



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA  
FACULTAD DE INGENIERÍA



IIE  
Análisis y Control No Lineal

Control de un brazo robótico de dos  
grados de libertad.

Tania Aguirre      5.107.529-0

---

## **Resumen**

El presente texto desarrolla el control de un brazo robótico de dos grados de libertad, primero se desarrolla la dinámica del sistema por medio de la formulación de Lagrange. Luego se busca controlar al sistema para que el error entre una trayectoria deseada y los valores reales de los ángulos, tienda a cero. Con este enfoque se diseñan tres controladores utilizando la teoría de Lyapunov y un último por medio del método de control deslizante. Los resultados obtenidos nos permite seleccionar el mejor controlador para este caso.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Modelo Dinámico</b>	<b>4</b>
<b>3. Método Basado en la Teoría de Lyapunov.</b>	<b>6</b>
<b>4. Control Deslizante</b>	<b>9</b>
4.1. Control Deslizante sistema SISO . . . . .	9
4.2. Control Deslizante sistema MIMO . . . . .	11
<b>5. Simulaciones y Análisis de Resultados</b>	<b>12</b>
5.1. Método Basado en la Teoría de Lyapunov . . . . .	12
5.2. Control Deslizante . . . . .	22
5.3. Comparaciones . . . . .	26
<b>6. Conclusiones</b>	<b>29</b>

# 1. Introducción

El modelo en estudio es una simplificación del prototipo de la figura 1, el objetivo del mismo es alimentar de forma autónoma a todo aquel que posee dificultades en sus miembros superiores. En este texto el sistema se reduce al movimiento del brazo en un plano.



Figura 1: Prototipo de un alimentador.

La finalidad del texto, es diseñar controladores de manera que el extremo de la cuchara cumpla la trayectoria dada. Específicamente, la meta es que los ángulos de las articulaciones  $\theta$ , consigan seguir a una función variante en el tiempo  $\theta_d$  que representa los ángulos deseados de las articulaciones. Rigurosamente, este control se cumple si:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\theta(t) - \theta_d(t)] = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{\theta}(t) - \dot{\theta}_d(t)] = 0 \quad (2)$$

El texto describe métodos mediante tres controladores basados en la teoría de Lyapunov y un controlador por el método de control deslizante.

## 2. Modelo Dinámico

El sistema a controlar se representa en la Figura 2, dónde  $\theta_i$ ,  $L_i$ ,  $M_i$  son los ángulos de las articulaciones, largos y masas de las conexiones entre las articulaciones.

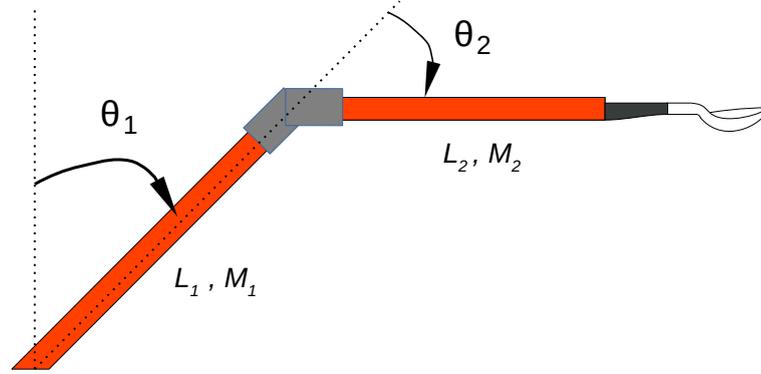


Figura 2: Diagrama de brazo planar de dos articulaciones .

Una forma de obtener las ecuaciones dinámicas que rigen al sistema es por medio de la formulación de Lagrange[2].

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = \tau \quad (3)$$

dónde:

- $\theta = [\theta_1, \theta_2]^T$  el vector de los ángulos en las articulaciones.
- $\tau = [\tau_1, \tau_2]^T$  el vector de torques aplicados en las articulaciones, este se considerará el vector de entrada.

- $G(\theta) = \begin{bmatrix} -(M_1 + M_2)gL_1 \sin(\theta_1) - M_2gL_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -M_2gL_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$

conocido como el vector de los torques dados por la gravedad.

- $C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} = \begin{bmatrix} -M_2L_1L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_2) & -M_2L_1L_2 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_1 \\ 0 & -M_2L_1L_2\dot{\theta}_1 \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$

$$C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} = \begin{bmatrix} -M_2L_2(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2) \sin(\theta_2) \\ -M_2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \end{bmatrix}$$

representa el vector de Coriolis y fuerzas centrífugas.

- $M(\theta) = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{bmatrix}$

llamada la matriz de inercia.

$$D_1 = (M_1 + M_2)L_1^2 + M_2L_2^2 + 2M_2L_1L_2 \cos(\theta_2)$$

$$D_2 = M_2L_2^2 + M_2L_1L_2 \cos(\theta_2)$$

$$D_3 = D_2$$

$$D_4 = M_2L_2^2$$

El modelo dinámico considerando entradas y salidas queda definido de la forma:

$$\begin{cases} M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = \tau \\ Y = \theta \end{cases} \quad (4)$$

dónde se modela el vector  $\tau$  como la entrada al sistema, y el vector  $Y$  como la salida.

Las ecuaciones obtenidas mediante formulación de Lagrange presentan siempre ciertas características para los distintos problemas. La matriz de inercia es definida positiva, cuyos elementos dependen únicamente de  $\theta$ , además existe la inversa y es definida positiva.

Por lo tanto, es posible expresar el sistema (3) de la forma:

$$\ddot{\theta} = M(\theta)^{-1} \left( \tau - G(\theta) - C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} \right) \quad (5)$$

También, existe una constante positiva  $\alpha$  que cumple:

$$M(\theta) \leq \alpha I \quad (6)$$

dónde  $I$  denota a la matriz identidad.

Luego, la matriz  $C(\theta, \dot{\theta})$  se relaciona con la matriz de inercia de la forma:

$$x^T \left[ \frac{1}{2} \dot{M}(\theta) - C(\theta, \dot{\theta}) \right] x = 0 \quad \forall \theta, \dot{\theta}, x \in \mathbb{R}^n \quad (7)$$

Además,  $\frac{1}{2} \dot{M}(\theta) - C(\theta, \dot{\theta})$ , es una matriz antisimétrica. Por lo que la matriz  $C(\theta, \dot{\theta})$  queda completamente definida por la matriz  $M(\theta)$ , que satisface:

$$\dot{M}(\theta) = C(\theta, \dot{\theta}) + C(\theta, \dot{\theta})^T \quad (8)$$

En particular se satisface:

$$\dot{\theta}^T \left[ \frac{1}{2} \dot{M}(\theta) - C(\theta, \dot{\theta}) \right] \dot{\theta} = 0 \quad \forall \theta, \dot{\theta} \in \mathbb{R}^n \quad (9)$$

Estas propiedades serán de interés para la siguiente sección, para verificar que el diseño de algunos de los controladores cumplan con la teoría de Lyapunov.

### 3. Método Basado en la Teoría de Lyapunov.

El presente texto desarrolla tres posibles controladores basados en la modificación de una función de Lyapunov candidata.

Adaptando el método de [3] para nuestro problema, obtenemos la función Lyapunov candidata como:

$$V = \frac{1}{2}\Delta\dot{\theta}^T M(\theta)\Delta\dot{\theta} + \frac{1}{2}\cosh(\Delta\theta)^T \alpha \cosh(\Delta\theta)^1 \quad (10)$$

Dónde  $\Delta\theta$  es la función del error,  $\Delta\theta = \theta - \theta_d$  es el error de posición,  $\theta_d$  la posición deseada,  $\Delta\dot{\theta} = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d$  es el error de la velocidad,  $\dot{\theta}_d$  es la velocidad angular deseada,  $\Delta\ddot{\theta} = \ddot{\theta} - \ddot{\theta}_d$ ,  $\ddot{\theta}_d$  es la aceleración angular deseada, y  $\alpha$  es una matriz de tamaño  $2 \times 2$  definida positiva, y la función  $\cosh(\Delta\theta) = [\cosh(\Delta\theta_1), \cosh(\Delta\theta_2)]^T$ .

Buscaremos ahora la derivada de la función de Lyapunov, en este caso se puede aplicar la propiedad:  $x^T y = y^T x$ , se obtiene:

$$\dot{V} = \Delta\dot{\theta}^T M(\theta)\Delta\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\Delta\dot{\theta}^T \dot{M}(\theta)\Delta\dot{\theta} + (diag(\sinh(\Delta\theta))\Delta\dot{\theta})^T \alpha \cosh(\Delta\theta) \quad (11)$$

$$\dot{V} = \Delta\dot{\theta}^T M(\theta) (\ddot{\theta} - \ddot{\theta}_d) + \frac{1}{2}\Delta\dot{\theta}^T \dot{M}(\theta)\Delta\dot{\theta} + \Delta\dot{\theta}^T diag(\sinh(\Delta\theta))\alpha \cosh(\Delta\theta) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = \Delta\dot{\theta}^T M(\theta)\ddot{\theta} - \Delta\dot{\theta}^T M(\theta)\ddot{\theta}_d + \frac{1}{2}\Delta\dot{\theta}^T \dot{M}(\theta)\Delta\dot{\theta} \\ + \Delta\dot{\theta}^T diag(\sinh(\Delta\theta))\alpha \cosh(\Delta\theta) \end{aligned} \quad (13)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en (13)

$$\begin{aligned} \dot{V} = \Delta\dot{\theta}^T [\tau - C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} - G(\theta)] - \Delta\dot{\theta}^T M(\theta)\ddot{\theta}_d + \\ \frac{1}{2}\Delta\dot{\theta}^T \dot{M}(\theta)\Delta\dot{\theta} + \Delta\dot{\theta}^T diag(\sinh(\Delta\theta))\alpha \cosh(\Delta\theta) \end{aligned} \quad (14)$$

pero considerando que  $C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} = -C(\theta, \dot{\theta})\Delta\dot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_d$ ,

$$\begin{aligned} \dot{V} = \Delta\dot{\theta}^T [\tau + C(\theta, \dot{\theta})\Delta\dot{\theta} - C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_d - G(\theta)] - \Delta\dot{\theta}^T M(\theta)\ddot{\theta}_d \\ + \frac{1}{2}\Delta\dot{\theta}^T \dot{M}(\theta)\Delta\dot{\theta} + \Delta\dot{\theta}^T diag(\sinh(\Delta\theta))\alpha \cosh(\Delta\theta) \end{aligned} \quad (15)$$

Reorganizando la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{V} = \Delta\dot{\theta}^T [\tau - C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_d - G(\theta)] - \Delta\dot{\theta}^T M(\theta)\ddot{\theta}_d \\ \underbrace{- \Delta\dot{\theta}^T C(\theta, \dot{\theta})\Delta\dot{\theta} + \frac{1}{2}\Delta\dot{\theta}^T \dot{M}(\theta)\Delta\dot{\theta}}_{=0 \text{ por (9)}} + \Delta\dot{\theta}^T diag(\sinh(\Delta\theta))\alpha \cosh(\Delta\theta) \end{aligned} \quad (16)$$

---

<sup>1</sup>Se modificó la función de Lyapunov propuesta en [3] por errores.

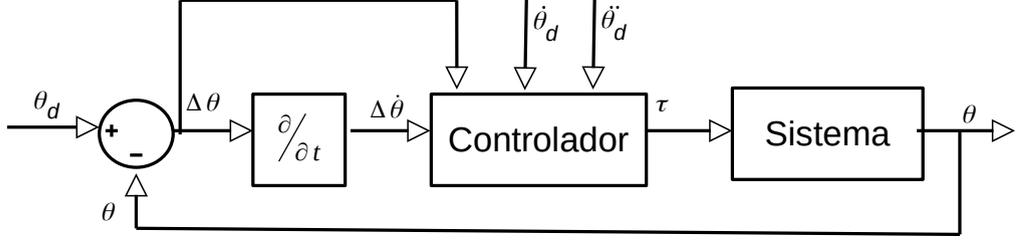


Figura 3: Diagrama de bloques para controladores (19), (21) y (23).

Por lo tanto la expresión final de  $\dot{V}$  es

$$\dot{V} = \Delta \dot{\theta}^T \left[ -M(\theta) \ddot{\theta}_d + \tau - C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta}_d - G(\theta) + \text{diag}(\sinh(\Delta\theta)) \alpha \cosh(\Delta\theta) \right] \quad (17)$$

Para que la derivada sea siempre semi definida negativa, se propone

$$\dot{V} = -\Delta \dot{\theta}^T \Delta \dot{\theta} \quad (18)$$

Imponiendo (18) en (17), se obtiene el controlador:

$$\tau = M(\theta) \ddot{\theta}_d + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta}_d + G(\theta) - \text{diag}(\sinh(\Delta\theta)) \alpha \cosh(\Delta\theta) - \dot{\Delta\theta} \quad (19)$$

Ahora se consideran variaciones a la función de Lyapunov candidata (10):

$$V = \frac{1}{2} \Delta \dot{\theta}^T M(\theta) \Delta \dot{\theta} + \ln(\cosh(\Delta\theta))^T \alpha \ln(\cosh(\Delta\theta))^2 \quad (20)$$

Siguiendo un razonamiento análogo se obtiene:

$$\tau = M(\theta) \ddot{\theta}_d + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta}_d + G(\theta) - \text{diag}(\tanh(\Delta\theta)) \alpha \log(\cosh(\Delta\theta)) - \Delta \dot{\theta} \quad (21)$$

Simplificando aún más la función (10)

$$V = \frac{1}{2} \Delta \dot{\theta}^T M(\theta) \Delta \dot{\theta} + \Delta \theta^T \alpha \Delta \theta \quad (22)$$

En este caso el controlador es de la forma

$$\tau = M(\theta) \ddot{\theta}_d + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta}_d + G(\theta) - 2\alpha \Delta \theta - \Delta \dot{\theta} \quad (23)$$

En la figura 3 se observa la implementación de estos controladores como diagramas de bloques.

Para el estudio de la estabilidad de los tres controladores se considera una forma genérica de los controladores como:

$$\tau = M(\theta) \ddot{\theta}_d + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta}_d + G(\theta) - f(\Delta\theta) - \Delta \dot{\theta} \quad (24)$$

<sup>2</sup>Se modificó el controlador propuesto en [3] por errores.

con  $f$  una función continua que se anula únicamente en el origen.

Utilizando esta ecuación en (5) se obtiene:

$$\Delta\ddot{\theta} = M^{-1}(\theta) \left( -C(\theta, \dot{\theta})\Delta\dot{\theta} - f(\Delta\theta) - \Delta\dot{\theta} \right) \quad (25)$$

Las funciones de Lyapunov utilizadas dependen de los parámetros  $\Delta\theta$  y  $\Delta\dot{\theta}$ , consideremos el conjunto dónde  $\dot{V} = 0$

$$S = \{ [\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\dot{\theta}_1, \Delta\dot{\theta}_2] \in R^4 \quad / \quad \Delta\dot{\theta}_1 = 0 \quad \Delta\dot{\theta}_2 = 0 \} \quad (26)$$

Supongamos una trayectoria que se pertenezca a S en todo tiempo, esta debe cumplir que,  $\Delta\theta \equiv 0$ , lo cual implica  $\Delta\dot{\theta} \equiv 0$ , entonces al observar la ecuación (25), como la matriz  $M^{-1}$  no puede ser la matriz nula, nos queda que  $f(\Delta\theta) \equiv 0$  entonces  $\Delta\theta \equiv 0$ . De esta forma, se demuestra que la única trayectoria que puede permanecer en S es la solución trivial, por lo tanto utilizando el corolario de La Salle [1], se obtiene que los tres controladores son asintóticamente estables al punto  $\Delta\theta = 0$  y  $\Delta\dot{\theta} = 0$ .

La convergencia asintótica para todos los controladores está asegurada, en particular se puede probar que el sistema controlado por (23) es exponencialmente estable. Para esto es necesario demostrar que la función candidata cumple:

$$k_1 \|x\|^a \leq V(x) \leq k_2 \|x\|^a \quad y \quad \dot{V}(x) \leq -k_3 \|x\|^a$$

dónde  $k_1, k_2, k_3, a$  son constantes positivas.

Observemos que se cumple:

$$\lambda_{min}^M I \leq M(\theta) \leq \lambda_{max}^M I \quad (27)$$

$$\frac{1}{2} \lambda_{min}^M \|\Delta\dot{\theta}\|^2 \leq \frac{1}{2} \Delta\dot{\theta}^T M(\theta) \Delta\dot{\theta} \leq \frac{1}{2} \lambda_{max}^M \|\Delta\dot{\theta}\|^2 \quad (28)$$

dónde  $\lambda_{min}^M$  ( $\lambda_{max}^M$ ) denota el mínimo (máximo) valor propio positivo de la matriz entre todos los posibles valores de  $\theta$ .

Luego se obtiene

$$\lambda_{min}^\alpha I \leq \alpha \leq \lambda_{max}^\alpha I \quad (29)$$

$$\lambda_{min}^\alpha \|\Delta\theta\|^2 \leq \Delta\theta^T \alpha \Delta\theta \leq \lambda_{max}^\alpha \|\Delta\theta\|^2 \quad (30)$$

dónde  $\lambda_{min}^\alpha$  ( $\lambda_{max}^\alpha$ ) es el mínimo (máximo) valor propio de la matriz  $\alpha$ .

Entonces sea  $k_2 = \max\{\lambda_{max}^\alpha, \lambda_{max}^M\}$ ,  $k_1 = \min\{\lambda_{min}^\alpha, \frac{\lambda_{min}^M}{2}\}$ ,  $a = 2$ , la ecuación (22) queda acotada:

$$k_1 (\Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_2^2 + \Delta\dot{\theta}_1^2 + \Delta\dot{\theta}_2^2) \leq V_3 \leq k_2 (\Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_2^2 + \Delta\dot{\theta}_1^2 + \Delta\dot{\theta}_2^2) \quad (31)$$

Utilizando esta condición y  $\dot{V}_3 \leq -(\Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_2^2 + \Delta\dot{\theta}_1^2 + \Delta\dot{\theta}_2^2)$ , se obtiene que el controlador 3 ecuación (23) es exponencialmente estable.

Al correr del texto se simplifica la notación a  $e = \Delta\theta$ ,  $\dot{e} = \Delta\dot{\theta}$ ,  $\ddot{e} = \Delta\ddot{\theta}$ .

## 4. Control Deslizante

En esta sección desarrolla el control deslizante en un sistema SISO, para entender conceptos y luego se prosigue a la implementación en un sistema MIMO, para finalizar con el controlador en el sistema en estudio.

### 4.1. Control Deslizante sistema SISO

El estudio en profundidad de la teoría de control deslizante puede encontrarse en [1]. En esta sección, se presentará de manera resumida la aplicación del mismo. Para esto, es necesario considerar el sistema no lineal de segundo orden:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + b(x, \dot{x})u \quad (32)$$

dónde  $f$  y  $b$  son funciones no lineales en términos de  $x$  y  $\dot{x}$ , además  $b$  debe ser invertible.

Sea  $x_d$  la trayectoria de referencia, por lo tanto  $e = x - x_d$  es el error de la trayectoria, el cual se desea que converga a cero. Este método se basa en la elección de una superficie de deslizamiento  $S = 0$ , dependiente del error. Una elección típica de la misma es:

$$S = \lambda e + \dot{e} \quad (33)$$

De esta forma, cuando la superficie deslizante es alcanzada, el error converge a cero mientras que el vector se mantenga en esta superficie. La tasa de convergencia es dependiente del parámetro  $\lambda$ .

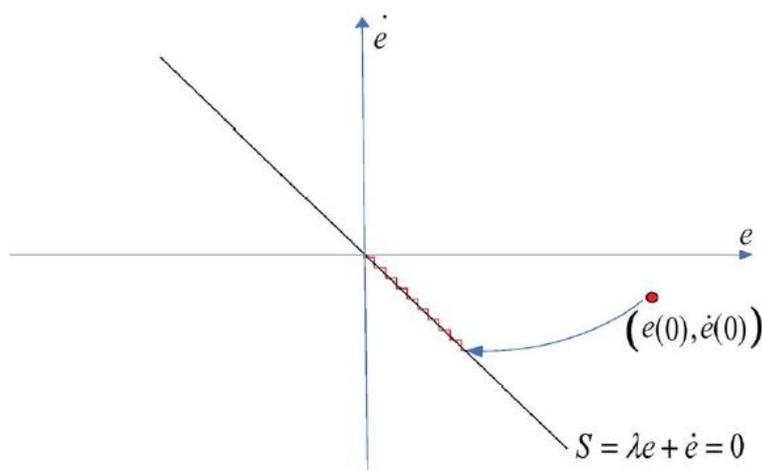


Figura 4: Descripción en el plano  $(e, \dot{e})$  del método de control deslizante. Extraído de [4].

Existen dos fases en este método, el primero es “*Reaching Mode*”, es el paso en el cual el vector de error  $(e, \dot{e})$ , alcanza la superficie. Mientras que la siguiente fase es el “*Sliding Mode*”, que es cuando el vector error se “desliza” por esta superficie hasta alcanzar el punto de equilibrio  $(0,0)$ . Las mismas se pueden observar en la figura 4.

Seguidamente se prosigue con el diseño del controlador para permitir que el vector de error  $(e, \dot{e})$  alcance la superficie deseada. Para esto, se considera la función de Lyapunov candidata de la forma  $V = \frac{1}{2} S^T S$ , por lo tanto  $\dot{V} = S \cdot \dot{S}$ . Entonces para que el vector error se mantenga en la superficie  $S = 0$ , es necesario que se cumpla:

$$S \cdot \dot{S} < 0 \quad \forall \quad t > 0 \quad (34)$$

Para satisfacer esta condición, generalmente se elige  $\dot{S}$  como:

$$\dot{S} = -k \operatorname{signo}(S) \quad \forall t, k > 0 \quad (35)$$

La expresión (35) es llamada comúnmente la “Reaching Law”, integrando la misma respecto al tiempo, suponiendo cierto tiempo  $t_r$ , como el tiempo necesario para el vector de error  $(e, \dot{e})$  en alcanzar  $S$ .

$$t_r = \frac{|S(0)|}{k} \quad (36)$$

Por lo tanto, al observar la ecuación (36) se concluye que al aumentar los valores de  $k$ , se disminuye el tiempo  $t_r$ , por lo tanto el vector error alcanza más rápido a la superficie.

El controlador a diseñar es de la siguiente forma [1]:

$$u = u_{eq} + u_{disc} \quad (37)$$

dónde:

$$u_{eq} = b^{-1}(x, \dot{x}) [-\lambda \dot{e} + \ddot{x}_d - f(x, \dot{x})] \quad (38)$$

$$u_{disc} = -b^{-1}(x, \dot{x}) k \operatorname{signo}(S) \quad (39)$$

Dónde el primer término se llama controlador equivalente, con este se cancela los términos conocidos de la derecha de (32). Si no hay incertidumbre en el modelo, al tomar  $u = u_{eq}$  resulta  $\dot{S} = 0$ , por lo que se asegura que la condición  $S = 0$  se cumpla para todo tiempo a futuro.

Si se considera que el modelo presenta alguna imprecisión o alteración, el segundo término es capaz de controlar el sistema, mediante una discontinuidad alrededor de  $S = 0$ .

Sin embargo, al querer controlar el sistema para que funcione con ciertas incertidumbres por medio del término discontinuo, se genera el fenómeno de Chattering. Este es la oscilación de forma de “zig-zag” alrededor de la superficie. Las consecuencias del mismo pueden ser desde una baja precisión del control, a grandes pérdidas de potencia eléctrica y desgaste de las partes mecánicas.

Para resolver este problema existen varios enfoques, en [1] y [4] se plantean algunas soluciones.

## 4.2. Control Deslizante sistema MIMO

En esta parte se realizará el razonamiento análogo para el caso específico de un sistema MIMO de orden dos para simplificar la notación. Un caso más genérico es descrito en [4].

Sea  $X = [x_1, x_2]^T$ , utilizaremos el sistema de la forma:

$$\ddot{X} = \Phi(X, \dot{X}) + B(X, \dot{X})U \quad (40)$$

$$= \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \\ f_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \\ b_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Dónde el sistema está bien definido, por lo tanto las funciones  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  son funciones continuas no lineales. Suponemos que  $B$  es invertible. En este caso, va a ser necesario dos funciones de deslizamiento independientes. Sea  $X_d = [x_{1_d}, x_{2_d}]^T$  el vector de trayectoria deseado. Entonces se define el vector de error como:

$$E = [x_1 - x_{1_d}, x_2 - x_{2_d}]^T = [e_1, e_2]^T \quad (42)$$

Las funciones de deslizamiento son de la forma:

$$S_1 = \lambda_1 e_1 + \dot{e}_1 \quad (43)$$

$$S_2 = \lambda_2 e_2 + \dot{e}_2 \quad (44)$$

Siguiendo con el razonamiento anterior:

$$\dot{S}_1 = -k_1 \text{signo}(S_1) \quad (45)$$

$$\dot{S}_2 = -k_2 \text{signo}(S_2) \quad (46)$$

Para la notación matricial, se definen  $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ ,  $\Sigma = [S_1, S_2]^T$ ,

$K(\Sigma) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$  y  $\text{signo}(\Sigma) = [\text{signo}(S_1), \text{signo}(S_2)]^T$ .

Análogamente el controlador va a ser de la forma:

$$U = U_{eq} + U_{disc} \quad (47)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_{eq} = B^{-1}(X, \dot{X})[-\Lambda \dot{E} + \ddot{X}_d - \Phi(X, \dot{X})] \\ U_{disc} = -B^{-1}(X, \dot{X})K(\Sigma) \text{signo}(\Sigma) \end{cases} \quad (48)$$

Por lo tanto, la ecuación anterior define un controlador por medio de control deslizante para un sistema MIMO, al observar la ecuación (5) del brazo robótico en estudio, esta se puede relacionar con la ecuación (40) de la forma:

$$\begin{aligned} X &\leftrightarrow \theta & B(X, \dot{X}) &\leftrightarrow M^{-1}(\theta) \\ U &\leftrightarrow \tau & \Phi(X, \dot{X}) &\leftrightarrow -M^{-1}(\theta)[G(\theta) + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}] \end{aligned}$$

Entonces el controlador a utilizar en el modelo en estudio queda definido como:

$$\tau = -M(\theta)[\Lambda \dot{E} - \ddot{X}_d] + G(\theta) + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} - M(\theta)K(\Sigma) \text{signo}(\Sigma) \quad (49)$$

## 5. Simulaciones y Análisis de Resultados

Esta sección desarrolla las simulaciones aplicadas a los distintos controladores diseñados. Primero se analiza el desempeño de los mismos variando la condición inicial de los ángulos, luego detalla el efecto de los parámetros del mismo. Por último prosigue a la comparación entre ellos.

Primeramente se definen los parámetros del sistema en estudio (3) para las simulaciones, en este caso se utilizaron los parámetros:

$$\begin{aligned} L_1 &= 0,1 \text{ m} & L_2 &= 0,15 \text{ m} \\ M_1 &= 0,05 \text{ kg} & M_2 &= 0,03 \text{ kg} \end{aligned}$$

La trayectoria define un movimiento circular uniforme para cada una de las articulaciones, es decir las trayectorias angulares son rectilíneas y la velocidad de las mismas constantes.

Luego se prosigue con cada controlador.

### 5.1. Método Basado en la Teoría de Lyapunov

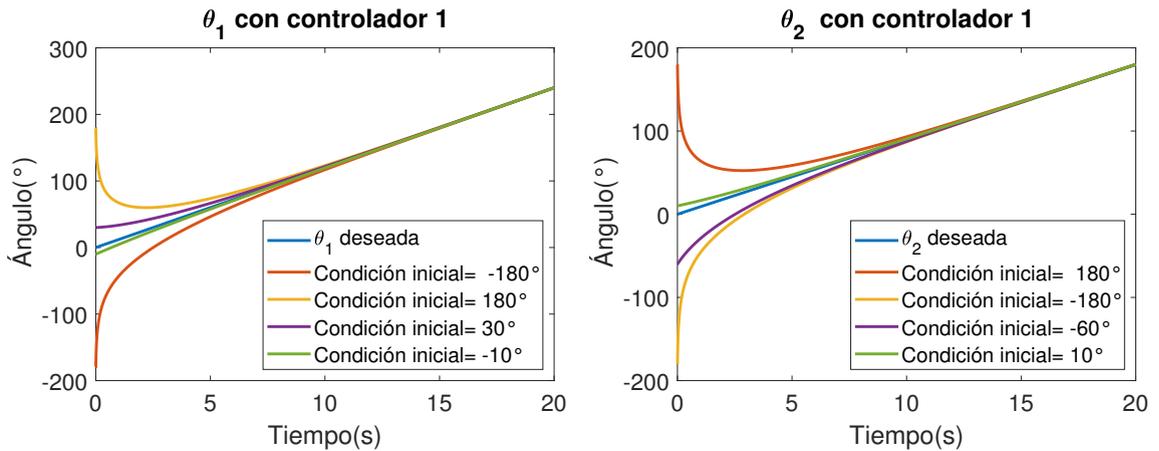


Figura 5: Trayectorias  $\theta_1$  y  $\theta_2$  variando condición inicial con el controlador (19).

En las simulaciones correspondientes a las figuras 5, 6 y 7 fueron realizadas siguiendo la figura 3 utilizando los controladores (19), (21) y (23), considerando  $\alpha = 0,3 \cdot I$ , dónde  $I$  es la matriz identidad de tamaño 2.

El efecto de variar la condición inicial evalúa el desempeño del controlador frente a perturbaciones, la región de atracción del mismo. Es esperable que algunos controladores difieran del valor deseado, pues en el modelo no esta considerando esta particularidad. Sin embargo, este aspecto es de vital importancia para poder decidir que controlador utilizar en la práctica.

Respecto al caso de la figura 5, todas las trayectorias angulares llegaron al valor deseado antes de los diez segundos, a pesar de utilizar condiciones iniciales muy lejos de la esperada. Incluso, se aumentó el valor de la condición inicial para observar cuando el sistema se perturba. Este valor fue considerablemente mayor a el rango de ángulos válidos, por lo que no se adjunta en el estudio, pero nos asegura que con una

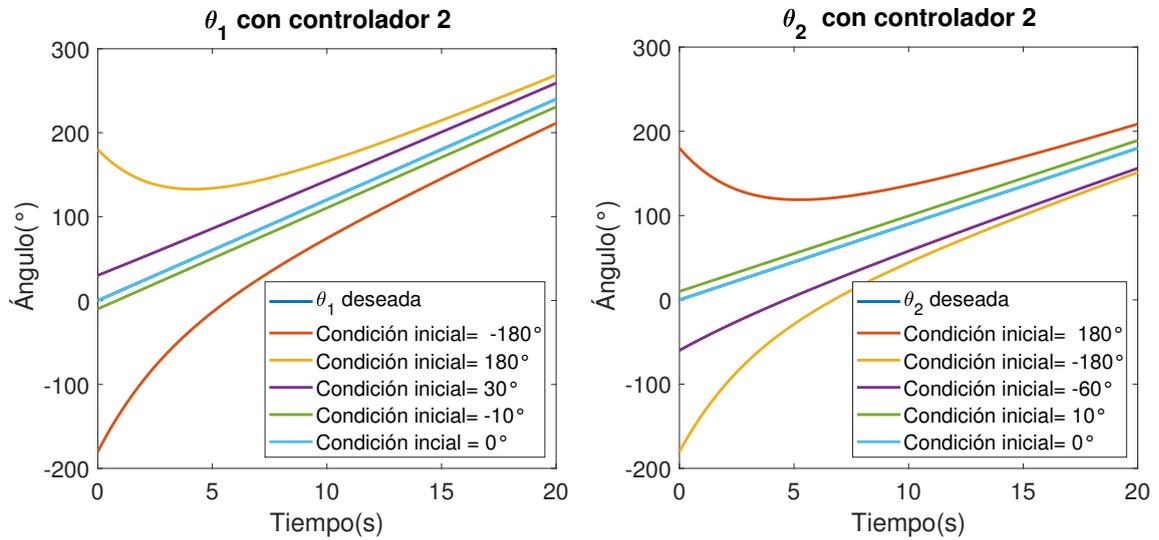


Figura 6: Trayectorias  $\theta_1$  y  $\theta_2$  variando condición inicial con el controlador (21).

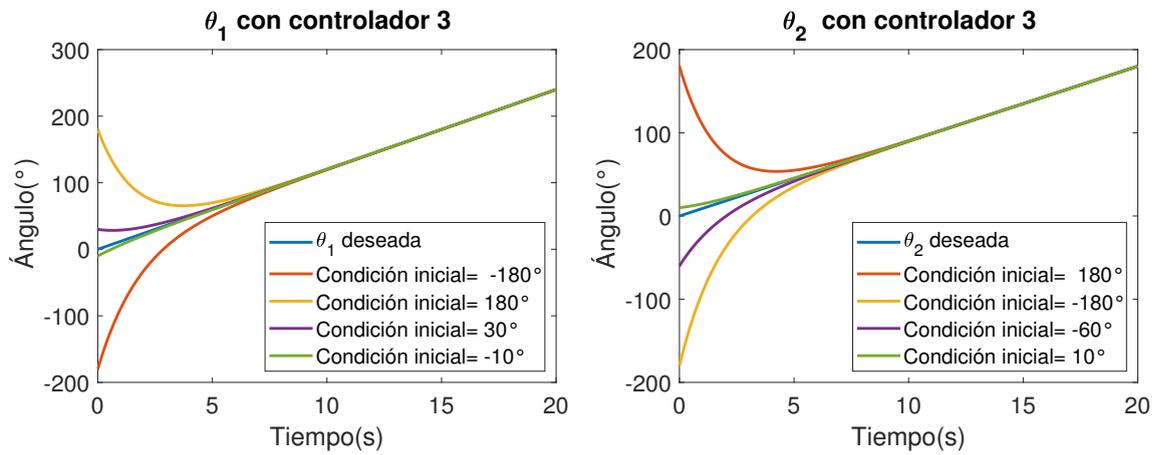


Figura 7: Trayectorias  $\theta_1$  y  $\theta_2$  variando condición inicial con el controlador (23).

condición inicial perteneciente a  $[-180^\circ, 180^\circ]$  el sistema va a converger a los puntos de equilibrio. En el caso, del controlador 2 (figura 6) a pequeñas perturbaciones de la condición inicial nula, las trayectorias no alcanzan la deseada. Por otro lado, el controlador 3 en la figura 7, converge incluso más rápido que el primer controlador, lo cual es esperable porque el sistema es exponencialmente estable, por lo cualquier condición inicial termina en los puntos de equilibrio, es decir en error nulo.

Luego, de cada controlador se presentan las gráficas de la función error ( $\Delta\theta$  o  $e$ ). En la figura del error 8, se observa mas claro el efecto de la perturbación y como esta genera retrasos en el sistema para poder llegar a la posición deseada. En la figura 9 se observa más claro como la trayectoria no converge a error nulo, incluso tiene la particularidad que para algunas condiciones iniciales el error se mantiene constante. Mientras que en la figura 10 las trayectorias convergen y estas no presentan diferencias notorias entre distintas condiciones iniciales.

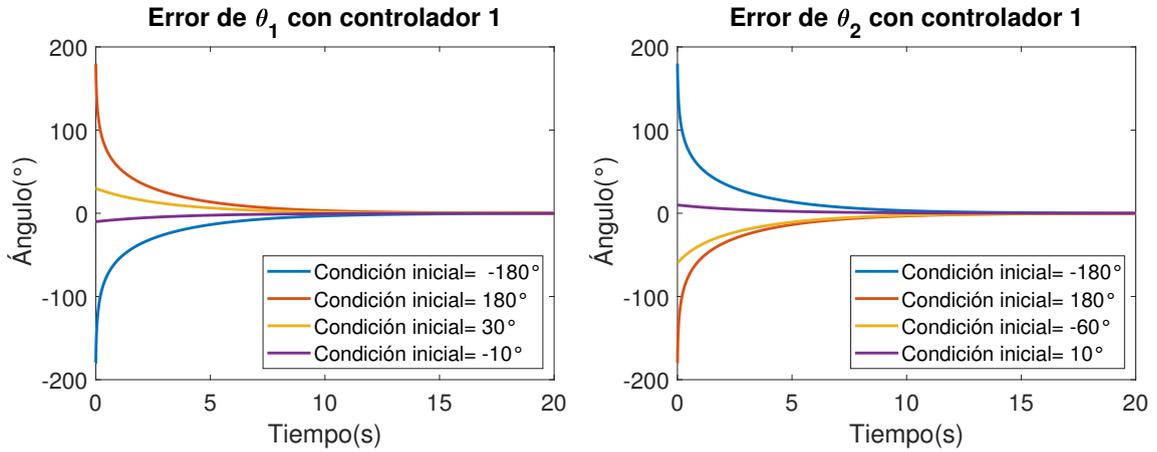


Figura 8: Error en las trayectorias  $\theta_1$  y  $\theta_2$  variando condición inicial con el controlador (19).

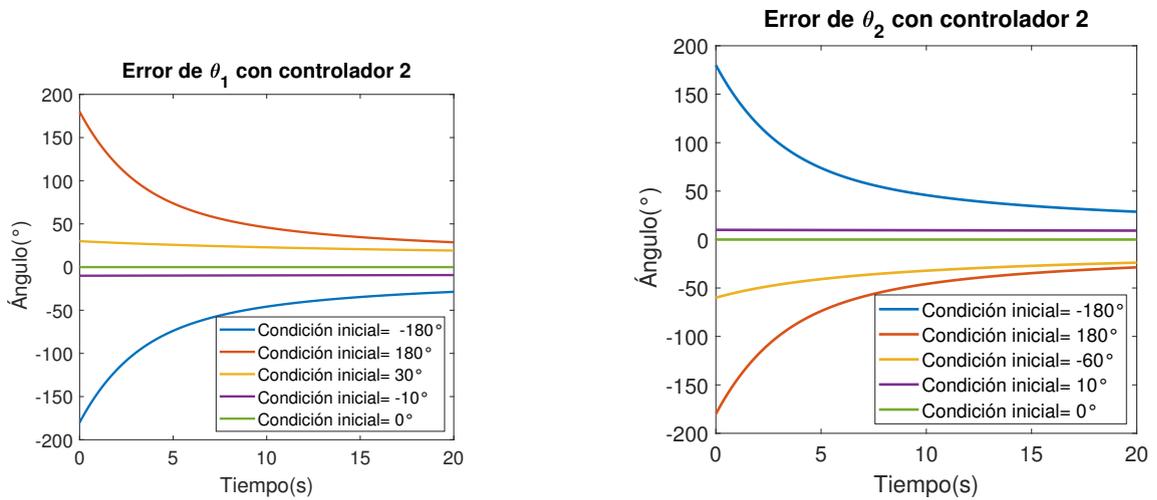


Figura 9: Error en las trayectorias  $\theta_1$  y  $\theta_2$  variando condición inicial con el controlador (21).

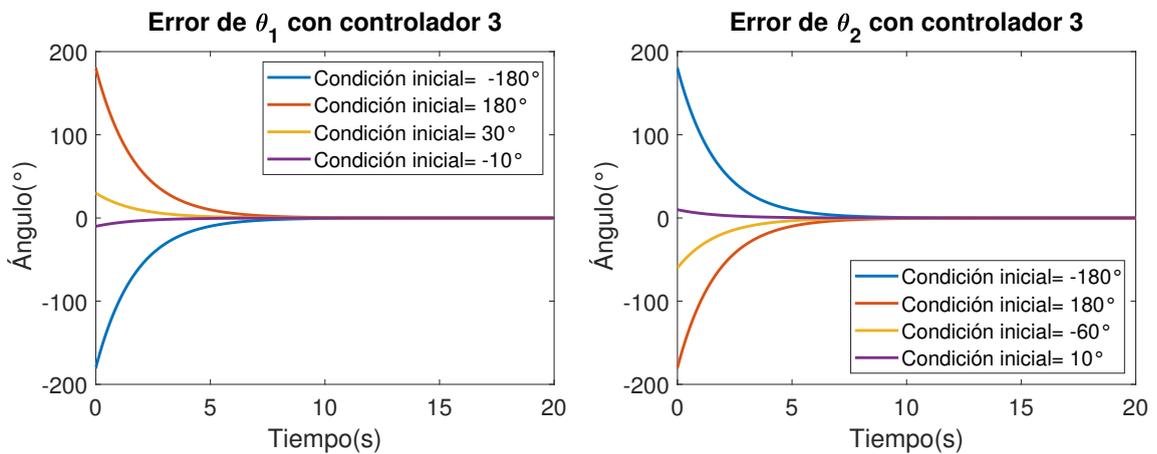


Figura 10: Error en las trayectorias  $\theta_1$  y  $\theta_2$  variando condición inicial con el controlador (23).

Al principio del texto se afirma que para obtener los ángulos deseados en las articulaciones, es necesario obtener la velocidad deseada de las mismas. No se consideró pertinente variar la condición inicial de la velocidad, ya que el modelo en estudio siempre se arranca desde una posición desconocida con velocidad nula.

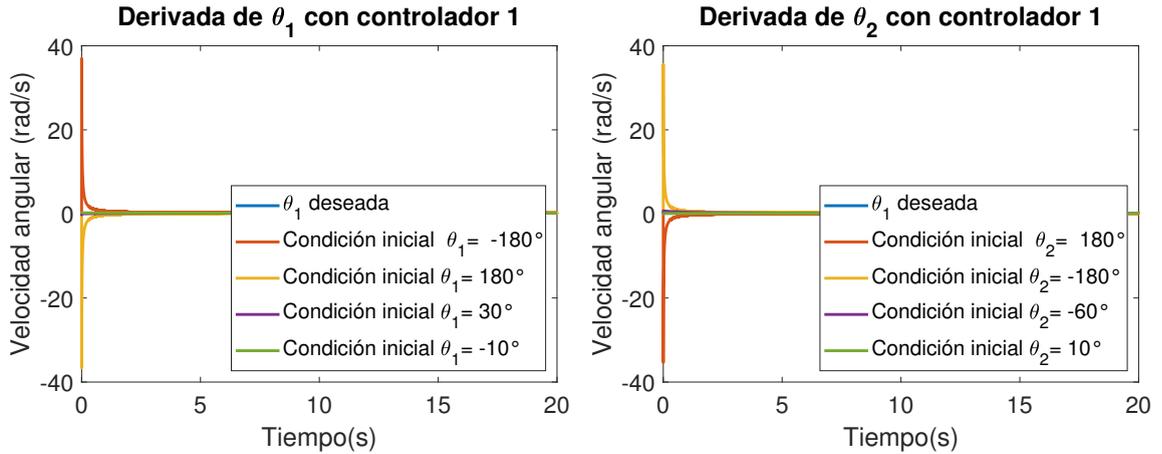


Figura 11: Velocidades angulares  $\dot{\theta}_1$  y  $\dot{\theta}_2$  en función del tiempo variando las condiciones iniciales con el controlador (19).

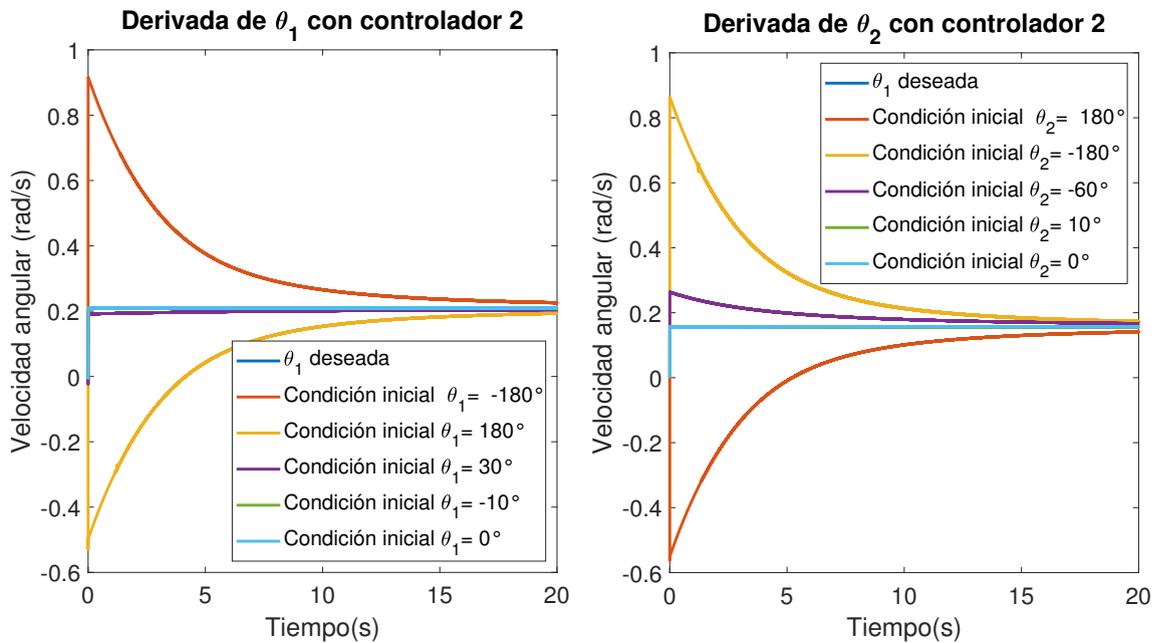


Figura 12: Velocidades angulares  $\dot{\theta}_1$  y  $\dot{\theta}_2$  en función del tiempo variando las condiciones iniciales con el controlador (21).

En la figura 11 se observa que a pesar de las variaciones en la condición inicial, las articulaciones alcanzan la velocidad deseada. En este caso, las articulaciones llegan a la velocidad deseada antes que se cumpla el ángulo requerido. A pesar que el segundo controlador no tiene convergencia en el error a pequeñas perturbaciones, si converge en la velocidad del error, lo cual se aprecia en la figura 12. Siguiendo con

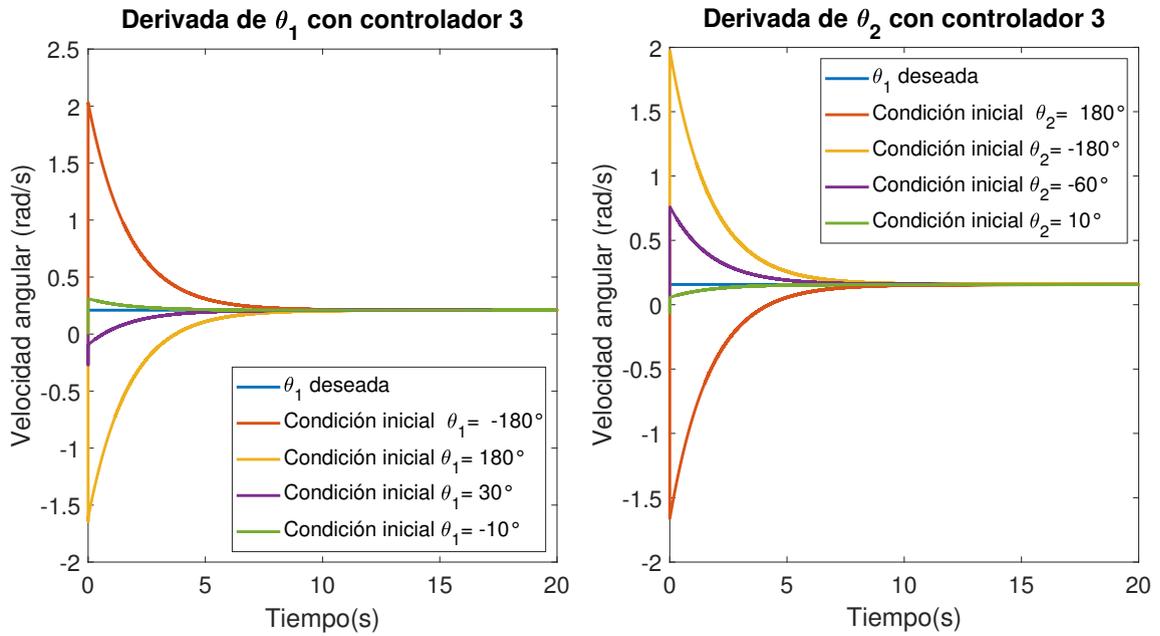


Figura 13: Velocidades angulares  $\dot{\theta}_1$  y  $\dot{\theta}_2$  en función del tiempo variando las condiciones iniciales con el controlador (23).

el controlador 3, en la figura 13 la velocidad de convergencia de los ángulos y de la velocidad al valor deseado son prácticamente idénticas.

Para un análisis sobre la dependencia de la matriz  $\alpha$ , se varía el valor de la constante multiplicativa a la matriz identidad, abusando de la notación se le denomina a esta constante  $\alpha$ . En este caso se registró el esfuerzo realizado por los controladores, es decir, la energía de la señal de salida del controlador.

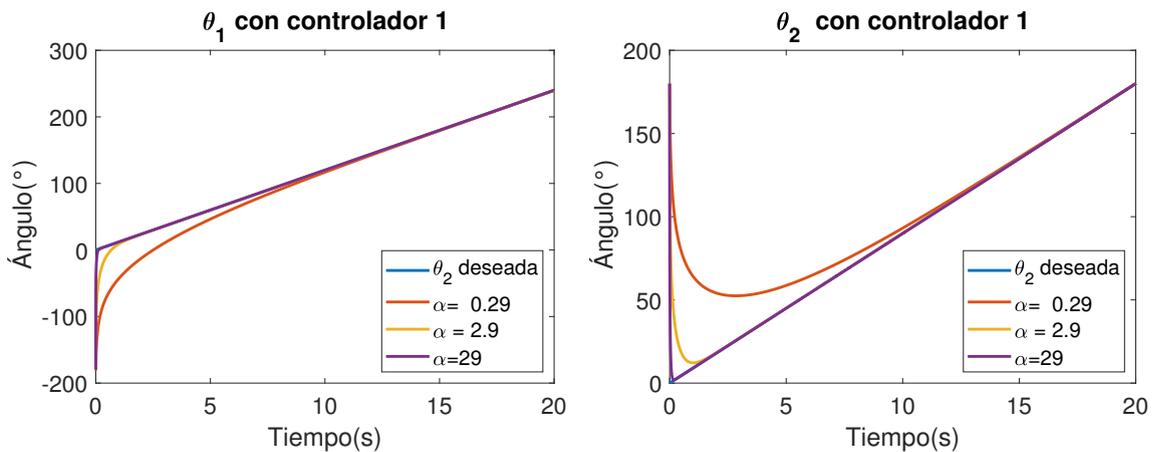


Figura 14: Dependencia del factor  $\alpha$  a las trayectorias angulares del sistema controlado por la ecuación (19) con condición inicial  $\theta_1 = -180^\circ, \theta_2 = 180^\circ$ .

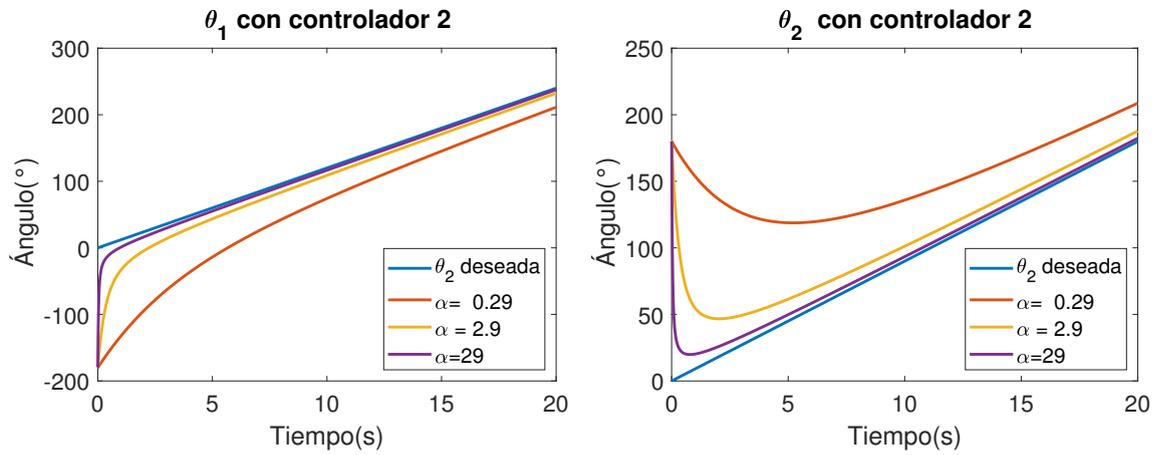


Figura 15: Ángulos  $\dot{\theta}_1$  y  $\dot{\theta}_2$  en función del tiempo variando el parámetro  $\alpha$  con el controlador (21).

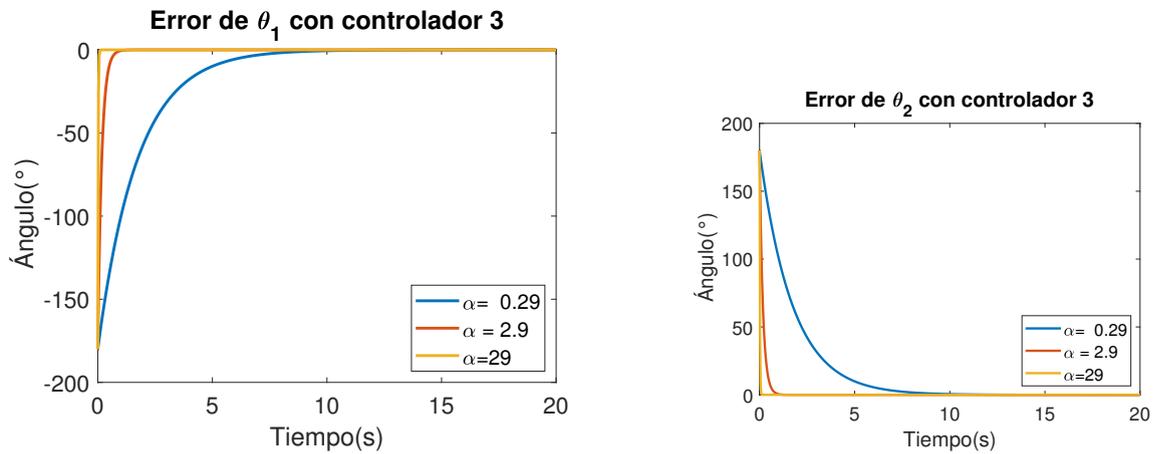


Figura 16: Error en  $\theta_1$  y  $\theta_2$  variando el parámetro  $\alpha$  del controlador (23).

El factor  $\alpha$  en los primeros controladores funciona como un parámetro de regulación, el cual al aumentar su valor, los ángulos se ajustan más rápido a la trayectoria deseada, esto se observa en la figura 14, 15 y 16. Incluso con un valor de  $\alpha$  muy elevado el controlador dos converge. Pero el costo de esto es el esfuerzo, la tabla 1 expresa que al elevar el valor de  $\alpha$  el esfuerzo del controlador aumenta considerablemente.

	Controlador 1		Controlador 2		Controlador 3	
$\alpha$	$E_{\tau_1}((Nm)^2)$	$E_{\tau_2}((Nm)^2)$	$E_{\tau_1}((Nm)^2)$	$E_{\tau_2}((Nm)^2)$	$E_{\tau_1}((Nm)^2)$	$E_{\tau_2}((Nm)^2)$
0.29	$1,6 \times 10^4$	$1,6 \times 10^4$	72.1	20.3	119.2	46.8
2.9	$1,8 \times 10^6$	$1,8 \times 10^6$	547.8	513.0	$3,4 \times 10^3$	$3,5 \times 10^3$
29	$1,9 \times 10^8$	$2,0 \times 10^8$	$5,5 \times 10^4$	$5,6 \times 10^4$	$3,8 \times 10^5$	$3,9 \times 10^5$

Tabla 1: Comparación del esfuerzo del controlador 1, 2 y 3, variando la constante  $\alpha$ , con condición inicial  $\theta_1 = -180^\circ$  y  $\theta_2 = 180^\circ$ .

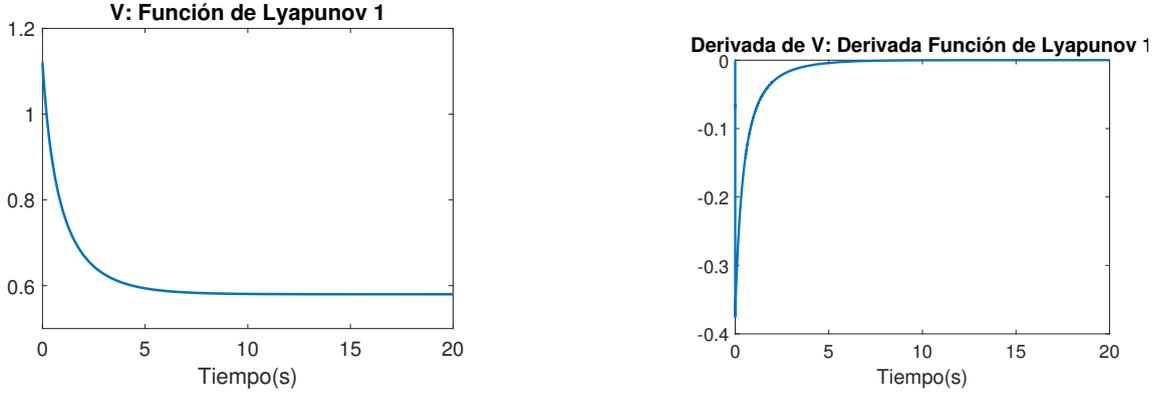


Figura 17: Función y Derivada de la función de Lyapunov con condición inicial  $\theta_1 = -180^\circ$  y  $\theta_2 = 180^\circ$ .

La función de Lyapunov de las figura 17 se comporta de la manera esperada (estrictamente positiva para todos los puntos, menos cuando el error y la derivada del error son nulos). Luego, la función del controlador 2 como no alcanza los puntos de equilibrio, esta es estrictamente positiva en el rango temporal en estudio. Mientras que la función de Lyapunov del controlador 3, ecuación 19, es estrictamente positiva para todos los puntos, ya que es exponencialmente estable. Todas las derivadas de las funciones de Lyapunov son definidas estrictamente negativas a excepción en los puntos de equilibrio.

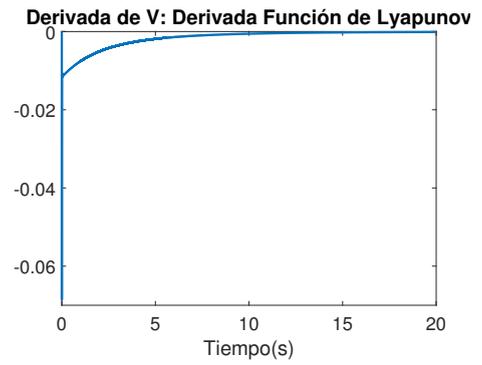
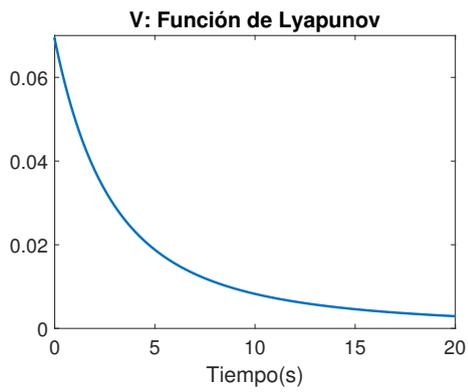


Figura 18: Función de Lyapunov y su derivada con condición inicial  $\theta_1 = -180^\circ$  y  $\theta_2 = 180^\circ$ .

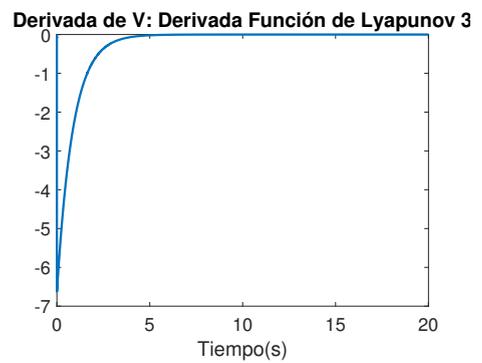
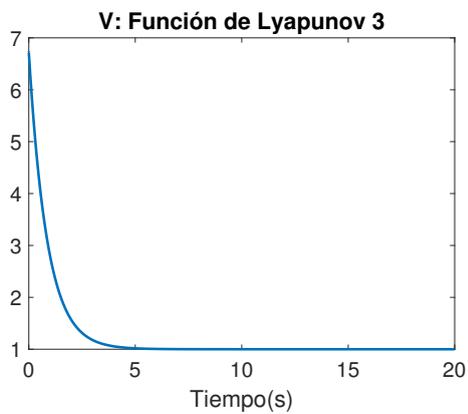


Figura 19: Función de Lyapunov y su derivada con condición inicial  $\theta_1 = -180^\circ$  y  $\theta_2 = 180^\circ$ .

El extremo de la cuchara al ver la figura 2 puede ser descrito en el plano  $XY$  de la forma:

$$\begin{cases} x = L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ y = L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \quad (50)$$

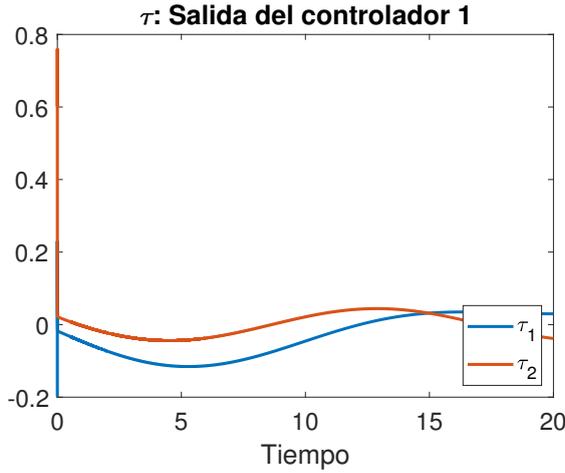


Figura 20: Torque dada por la ecuación (19), con condición inicial  $\theta_1 = -180^\circ$  y  $\theta_2 = 180^\circ$ .

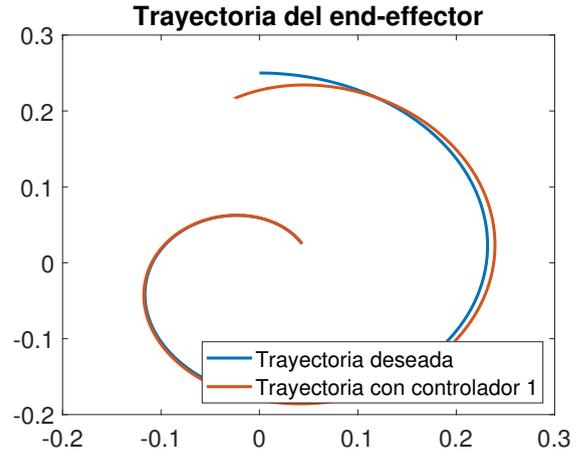


Figura 21: Trayectoria del extremo de la cuchara en el plano  $XY$  con condición inicial  $\theta_1 = -180^\circ$  y  $\theta_2 = 180^\circ$ .

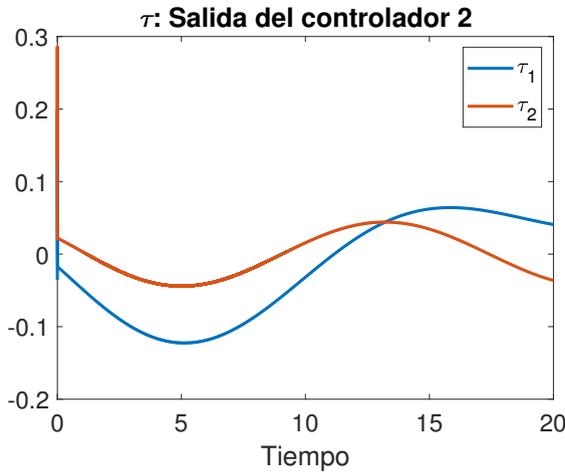


Figura 22: Torque dada por la ecuación (23), con condición inicial  $\theta_1 = -180^\circ$  y  $\theta_2 = 180^\circ$ .

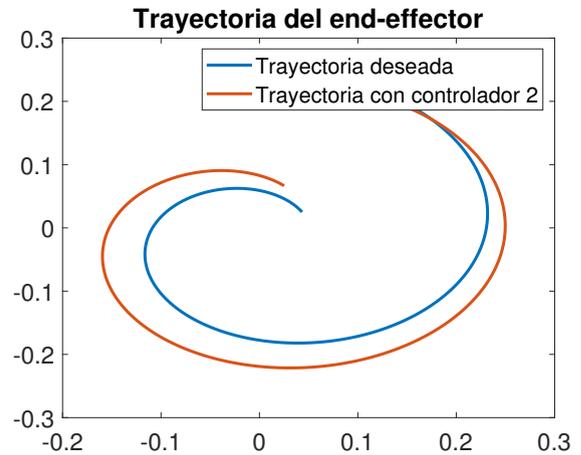


Figura 23: Trayectoria del extremo de la cuchara en el plano  $XY$ , con condición inicial  $\theta_1 = -180^\circ$  y  $\theta_2 = 180^\circ$ .

A pesar que en algunos casos el error es significativo, al momento de observar las trayectorias del extremo de la cuchara 21, y 25, el mismo no genera una diferencia notoria con la trayectoria deseada. A excepción el el caso de la figura 23, que se observa claramente que difiere en todo momento con la trayectoria deseada.

Las salidas de los controladores se observan en las figuras 20, 22 y 24 no presentan grandes diferencias, el valor atípico al principio puede ser un efecto numérico.

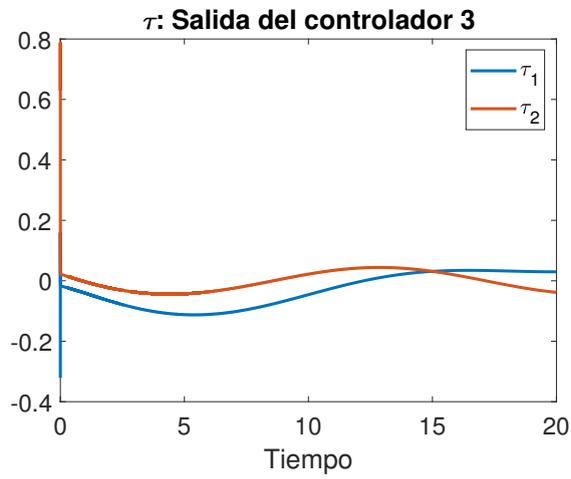


Figura 24: Torque dada por la ecuación (23), con condición inicial  $\theta_1 = -180^\circ$  y  $\theta_2 = 180^\circ$ .

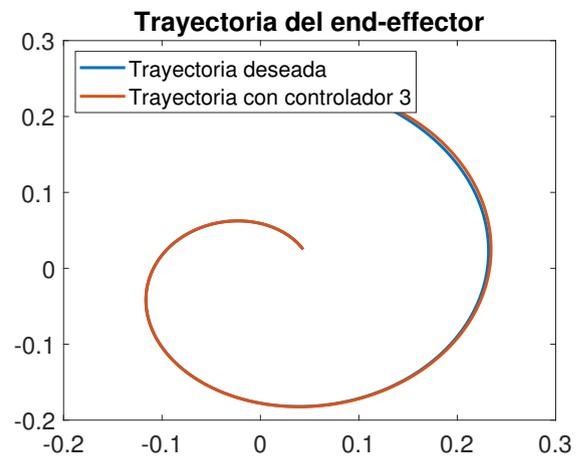


Figura 25: Trayectoria del extremo de la cuchara en el plano XY, con condición inicial  $\theta_1 = -180^\circ$  y  $\theta_2 = 180^\circ$ .

## 5.2. Control Deslizante

La superficie deslizante seleccionada utiliza los parámetros  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  y  $k_1 = k_2 = 1$ , en un principio estos se mantienen constantes y se varía la condición inicial.

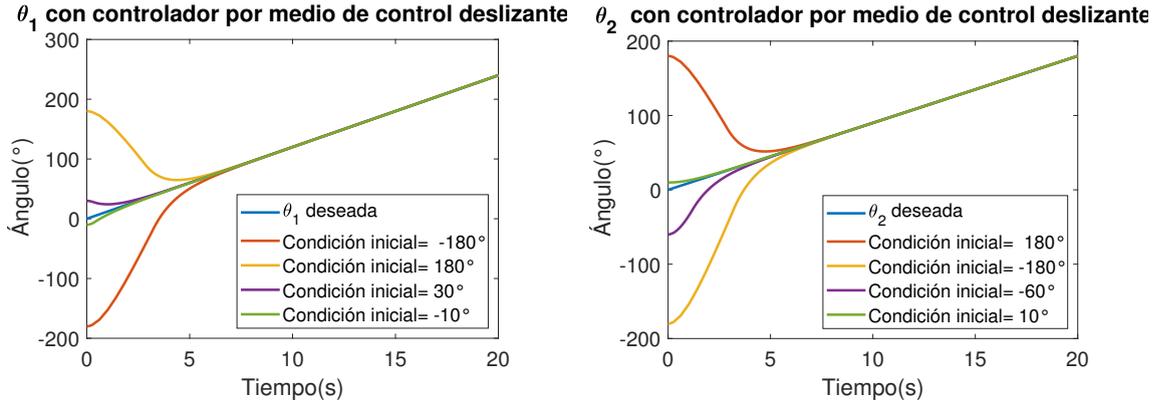


Figura 26: Trayectoria del ángulo  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en función del tiempo variando las condiciones iniciales con el controlador (49).

Al analizar la figura 26 se observa que este se adapta mejor que el controlador 2 a las variaciones de la condición inicial, lo cual es coherente por el método de construcción del mismo, dónde se supone ciertas perturbaciones en el sistema.

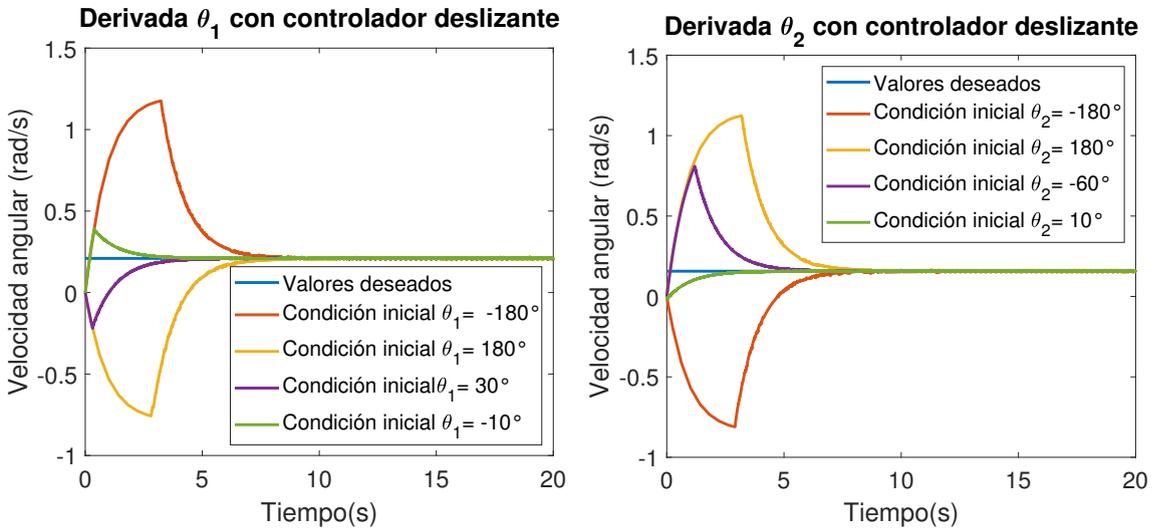


Figura 27: Velocidades angulares  $\dot{\theta}_1$  y  $\dot{\theta}_2$  en función del tiempo variando las condiciones iniciales con el controlador (49).

Al observar la velocidad angular de las articulaciones en la figura 27, existe un punto de inflexión, este punto ocurre en el instante temporal en el cual el vector  $(e_i, \dot{e}_i)$  alcanza la superficie  $S_i$  con  $i = 1, 2$ . Por lo tanto, antes de este punto es la fase “Reaching Mode”, y luego esta la fase “Sliding Mode”, dónde el error se comporta de forma exponencial negativa de parámetro temporal  $\lambda$ , y por lo tanto el error de la velocidad es también una exponencial negativa pero con concavidad opuesta.

Es decir, considerando parámetros A y B dependientes del error (en el ángulo y velocidad en el tiempo  $t_r$ ), cada trayectoria a partir del tiempo  $t_r$  se comporta de la forma:

$$e_i(t) = A_i \exp(-\lambda_i (t - t_{r_i})) + B_i \quad i = 1, 2. \quad (51)$$

$$\dot{e}_i(t) = -A_i \lambda_i \exp(-\lambda_i (t - t_{r_i})) \quad i = 1, 2. \quad (52)$$

Al observar la dependencia de k en la tabla 2, al aumentar el k disminuye el tiempo  $t_r$  y aumenta el esfuerzo del controlador. Sin embargo, en la figura 29 los últimos valores de k no hay prácticamente diferencia en el tiempo de convergencia a error nulo, lo cual es esperable porque modificar k no varía el parámetro temporal de la exponencial.

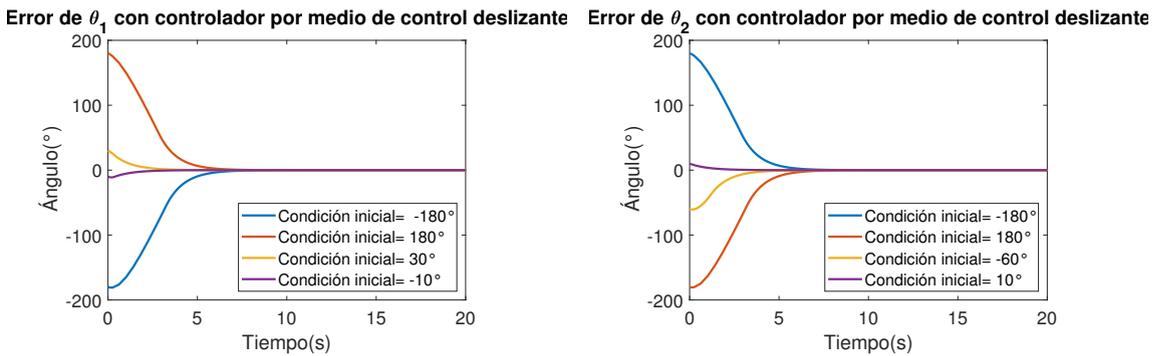


Figura 28: Error en la trayectoria del ángulo  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en función del tiempo variando las condiciones iniciales con el controlador (49).

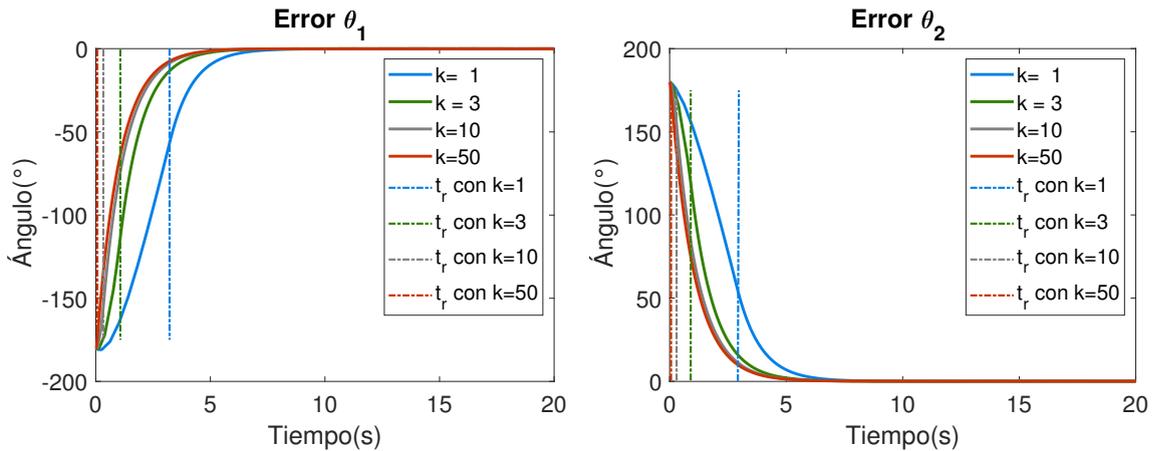


Figura 29: Dependencia del parámetro  $k$  en la trayectoria de  $\theta_1$  y  $\theta_2$  dado por el método de control deslizante (49).

Respecto a la variación del parámetro  $\lambda$ , en la figura 30 se observa que valores muy pequeños o muy elevados afectan fuertemente en la convergencia del método. En la tabla 3 se obtienen los valores obtenidos en cuanto al tiempo  $t_r$  y el tiempo que le lleva al sistema alcanzar un error de  $0,05^\circ$ .

Las figuras 31 se ven claramente las dos fases del método y el chattering de los mismo, además estas convergen al punto  $(0, 0)$ .

k	$E_{r_1} ((Nm)^2)$	$E_{r_2} ((Nm)^2)$	$t_{r_1} (s)$	$t_{r_2} (s)$
1	6.5	1.8	2.9	3.2
3	9.7	2.4	0.9	1.1
10	24.4	14.6	0.3	0.3
50	548.1	188.0	0.07	0.06

Tabla 2: Esfuerzo del control y tiempo  $t_{r_i}$  al variar el parámetro k del controlador con condiciones iniciales  $\theta_1 = -180$  y  $\theta_2 = 180$ .

$\lambda$	$t_{r_1} (s)$	$t_{r_2} (s)$	$t_1$	$t_2$
0.1	0.5	0.2	-	-
0.5	1.8	1.3	9.3	8.9
1	3.2	2.9	6.2	5.9
1.5	4.8	4.5	6.3	6.0

Tabla 3: Comparación de valores de  $\lambda$ , tiempo  $t_{r_i}$  con  $t_i$  con  $i = 1, 2$  el tiempo que transcurre hasta llegar a un error de  $0,05^\circ$ .

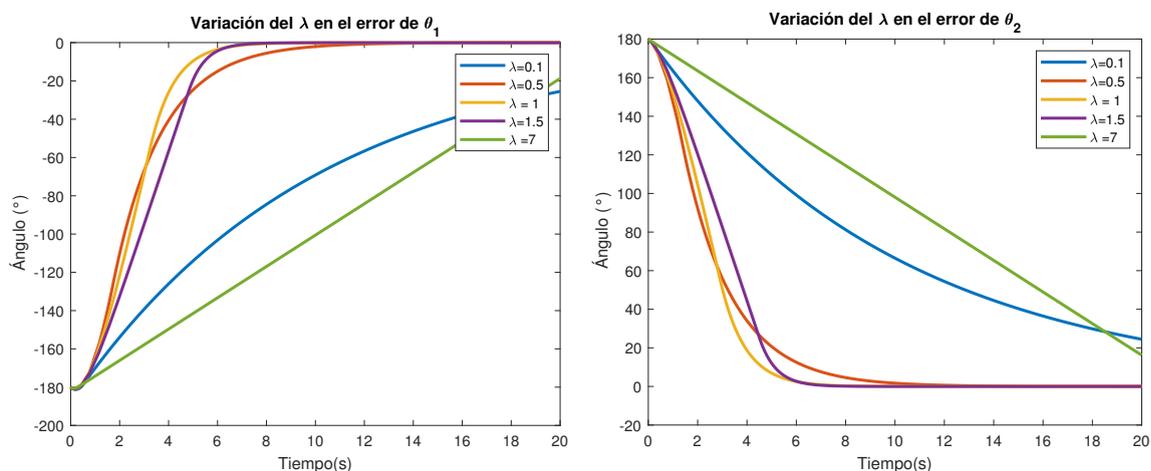


Figura 30: Efecto en el error de la variación de  $\lambda$ .

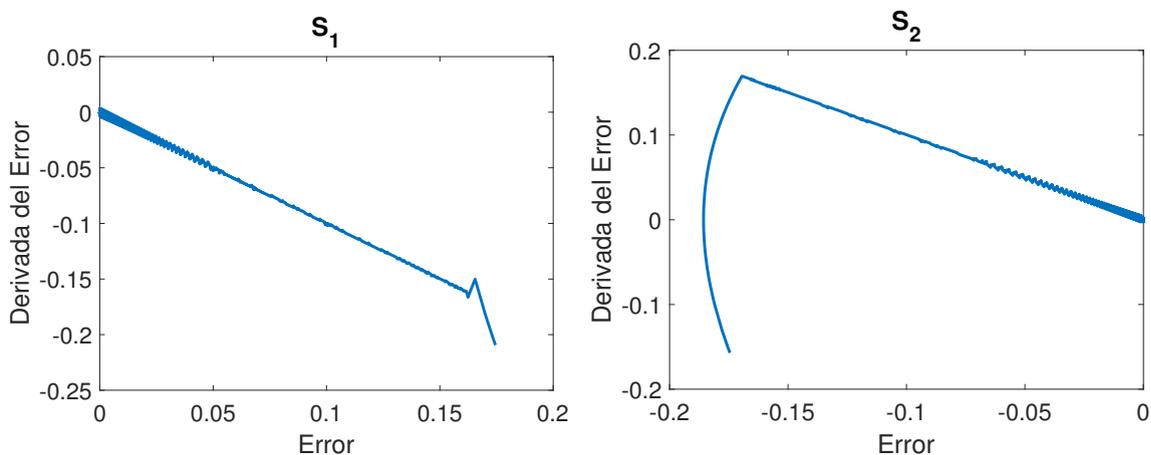


Figura 31: Gráfica del  $\dot{e}_1$  ( derecha ) en función de  $e_1$ , y gráfica del  $\dot{e}_2$  ( izquierda ) en función de  $e_2$ .

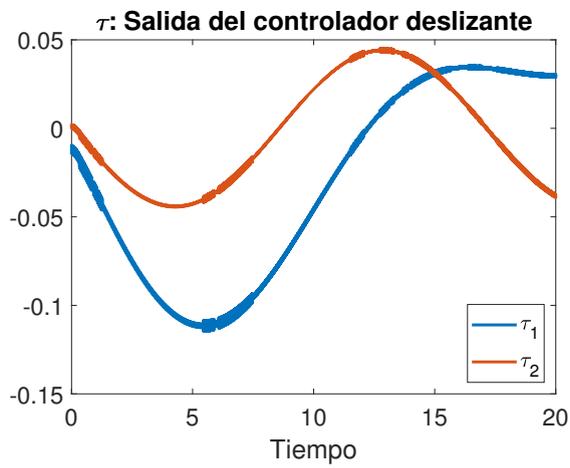


Figura 32: Torque dada por la ecuación (49), con condición inicial  $\theta_1 = -180^\circ$  y  $\theta_2 = 180^\circ$ .

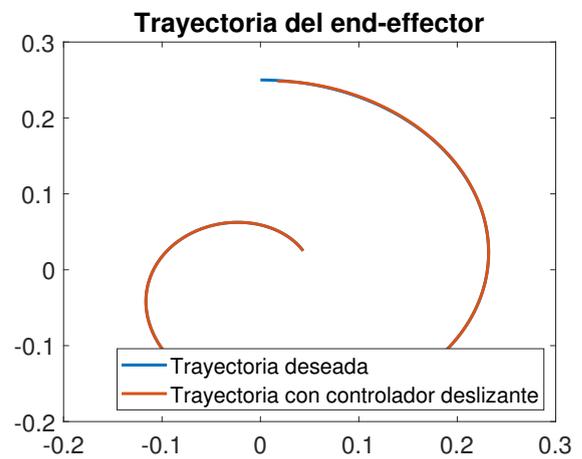


Figura 33: Trayectoria del extremo de la cuchara en el plano XY, con condición inicial  $\theta_1 = -180^\circ$  y  $\theta_2 = 180^\circ$ .

### 5.3. Comparaciones

En esta parte se recopilaran todos los datos comparativos de los controladores. Los controladores 1,2 y 3 el parámetro  $\alpha = 0,3I$ , y en el controlador deslizante  $\lambda = 1$ ,  $k = 1$ . En algunos casos se ignora al controlador 2 ya que este no alcanza los requisitos de convergencia en el error.

	Ctrl 1((Nm) <sup>2</sup> )	Ctrl 3((Nm) <sup>2</sup> )	Ctrl Deslizante((Nm) <sup>2</sup> )
$E_{\tau_1}$	86.3	75.4	26.4
$E_{\tau_2}$	18.2	17.9	6.0

Tabla 4: Comparación de los esfuerzos de control de cada controlador 1, 2 y deslizante con condición inicial  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $\theta_2 = -60^\circ$ .

	$t_1(s)$	$t_2(s)$
Ctrl 1	10.9	12.7
Ctrl 3	5.6	6.9
Ctrl Deslizante	3.04	4.7

Tabla 5: Comparación del tiempo  $t_1$  y  $t_2$  para los distintos controladores.

En la tabla 5, se comparara  $t_1$ , que es el tiempo en el cual el error  $\theta_1 - \theta_{1_d}$  es menor a 0,02 con condición inicial  $[\theta_{1_0}, \theta_{2_0}] = [30, -60]$ , de forma análoga se define  $t_2$ , de la misma se observa que el controlador deslizante es el que posee convergencia más rápida.

Al comparar los esfuerzos de cada controlador, en la tabla 4 el controlador 1 es el que presenta mayor esfuerzo, mientras que el controlador deslizante menos.

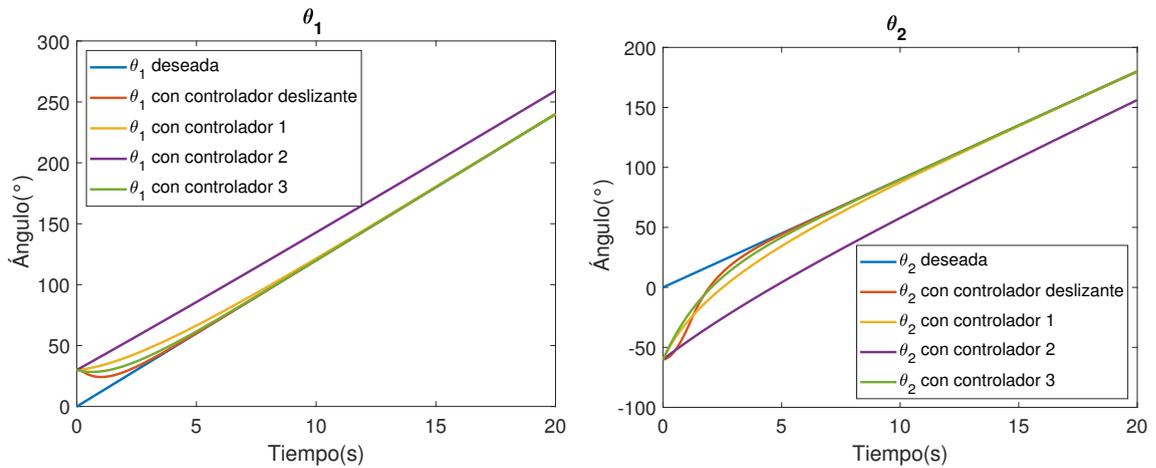


Figura 34: Comparación de controladores para las trayectorias  $\theta_1$  y  $\theta_2$  con condición inicial  $\theta_{1_0} = 30^\circ$ ,  $\theta_{2_0} = -60^\circ$ .

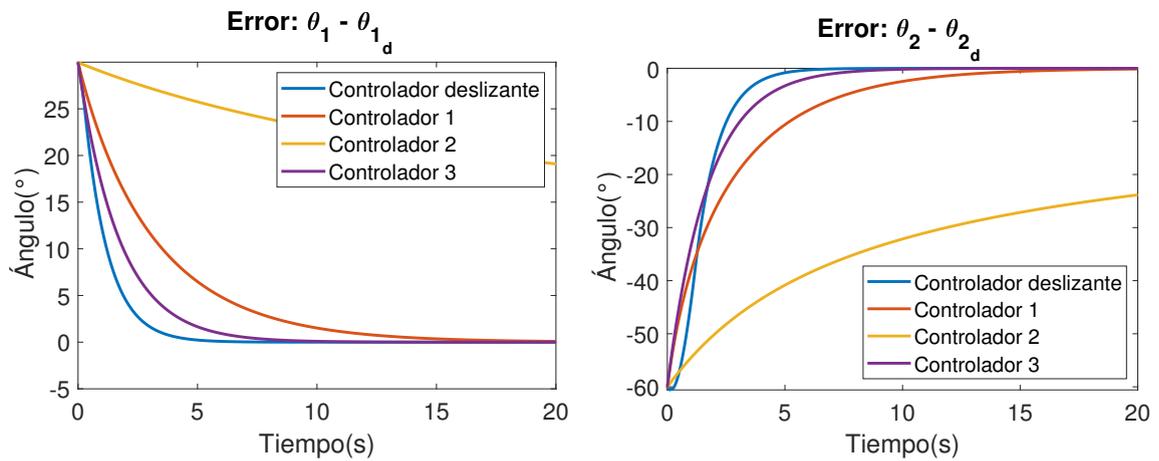


Figura 35: Comparación entre controladores del error en la trayectoria del ángulo  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en función del tiempo con condición inicial  $\theta_{1_0} = 30^\circ$ ,  $\theta_{2_0} = -60^\circ$ .

En la figura 34 se observan las trayectorias, las diferencias entre estas se aprecian mejor en la figura 35, dónde el controlador deslizante presenta el menor error, luego el controlador 3 y seguidos por el controlador 1 y 2. Sin embargo, con esta condición inicial todos a excepción del controlador 2 terminan en la posición deseada, este efecto se observa también en la trayectoria en la figura 36.

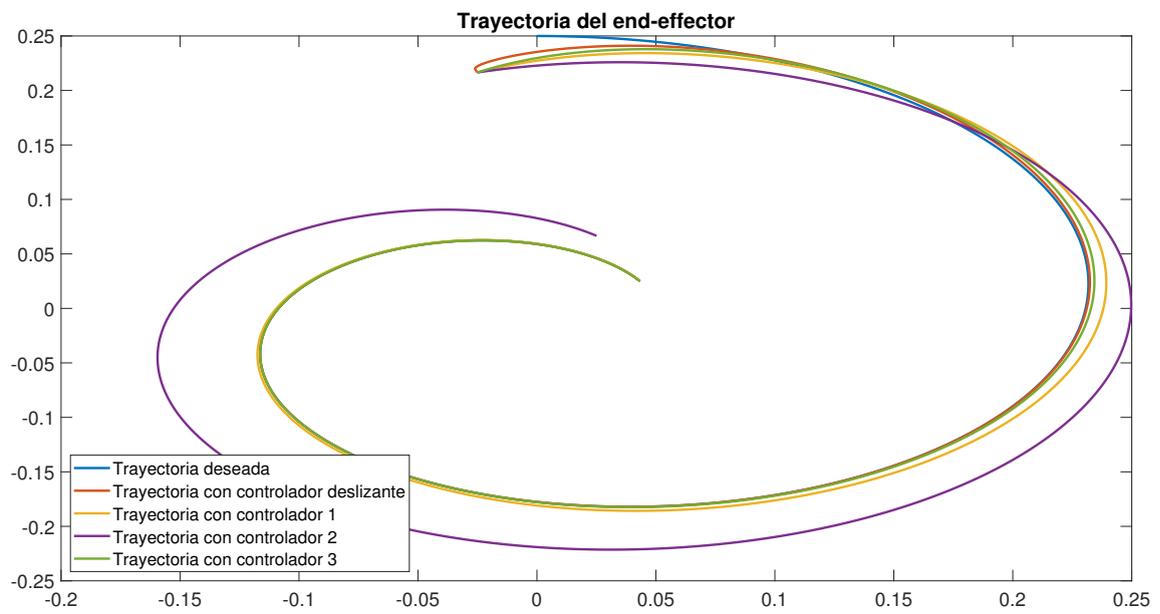


Figura 36: Comparación de controladores en el plano XY, con condición inicial  $\theta_{1_0} = 30^\circ$ ,  $\theta_{2_0} = -60^\circ$ .

## 6. Conclusiones

Un estudio de la región de atracción de los cuatro controladores fue realizado, lo que implicó resultados muy interesantes, por ejemplo el controlador 1, que genera una estabilidad asintótica, presenta un alto grado de asimilación a las perturbaciones en la condición inicial, convergiendo a los puntos de equilibrio en todo el rango angular válido. El controlador 3 y el controlador deslizante tienen mejor desempeño en este caso, pero esto era esperado por la construcción de los mismos. Mientras que el rango de atracción generado por el controlador dos muy reducido.

Al evaluar las variaciones de los distintos parámetros de cada controlador, observamos que se puede modificar el tiempo de convergencia a costo de aumentar el esfuerzo del controlador. Por lo tanto es difícil considerar el valor óptimo del mismo, y un valor válido para comparar los distintos métodos.

El objetivo de cumplir una trayectoria dada fue satisfecho, con la mayoría de los controladores a condiciones iniciales dentro de un rango de  $60^\circ$  de apartamiento de la posición inicial  $(0, 0)$ . Pero el controlador dos no converge a error nulo al perturbar la condición inicial, por lo cual no sería pertinente utilizarlo.

Es posible realizar un estudio entre los restantes controladores considerando esfuerzo vs velocidad de convergencia. Primero, si analizamos los primeros controladores realizados por el mismo método, tenemos que el controlador 3 es el que presenta mejor desempeño, reduciendo a más de la mitad la tiempo de convergencia, y esfuerzo menor por lo cual se elegiría a este último como el mejor. Sin embargo, el controlador deslizante presenta mayor velocidad de convergencia con este último y el esfuerzo es considerablemente menor, pero el mismo presenta el efecto del chattering que claramente va a desgastar los servos utilizados en el brazo.

En conclusión, se considera que el mejor controlador a utilizar es el controlador deslizante, es recomendable variar la función discontinua *signo* por alguna equivalente como *tanh* o *sat*.

## Referencias

- [1] Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear systems* (2nd ed.). New Jersey: Prentice-Hall.
- [2] Guechi, E.-H.; Bouzoualegh, S.; Messikh, L.; Blažic, S. *Model predictive control of a two-link robot arm*. In Proceedings of the 2nd International Conference on Advanced Systems and Electric Technologies, Hammamet, Tunisia, 22–25 Marzo 2018; pp. 409–414.
- [3] Oliver Ordaz, J.P; Ramírez Domínguez, O. A. *Trajectory Tracking Control for Robotics Manipulators Based on Passivity*. Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference 2008.
- [4] Fallaha J.-C, Saad M. *Sliding-Mode Robot Control With Exponential Reaching Law*. IEEE Transactions On Industrial Electronics, Vol. 58, N°. 2, Febrero 2011; pp. 600-610.