{q}_1^\alpha\dot{q}_1^\beta + g_{\alpha a}\dot{q}_1^\alpha\dot{q}_2^a + \frac{1}{2}g_{ab}\dot{q}_2^a\dot{q}_2^b - V$$

donde los indices repetidos implican una sumatoria en dicho indice y V es la energía potencial. Se asume que los coeficientes métricos $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha a}$ y g_{ab} son independientes de q_2^a . Las *simplified matching conditions* son

- g_{ab} constante
- $\frac{\partial g_{\alpha a}}{\partial q_1^\delta} = \frac{\partial g_{\delta a}}{\partial q_1^\alpha}$
- $\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^\alpha \partial q_2^a} g^{ad} g_{\beta d} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^\beta \partial q_2^a} g^{ad} g_{\alpha d}$

siendo (g^{ij}) la inversa de la matriz métrica. Se puede ver que los sistemas que cumplen dichas condiciones no tienen *gyroscope forces*. En particular el Furuta no cumple estas condiciones. En [2] se deriva una ley de control para dichos sistemas tal que el lagrangiano de lazo cerrado o lagrangiano controlado es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c(q_1^\alpha, q_2^a, \dot{q}_1^\beta, \dot{q}_2^b) = & \\ & \frac{1}{2} \left(g_{\alpha\beta} + \rho(\kappa + 1) \left(\kappa + \frac{\rho-1}{\rho} \right) g_{\alpha a} g^{ab} g_{b\beta} \right) \dot{q}_1^\alpha \dot{q}_1^\beta \\ & + \rho(\kappa + 1) g_{\alpha a} \dot{q}_1^\alpha \dot{q}_2^a + \frac{1}{2} \rho g_{ab} \dot{q}_2^a \dot{q}_2^b - V(q_1^\alpha, q_2^b) - V_\epsilon(q_1^\alpha, q_2^b) \end{aligned}$$

donde ρ y κ son parámetros constantes y V_ϵ satisface

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial q_2^a} + \frac{\partial V_\epsilon}{\partial q_2^a} \right) \left(\kappa + \frac{\rho-1}{\rho} \right) g^{ad} g_{\alpha d} + \frac{\partial V_\epsilon}{\partial q_1^\alpha} = 0$$

los autores dan condiciones en ρ , κ y V_ϵ para obtener estabilidad en todo el espacio de estados. En el caso de interés, donde el punto de equilibrio es un máximo de la energía potencial original se tiene que $\kappa > 0$, $\rho < 0$ y V_ϵ es tal que la energía del lagrangiano controlado, E_c tiene un máximo en el punto de equilibrio.

En [1] toman de ejemplo el péndulo plano en el carrito y siguiendo la linea de lo anterior pero agregando un termino disipativo derivan una ley de control que logra estabilidad asintótica, y en todo el espacio de estados, dada por:

$$u = \frac{\kappa\beta \sin q_1 (\alpha\dot{q}_1^2 + D \cos q_1) - \frac{B\epsilon D \gamma^2 q_2}{\beta^2} + B u^{\text{diss}}}{\alpha - \frac{\beta^2(\kappa+1) \cos^2 q_1}{\gamma}} \quad (7)$$

con $u^{\text{diss}} = c\gamma(\dot{q}_2 + p_1 \cos q_1 \dot{q}_1)$, $c > 0$ una constante y

$$B = \frac{1}{\rho} \left(\alpha - \frac{\beta^2 \cos^2 q_1}{\gamma} \right), \quad p_1 = \left(\kappa + \frac{\rho - 1}{\rho} \right) \frac{\beta}{\gamma} > 0$$

De ahora en más llamemoslé \mathcal{L}_{pp} y \mathcal{L}_{ppc} al lagrangiano del péndulo plano y del péndulo plano controlado respectivamente. Para simplificar notación, si \mathcal{L} es un lagrangiano, defino

$$\mathcal{E}_{q_i}(\mathcal{L}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

la expresión de Euler-Lagrange para la coordenada q_i con el lagrangiano \mathcal{L} .

El artículo [4] se dedica a derivar una ley de control para el péndulo de Furuta *mejorando* el control 7. Para hacer eso la idea es partir la entrada en dos $u = u_1 + u_2$, utilizar u_1 para llevar las ecuaciones del péndulo de Furuta a las del péndulo plano más un termino de *gyroscope force*, es decir, a ecuaciones de la forma:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{q_1}(\mathcal{L}_{pp}) \\ \mathcal{E}_{q_2}(\mathcal{L}_{pp}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{q_1} \\ F_{q_2} + u_2 \end{pmatrix} = S(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

donde S es *gyroscopic*, i.e, una matriz antisimétrica. Llegado este punto la idea es utilizar el controlador (7) sin el término disipativo y con alguna leve modificación para llegar a

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{q_1}(\mathcal{L}_{ppc}) \\ \mathcal{E}_{q_2}(\mathcal{L}_{ppc}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{q_1} \\ F_{q_2} \end{pmatrix} = S(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \quad (9)$$

Algo que vale la pena mencionar es que cuando se tiene una dinámica que proviene de un Lagrangiano se tiene una energía natural $E = K + V$, entonces si \mathcal{L} es un lagrangiano cualquiera y la dinámica de un cierto sistema esta dada por una ecuación de la forma 9 entonces se puede probar que $\dot{E} = \dot{\mathbf{q}}^T S(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ lo cual es 0 por ser S anti simétrica. Entonces el *gyroscope force* no afecta al cambio de energía en 9. La energía fue clave en la prueba de estabilidad en los paper [2, 1]. Como el cambio de energía no es alterado al introducir el *gyroscope force* es natural en pensar usar la energía como función de Lyapunov para probar estabilidad, de la misma forma que se hizo en [2, 1].

Lamentablemente esto no es tan directo, ya que la elección de u_2 no tiene porqué preservar el *gyroscopic term*. Al final el autor menciona que si puede llevar 8 a 9 utilizando la ley de control para el péndulo plano 7 con leves modificaciones, pero que sin embargo κ se restringe en una manera que el equilibrio no puede hacerse estable. Es por esto que el autor al final relaja el requerimiento de que la fuerza adicional sea *gyroscopic* y termina eliminando el termino F_{q_2} en (8) y llevando dicha ecuación a (9) pero con $F_{q_2} = 0$.

2. Péndulo de Furuta

2.1. Transformando el péndulo de Furuta a la forma normal

El lagrangiano del péndulo de Furuta esta dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}_1^2 + \beta' \cos q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} (\gamma' + \alpha \sin^2 q_1) \dot{q}_2^2 + D \cos q_1$$

donde los parámetros dependen de la geometría y de aspectos constructivos del péndulo. Si elegimos de entrada $u = u_1 + u_2$ entonces las ecuaciones de movimiento quedan

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta' \cos q_1 \\ \beta' \cos q_1 & \gamma' + \alpha \sin^2 q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha \sin q_1 \cos q_1 \dot{q}_2^2 \\ -\beta' \sin q_1 \dot{q}_1^2 + 2\alpha \sin q_1 \cos q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 + u_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

tomando $u_1 = 2\alpha \sin q_1 \cos q_1 \dot{q}_2 + \alpha \sin^2 q_1 \ddot{q}_2$ se obtiene

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta' \cos q_1 \\ \beta' \cos q_1 & \gamma' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta' \sin q_1 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \sin q_1 \cos q_1 \dot{q}_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

que coincide con la ecuación de movimiento de un péndulo plano pero con el término extra $F_{q_1} = \alpha \sin q_1 \cos q_1 \dot{q}_2^2$.

2.2. Ley de control y estabilización

Por el momento contamos con la *forma normal* 11. Dicha expresión se resume en

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{q_1}(\mathcal{L}_{pp}) \\ \mathcal{E}_{q_2}(\mathcal{L}_{pp}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{q_1} \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Ahora si se toma

$$u_2 = \frac{\kappa \beta' \sin q_1 (\alpha \dot{q}_1^2 + D \cos q_1) - \frac{B \epsilon D \gamma'^2 q_2}{\beta'^2}}{\alpha - \frac{\beta'^2 (\kappa + 1) \cos^2 q_1}{\gamma'}} - \frac{\kappa \beta' F_{q_1} \cos q_1}{\alpha - \frac{\beta'^2 (\kappa + 1) \cos^2 q_1}{\gamma'}}$$

donde $B = \frac{1}{\rho} \left(\alpha - \frac{\beta'^2 \cos^2 q_1}{\gamma'} \right)$, entonces 12 se transforma en

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{q_1}(\mathcal{L}_{ppc}) \\ \mathcal{E}_{q_2}(\mathcal{L}_{ppc}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{q_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Observar que con $F_{q_1} = 0$, u_2 coincide con 7 excepto por el término disipativo. El cálculo de u_2 se hizo siguiendo la misma idea que los cálculos² de 7 en [1]. Siguiendo la misma idea que en los papers anteriores se decide agregar un término más a la entrada $u = u_1 + u_2 + u^d$, un término disipativo u^d . Para calcular un u^d adecuado primero observamos que ahora se pierde 13, y en su lugar se obtiene

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{q_1}(\mathcal{L}_{ppc}) \\ \mathcal{E}_{q_2}(\mathcal{L}_{ppc}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{q_1} + p_1 \cos q_1 u^d \\ u^d \end{pmatrix} \quad (14)$$

donde $p_1 = \left(\kappa + \frac{\rho - 1}{\rho} \right) \frac{\beta'}{\gamma'} > 0$. Llamemosle E_c a la energía de \mathcal{L}_{ppc} . Recordar que $\kappa > 0$, $\rho < 0$ y $\epsilon > 0$ son elegidos tal que E_c tiene un máximo en el punto de interés. En este caso $\dot{E}_c = \dot{\mathbf{q}}^T \begin{pmatrix} F_{q_1} + p_1 \cos q_1 u^d \\ u^d \end{pmatrix} = F_{q_1} \dot{q}_1 + u^d (\dot{q}_2 + p_1 \cos q_1 \dot{q}_1)$, entonces eligiendo $u^d = c \gamma' (\dot{q}_2 + p_1 \cos q_1 \dot{q}_1)$ con $c > 0$ se obtiene

$$\dot{E}_c = \alpha \sin q_1 \cos q_1 \dot{q}_2^2 \dot{q}_1 + c \gamma' (\dot{q}_2 + p_1 \cos q_1 \dot{q}_1)^2$$

Si F_{q_1} fuese 0 entonces la derivada de la energía hubiera quedado semidefinida positiva, lo cual casi terminaría probando estabilidad y eventualmente lo haría utilizando LaSalle. La clave para ver que el u^d elegido efectivamente hace que el lazo cerrado tenga un equilibrio asintótico es notar que el término que molesta es de segundo orden. El autor termina probando estabilidad exponencial.

Prop 1. *El sistema dado por 14 y $u^d = c \gamma' (\dot{q}_2 + p_1 \cos q_1 \dot{q}_1)$ es exponencialmente estable.*

Demostración. El argumento de la prueba consiste en probar estabilidad asintótica para el sistema linealizado en torno al origen. Ahora un sistema lineal asintóticamente estable es exponencialmente estable, luego todo termina recordando que el sistema original es exponencialmente estable si y sólo si lo es el sistema linealizado. Para linealizar el sistema desarrollamos el lagrangiano \mathcal{L}_{ppc} hasta el orden 2 y luego derivamos las ecuaciones del movimiento. Además también debemos linealizar el

²El autor de [4] no da más detalles que estos.

termino de la derecha en las eqs de mov (14). Si le llamamos $\tilde{\mathcal{L}}_{ppc}$ al desarrollo de orden 2 de \mathcal{L}_{ppc} entonces

$$\tilde{\mathcal{L}}_{ppc} = \frac{1}{2}a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}a_{22}\dot{q}_2^2 - \frac{1}{2}Dq_1^2 - \frac{1}{2}p_2(q_2 + p_1q_1)^2$$

donde

$$\begin{aligned} a_{11} &= \alpha + \rho \frac{\beta^2}{\gamma'}(\kappa + 1) \left(\kappa + 1 - \frac{1}{\rho} \right) \\ a_{12} &= \rho\beta'(\kappa + 1), \quad a_{22} = \rho\gamma', \quad p_2 = \frac{\epsilon D\gamma'^2}{\beta'^2} < 0 \end{aligned}$$

y el término de la derecha de 14

$$\begin{pmatrix} F_{q_1} + p_1 \cos q_1 u^d \\ u^d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} p_1 \tilde{u}^d \\ \tilde{u}^d \end{pmatrix}$$

donde $\tilde{u}^d = c\gamma'(\dot{q}_2 + p_1\dot{q}_1)$. Si consideramos la energía correspondiente al Lagrangiano linealizado \tilde{E}_c entonces

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{E}}_c &= \dot{\mathbf{q}}^T \begin{pmatrix} p_1 \tilde{u}^d \\ \tilde{u}^d \end{pmatrix} = \tilde{u}^d(\dot{q}_2 + p_1\dot{q}_1) \\ &= c\gamma'(\dot{q}_2 + p_1\dot{q}_1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Además \tilde{E}_c es una forma cuadrática definida negativa. Esto se debe a que como señala el autor, se elige κ , ρ y V_ϵ para que la energía de \mathcal{L}_{ppc} tenga un máximo en el punto de equilibrio. Luego \tilde{E}_c es el desarrollo de orden 2 de E_c y por lo tanto es definido negativo. También se puede ver estudiando la forma cuadrática directamente.

Al tener una función \tilde{E}_c definida negativa con $\dot{\tilde{E}}_c \geq 0$ tenemos automáticamente un compacto positivamente invariante Ω cuyo interior contiene al origen. Lo único que falta para utilizar LaSalle es ver que el conjunto más grande que es invariante dentro de $\mathcal{M} := \{\mathbf{q} \in \Omega \mid \dot{\tilde{E}}_c = 0\}$. Consideremos una solución perteneciente a \mathcal{M} . Lo primero a notar es que $\tilde{u}^d = \dot{q}_2 + p_1\dot{q}_1 = 0$ en \mathcal{M} por lo tanto $q_2 + p_1q_1 = d_1$ una constante. Derivando esta ecuación obtenemos una relación entre \ddot{q}_1 y \ddot{q}_2 . Usando esta relación y las ecuaciones de movimiento de $\tilde{\mathcal{L}}_{ppc}$ se tiene

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + Dq_1 + p_1p_2d_1 = 0 \tag{15a}$$

$$a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + p_2d_1 = 0 \tag{15b}$$

$$\ddot{q}_2 + p_1\ddot{q}_1 = 0 \tag{15c}$$

Usando 15c para eliminar \ddot{q}_2 de 15a y 15b lleva a

$$\alpha\ddot{q}_1 = -Dq_1 - p_1p_2d_1 \tag{16}$$

$$\beta'\ddot{q}_1 = -p_2d_1 \tag{17}$$

ya que $\alpha = a_{11} - a_{12}p_1$ and $\beta' = a_{12} - a_{22}p_1$. Eliminando \ddot{q}_1 y usando $d_1 = q_2 + p_1q_1$ se llega a $q_1(1 + ap_1) = -aq_2$, $a = \left(\frac{p_1}{\alpha} - \frac{1}{\beta'}\right) \frac{\alpha}{D}p_2$. Supongamos que $(1 + ap_1) \neq 0$, entonces además

$$q_1 = -\frac{a}{1 + ap_1}q_2$$

entonces

$$d_1 = q_2 + p_1q_1 = \frac{1}{1 + ap_1}q_2 = \text{constant}$$

Esto implica que q_2 es constante y por lo tanto, de q_1 también, por la relación $q_2 + p_1q_1 = d$ por ejemplo. Entonces $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = 0$. De la ecuación 17 se sigue que $d_1 = 0$ y entonces de 16 se tiene $q_1 = 0$, lo cual implica $q_2 = 0$. En el caso de que $(1 + ap_1) = 0$ entonces $0 = q_1(1 + ap_1) = -aq_2$ y como a no

puede ser cero cuando $1 + ap_1 = 0$ entonces no queda otra que $q_2 = 0$ y en particular es constante, luego el resto se repite palabra por palabra, para probar que $q_1 = 0$. En resumen, en cualquiera de los casos la única solución que puede mantenerse dentro de \mathcal{M} es el punto de equilibrio mostrando que es este el conjunto invariante más grande dentro de \mathcal{M} . Por LaSalle se concluye que el sistema linealizado es asintóticamente estable, terminando la prueba. \square

En resumen el paper prueba que el péndulo de Furuta es exponencialmente estabilizado por el control dado por $u = u_1 + u_2 + u^d$. Vale observar que u_1 contiene un termino con \ddot{q}_2 . Se puede derivar la ley de control en terminos de las variables de estado ya que se conoce la dinámica de lazo cerrado (es la dada por \mathcal{L}_{ppc}). La ley de control en términos de las variables de estado queda

$$u = 2\alpha \sin q_1 \cos q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{\beta' \cos q_1} \left\{ (\gamma' + \alpha \sin^2 q_1) (F_\alpha - D \sin q_1) - \frac{|M_w|}{|M_p|} (\gamma' (F_\alpha - D \sin q_1) - \beta' (u_2 + u^d + \beta' \sin q_1 \dot{q}_1^2)) \right\} - \beta' \sin q_1 \dot{q}_1^2$$

donde $|M_w|$ es el determinante de $\begin{bmatrix} \alpha & \beta' \cos q_1 \\ \beta' \cos q_1 & \gamma' + \alpha \sin^2 q_1 \end{bmatrix}$ y $|M_p|$ es el determinante de $\begin{bmatrix} \alpha & \beta' \cos q_1 \\ \beta' \cos q_1 & \gamma' \end{bmatrix}$.

3. Simulaciones

Aquí replicó las simulaciones del paper, utilizando su modelo con sus parámetros. El modelo utilizado por el autor, reflejado en la ecuación 10, es igual al modelo del prototipo con el que se cuenta. La diferencia es que para el autor $\alpha = ml^2$, $\beta' = mlR$ y $\gamma' = (M + m)R^2$, donde m es la masa del péndulo, M es la masa del brazo, l es la longitud del pendulo y R es la longitud del brazo. Para las simulaciones el autor toma $m = 0,14 \text{ kg}$, $M = 0,44 \text{ kg}$, $l = 0,215 \text{ m}$, $R = 1 \text{ m}$ y condición inicial $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (1, 2, 1, 2)$. Respecto a los parámetros del controlador el autor dice haber tomado $\kappa = 25$, $\rho = -0,02$, $c = 0,015$ y $\epsilon = 0,00001$, sin embargo, con estos parámetros no logré replicar los resultados que el presenta. Para lograr acercarme a los resultados tuve que colocar el parámetro c 6.5 veces mayor. Haciendo esto la respuesta obtenida es prácticamente igual a la presentada en el artículo. En las figuras 2 y 3 se pueden observar los resultados de las simulaciones.

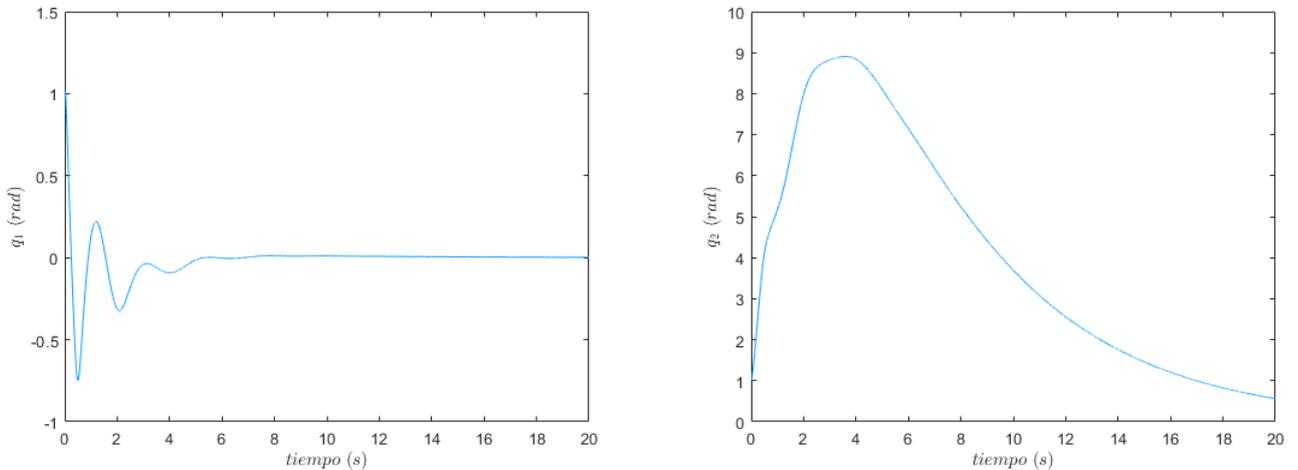


Figura 2: Resultados de la simulación del controlador del paper.

Con el κ elegido es una cuenta verificar que u_2 esta definido en $|q_1| < 1,1602 \text{ rad}$ aproximadamente. La simulación muestra que la zona de atracción es grande dentro de este dominio, tolerando una

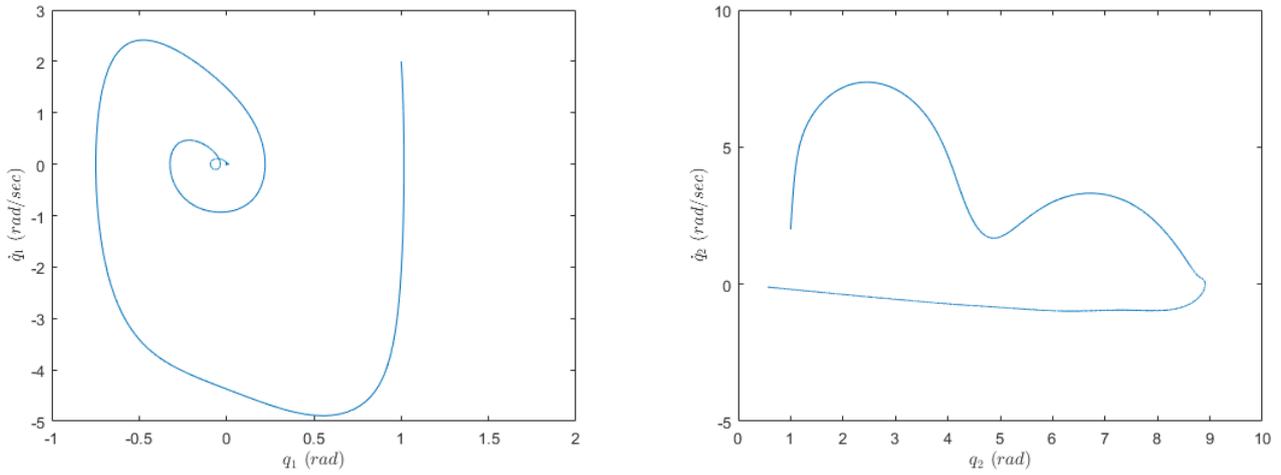


Figura 3: Resultados de la simulación del controlador del paper.

condición inicial como $(1, 2, 1, 2)$. Incluso, las simulaciones muestra que tolera condiciones iniciales más grandes, como tomar q_1 cerca de su límite!, como $q_1 = 1,1601$. Obviamente una región de este tamaño, con un controlador como el del paper es solo un gusto teórico, tomar una condición inicial tan grande lleva a una acción de control tan fuerte que no va a poder replicarse experimentalmente con un actuador normal. También vale la pena mencionar que tomando $\kappa \rightarrow \infty$ la zona de definición del controlador tiende a ser $|q_1| < \pi/2$. Colocando $\kappa = 250$ el controlador queda definido hasta los 82° . Sin embargo el aumentar κ hace que se deba volver a ajustar el controlador. Lo principal a cambiar, según simulaciones, es ϵ . Este parámetro es el que aparece por hacer potential shaping, mientras más grande sea más rápido será la atracción de q_2 a 0 y mientras más chico menor. Según simulaciones aumentar κ y mantener ϵ trae consigo oscilaciones que demoran bastante en atenuarse, por lo que si bien el controlador ha ganado zona de atracción por otro lado gana un comportamiento prácticamente inadmisibles. Disminuyendo ϵ desaparecen estas oscilaciones pero el péndulo demora más en converger, pues q_2 demora más en volver a 0. Si por el contrario se aumenta ϵ entonces el estado se acercara muy rápido al punto de equilibrio, pero debido al aumento de κ quedará oscilando en torno al punto de equilibrio y demorará en atenuarse completamente. A modo de ejemplo, tomando $\kappa = 250$, $\epsilon = 0,000005$, $c = 0,015$ y $\rho = -0,02$, se obtiene la siguiente respuesta para el péndulo, con condición inicial $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (1.41, 2, 1, 2)$

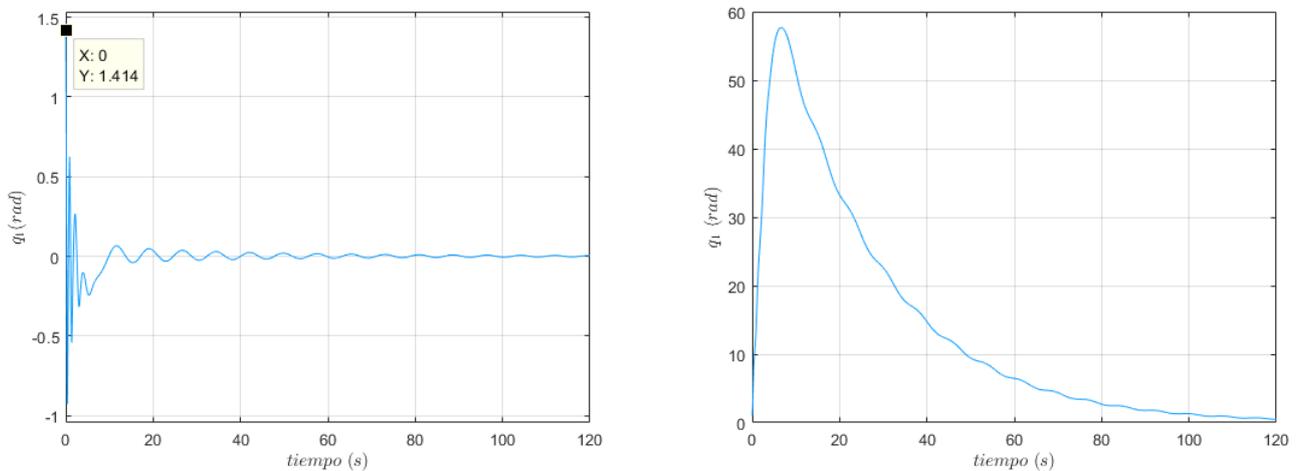


Figura 4: Resultados de la simulación del controlador del paper ajustado para q_1 hasta $80,7^\circ$. La condición inicial es $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (1.41, 2, 1, 2)$

4. Sliding Mode controller

En esta sección se pretende extender el controlador a voltaje, dejándolo listo para una prueba con el prototipo de laboratorio con el que se cuenta. El mismo se maneja desde voltaje a través de un motor DC, es por esto que es necesario llevar el controlador anterior a un controlador que tenga de entrada el voltaje del motor. El modelo para el motor DC es

$$\dot{u} = -\frac{k_m^2}{L}\dot{q}_2 - \frac{R}{L}u + \frac{k_m}{L}V_{in} \quad (18)$$

donde V_{in} es la entrada de voltaje en bornes del motor, R , L y k_m son parámetros del motor y u es el torque ejercido por el motor, que era la entrada en la sección previa. Entonces contamos con la siguiente situación

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= f(\mathbf{q}, u) \\ \dot{u} &= f_a(\mathbf{q}, u) + g_a(\mathbf{q}, u)[v + \delta(\mathbf{q}, u, v)] \end{aligned}$$

donde la primer ecuación es la dinámica del sistema de la sección previa, dada por la ecuación 10, y la segunda ecuación es la dinámica del motor más un término de incertidumbre δ . El función g_a es constante de valor $\frac{k_m}{L}$. Contamos entonces con un sistema en la forma regular. Además contamos con un controlador $u = \varphi(\mathbf{q})$ que estabiliza asintóticamente la dinámica de la primer ecuación. Si además de lo mencionado tenemos la matching condition para δ entonces estamos en las hipótesis del control deslizante. En este trabajo se decidió, por simplicidad, no estudiar δ , asumir que cumple la matching condition y diseñar el control ajustando los parámetros que mitigan δ a ojo. Entonces tomo la superficie deslizante $u = \varphi(\mathbf{q})$. Definiendo $s = u - \varphi(\mathbf{q})$, calculando \dot{s} e igualando a cero es fácil, pero muy tedioso, despejar el control equivalente v_{eq} . Tomamos entonces

$$v = v_{eq} - \lambda \frac{L}{k_m} \text{sign}(s)$$

con $\lambda > 0$ suficientemente grande. De esta manera el sistema entra en modo deslizante en tiempo finito, en dicho momento tenemos la dinámica

$$\dot{\mathbf{q}} = f(\mathbf{q}, \varphi(\mathbf{q}))$$

que por lo estudiado en la sección anterior es exponencialmente estable. Las ecuaciones del péndulo de Furuta con el que se cuenta son exactamente como 10 pero con distintos valores de los parámetros. Los parámetros son

$$\alpha = I_x, \quad \beta = m_2 l_{bi} c_z, \quad \gamma = J + m_2 l_{bi}^2 + 2m_2 l_{bi} c_x + I_z, \quad D = -m_2 g c_z$$

donde I_x , I_z y J son inercias, m_2 una masa, l_{bi} , c_x y c_z longitudes y g es la aceleración gravitatoria. Explicar qué es cada parámetro involucra explicar aspectos constructivos del prototipo con el que se cuenta, es por esto que decidí no explicarlo aquí. Las diferencias con los parámetros del paper se deben principalmente a dos causas. La primera son aspectos constructivos, la segunda es que el autor tomó un modelo de masas concentradas para evitar calcular inercias.

Además de cambiar los parámetros, se utiliza un modelo con rozamiento y con saturación de voltaje a la entrada del motor. La saturación de voltaje se da a los 10,4 V de entrada. Sobre el rozamiento es importante mencionar que el modelo no es simplemente viscoso. Para la variable q_2 se utiliza un rozamiento que simula fricción estática, fricción de Coulomb fricción viscosa e incluso algunos efectos más. Para q_1 se utiliza un modelo que simula fricción de Coulomb y fricción viscosa. Es por todo esto que hay que ajustar nuevamente el control $u = \varphi(\mathbf{q})$. Mediante simulaciones y basados en los parámetros anteriores se determinan los siguientes valores para el controlador:

$$\kappa = 150 \quad \rho = -0,02 \quad c = 4,5 \quad \epsilon = 0,00001$$

Para el control deslizante se utiliza $\lambda = 200$. El principal cambio a notar es que ahora la zona de definición del controlador es $|q_1| \leq 37^\circ$. Hay dos razones para elegir achicar la zona de atracción. La primera es que no es posible tener una zona de atracción tan grande sin exigir una acción de control grande, lo cual es imposible con saturación o en cualquier implementación real. La segunda es que, como mencioné, las simulaciones muestran que si uno elige un valor de κ grande, buscando tener una buena zona de atracción, entonces pierde rendimiento estabilizando pequeñas perturbaciones, específicamente, gana oscilaciones.

Para comparar el desempeño del controlador diseñamos un LQR linealizando el sistema³. En la figura 5 se observan el sistema simulado con los distintos controladores, comenzando de la condición inicial $q_1 = 0,1 \text{ rad}$, $q_2 = 0,5 \text{ rad}$, $\dot{q}_1 = 0,5 \text{ rad/sec}$ y $\dot{q}_2 = 0,5 \text{ rad/sec}$.

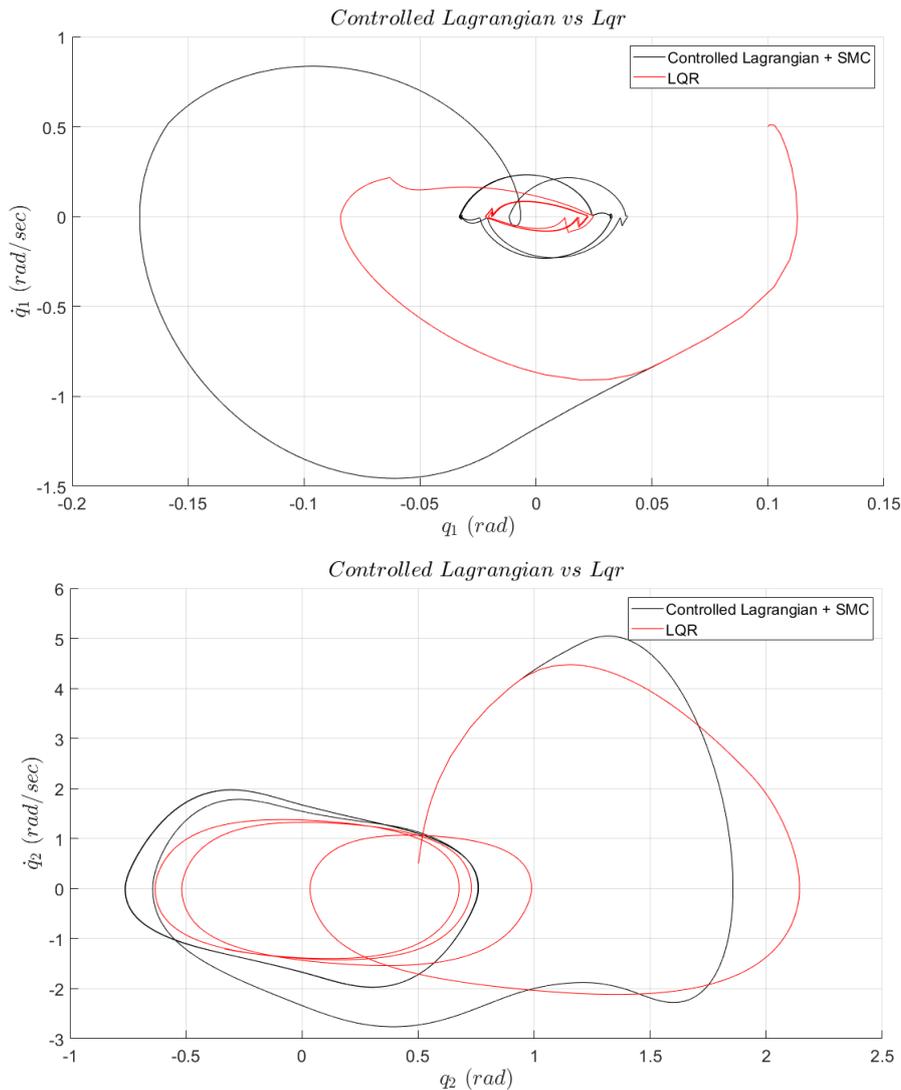


Figura 5: Controlled Lagrangian + SMC vs LQR. Resultados de la simulación de los controladores.

En la figura 6 se ve la variable deslizante. Lo primero a observar es que los controladores no logran converger asintóticamente sino que logran oscilar en torno al punto de equilibrio. Esto es lo mismo que le sucede a [4] cuando lo implementa en un prototipo físico. Ahí menciona que puede ser debido a la fricción y/o limitaciones del hardware. Acá vemos esto en la simulación. Yo aseguro que la razón de verlo en la simulación es debido a la fricción estática. A diferencia del modelo que utiliza [4], el modelo utilizado aquí tiene una fricción que captura el caracter viscoso y el caracter estático de la fuerza de rozamiento. Mediante simulaciones se observa que si uno solamente deja la parte viscosa

³Lo que se hizo fue linealizar el sistema y utilizar LQR con Q la matriz identidad y $R = 1$.

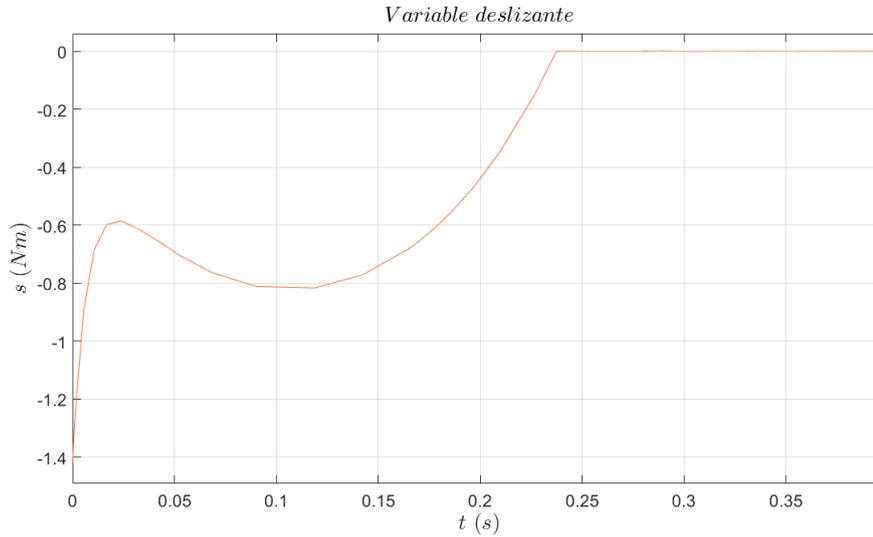


Figura 6: Controlled Lagrangian + SMC vs LQR. Resultados de la simulación de los controladores.

del modelo entonces las oscilaciones desaparecen. Solo al incluir el rozamiento estático el simulador reproduce las oscilaciones mostradas en la figura 5.

Otro punto a observar es que la variable deslizante llega a *cero* en tiempo finito pero no cumple que converga monotonamente a cero, como es de esperar en un controlador deslizante. Si se observa el voltaje aplicado en los primeros 0,25 segundos se puede ver que el mismo se encuentra saturado, por poco, pero se encuentra saturado. Es por esto que el sliding no funciona tal cual es. Sin embargo, alcanza para que se llegue a la superficie deslizante como muestra la simulación. Que el causante de este comportamiento sea la saturación se verifica al realizar una simulación con el modelo sin saturación, en este caso se ve como $s(t)$ quedó monótona creciente.

Otro punto a observar es que el LQR es más óptimo en el sentido de lograr una oscilación más pequeña en q_1 y una oscilación más o menos igual en q_2 . Este resultado no es sorprendente ya que si el estado se mueve en un entorno pequeño del origen entonces el LQR se supone que es óptimo. Lo que es cierto es que el LQR suele ser poco robusto a la incertidumbre en los parámetros mientras que un control deslizante suele ser robusto. Para intentar ver esto evaluamos los controladores agregándole incertidumbre a un parámetro. Como quiero evaluar el control deslizante y no el controlled lagrangian elijo agregar incertidumbre solamente a los parámetros del motor. Más aún, solo agrego incertidumbre a la constante del motor, k_m (recordar 18).

Al variar k_m en un 10% de su valor nominal los controladores siguen funcionando, manteniendo la performance intacta. Al variar k_m en un 20% de su valor nominal ambos controladores fallan, específicamente fallan cuando el valor de k_m se encuentra debajo de su valor nominal en este 20%. Al evaluar la causa de la falla notamos que es la saturación. Siendo un poco más preciso, cuando digo que la causa es la saturación lo que estoy diciendo es que si uno elimina la saturación del modelo entonces ambos controladores siguen funcionando.

Además, sin la saturación, ambos modelos soportan un gran cambio en k_m . Si le agregamos incertidumbre a k_m de a poco, por ejemplo haciendo que vaya disminuyendo de su valor nominal, entonces ambos modelos no tienen problemas en mantenerse estabilizantes incluso hasta $0,6k_{m,nom}$, donde el subíndice *nom* es de nominal. Sin embargo, ya desde antes de $0,6k_{m,nom}$ se puede ver el *comienzo del fin* para el LQR. A medida que va disminuyendo k_m la performance del LQR se va perdiendo, ya en $0,6k_{m,nom}$ la performance ha disminuido bastante por debajo del sliding. El sliding en cambio, mantiene su performance, con mínimos cambios. Podemos ver esto en la figura 7. Si disminuimos

la constante del motor a $0,52k_{m,nom}$ el cambio es más notable aún, mientras que el sliding tiene su performance intacta, esto se ve en 8.

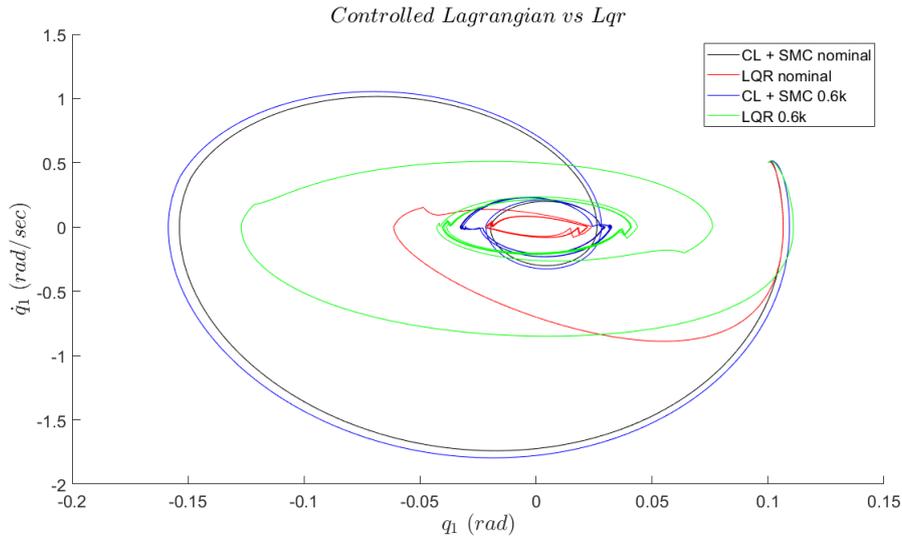


Figura 7: Respuesta con incertidumbre frente a la respuesta nominal. Se disminuyo la constante del motor al 60 %. Se puede ver como el LQR ha disminuido su performance considerablemente respecto a su respuesta nominal, mientras que el sliding mode controller se mantiene.

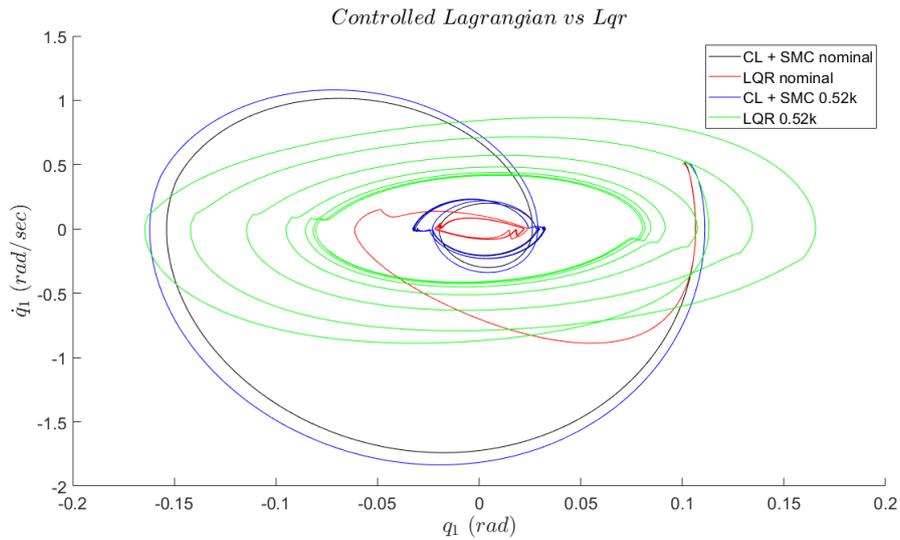


Figura 8: Respuesta con incertidumbre frente a la respuesta nominal. Se disminuyo la constante del motor al 52 %. Se puede ver como el LQR ha disminuido su performance considerablemente respecto a su respuesta nominal, mientras que el sliding mode controller se mantiene.

Que el control deslizante mantenga su performance no es algo sorprendente. Lo que sucede es que a pesar de las incertidumbre se sigue cumpliendo $s \rightarrow 0$. En el desarrollo teórico del control deslizante se tienen en cuenta las incertidumbres las cuales se pueden mitigar con λ si se cumple la matching condition. Lo que sucede aquí entonces es que el valor de λ elegido es suficiente para lograr que $s \rightarrow 0$ a pesar de la incertidumbre en k . Una vez que se llega a la superficie deslizante el sliding mode controller impone en el torque el control de [4] al péndulo de Furuta nominal, esquivando las incertidumbres del motor, y por lo tanto es más que razonable que todo se mantenga prácticamente intácto. Lo único que cambia entre el sistema nominal y el que tiene incertidumbres es que la variable deslizante converge más lento a la superficie deslizante, pero una vez en ella todo se mantiene intacto.

Finalmente, al colocar $0,5k_{m,nom}$ como constante del motor el LQR falla mientras que el sliding se mantiene. El sliding termina fallando al llegar al 45 %, que no es mucho más que el LQR. Aún así, es fácil superar este límite, cambiando λ por 500 el sliding soporta hasta $0,2k_{m,nom}$ prácticamente.

Concluyendo Con esto se concluye que el sliding controller es capaz de soportar las incertidumbres en el motor. Además el sliding se puede hacer más robusto ajustando λ , lo cual coincide con el resultado teórico para incertidumbres cumpliendo la matching condition. Sin embargo, la conclusión más contundente se trata del sistema real, el que lleva saturación. Al simular los modelos se logra ver que la robustez extra que trae el control deslizante sobre el LQR se pierde completamente debido a la saturación.

5. Implementación en el prototipo de laboratorio

Como se señaló al comienzo de la sección anterior, el agregado de un control deslizante al controlador de [4] tenía como objetivo implementar el controlador en el prototipo de laboratorio con el que se cuenta. En esta sección muestro los resultados, analizando brevemente los mismo. Queda totalmente por fuera de este trabajo analizar en profundidad los resultados. También queda por fuera la optimización del controlador en la práctica. En la implementación se utilizó $\lambda = 150$ en lugar de $\lambda = 200$, y $\tanh(20s)$ en lugar de $\text{sign}(s)$, para evitar chattering. Vale comentar que el controlador funcionó prácticamente de una, lo cual no ha sucedido con un LQR. Esto podría ser una señal de la robustez del sliding, pero esto es solo especulación. En las figuras 9 y 10 se observan los resultados.

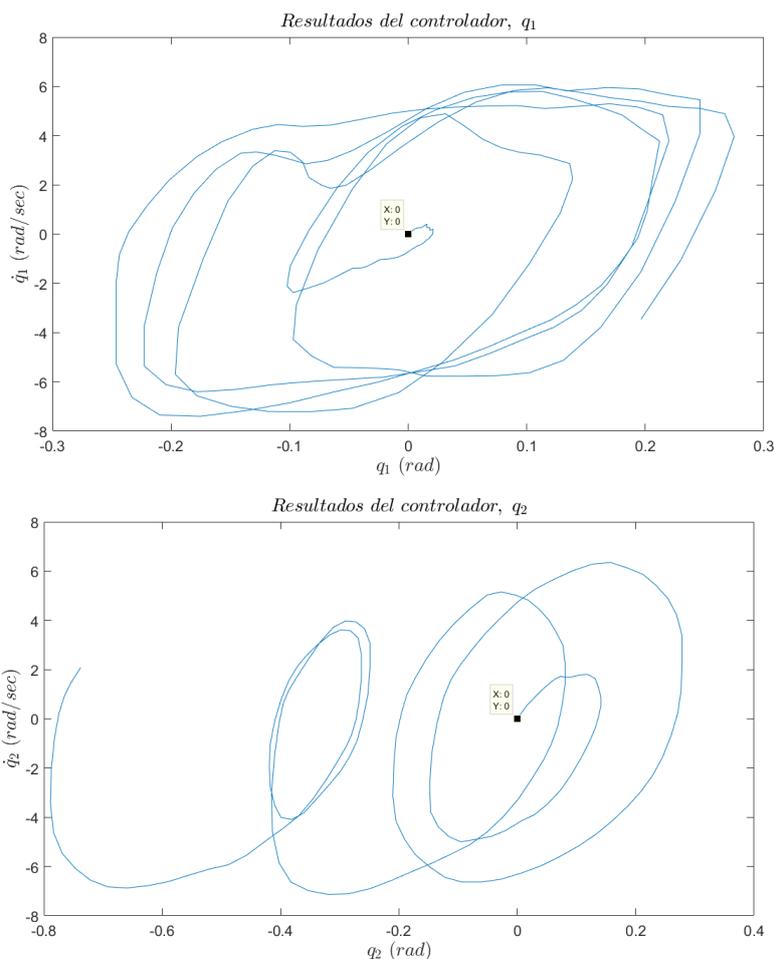


Figura 9: Resultados del controlador en el prototipo. Se muestran los relevos de q_1, q_2, \dot{q}_1 y \dot{q}_2 . Se ve marcada la condición inicial.

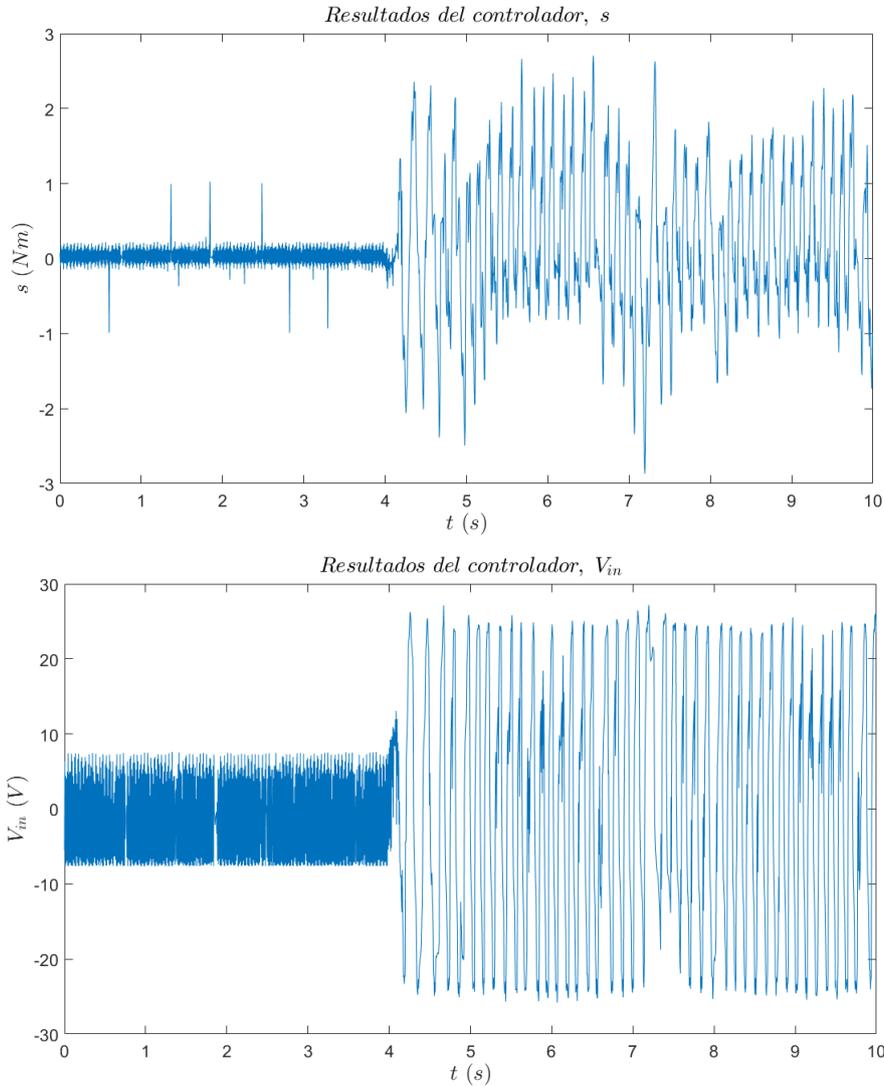


Figura 10: Resultados del controlador en el prototipo. Se ve la variable deslizante y el voltaje en bornes del motor.

Se relevo el control durante 1 minuto aproximadamente, durante el cual el control logró estabilizar el ángulo q_1 , pero no tuvo control sobre q_2 . Para mostrar una gráfica entendible muestro solamente los primeros 5 segundos para q_1 , \dot{q}_1 , q_2 y \dot{q}_2 . Para s y V_{in} muestro 10 segundos.

Antes de cualquier análisis lo primero a observar es que si bien el estado se mantiene en un entorno de la superficie deslizante, la variable s no está convergiendo a cero. Para tener una idea de los órdenes de s recordamos que es una diferencia entre torque y el torque deseado. Realizando simulaciones vemos que el torque deseado anda en el orden de $0,5 Nm$ por lo cual el resultado de s es inaceptable. El valor medio de s es $0,12 Nm$ con una desviación de $0,78 Nm$. Se puede observar que en los primeros 4 segundos el rendimiento de s es bastante mejor que luego de estos. Si miramos solo los primeros 4 segundos vemos una media de $0,03 Nm$ con una desviación de $0,15 Nm$. Si observamos el voltaje aplicado al motor vemos que a partir de este momento el mismo satura pues el actuador satura a los $10,4 V$. Una vez satura el voltaje se pierde el control sobre s . Aún así, el valor de s no se dispara, manteniéndose acotado. Y más aún, a pesar de todo esto, el controlador logró mantener en un ciclo límite la dinámica de q_1 y \dot{q}_1 manteniendo el péndulo en posición invertida.

Como ya mencioné, el controlador logra un *ciclo límite* en q_1 , \dot{q}_1 como mostraban las simulaciones, pero el tamaño del ciclo es bastante superior al simulado. Por otro lado se perdió el control sobre q_2 , \dot{q}_2 . El parámetro ϵ era el encargado de estabilizar esta variable, quizás en la práctica habría que

ajustar el mismo.

Más allá de todo, esta claro que no es posible esperar una similitud muy grande entre lo simulado y el controlador en la práctica teniendo la falta de convergencia a la superficie deslizante que se tiene. Atribuyo las diferencias debido a esta falla, a la magnitud con la que se mantiene s entorno a $s = 0$.

Por qué s no va a cero? Atribuyo esto principalmente a la saturación que se da en bornes del motor. Como muestran los resultados el voltaje en bornes del motor esta más que saturado. Llegado este momento se pierde control sobre s y la misma comienza a oscilar con una magnitud que no es suficiente para imponer adecuadamente el controlador de [4]. Otra posible razón es el verdadero carácter del torque del motor, el actuador utilizado es un driver PWM con una frecuencia de 1 kHz , por lo cual en realidad el torque es una señal con esta frecuencia. El sistema con el que se cuenta, para medir el torque, filtra previamente el mismo con un polo en 100 Hz y luego releva el mismo, con una suerte de medir el valor medio del mismo. Esta claro que la verdadera dinámica del actuador no esta capturada en 18 y por lo tanto podría estar fallando el control equivalente v_{eq} del sliding, entre otras cosas.

Referencias

- [1] Anthony M Bloch, Dong Eui Chang, Naomi Ehrich Leonard, and Jerrold E Marsden. Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems. ii. potential shaping. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(10):1556–1571, 2001.
- [2] Anthony M Bloch, Naomi Ehrich Leonard, and Jerrold E Marsden. Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems. i. the first matching theorem. *IEEE Transactions on automatic control*, 45(12):2253–2270, 2000.
- [3] Katsuhisa Furuta, M Yamakita, and S Kobayashi. Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 206(4):263–269, 1992.
- [4] Sujit Nair and Naomi Ehrich Leonard. A normal form for energy shaping: application to the furuta pendulum. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002.*, volume 1, pages 516–521. IEEE, 2002.