N^o de examen	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Respuestas

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	Ej. 6
Ej. 7	Ej. 8	Ej. 9	Ej. 10	Ej. 11	Ej. 12

Importante

- El examen dura 4 horas.
- Cada ejercicio vale $8+\frac{1}{3}$ puntos.
- El puntaje obtenido será redondeado al entero más cercano.
- El parcial es de 100 puntos en total.
- Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- No se restan puntos por respuesta incorrecta.
- El examen se aprueba con 60 o más puntos.

Tabla de $\Phi(z)$ (normal estándar)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Tabla de t Student

	Probabilidad de cola derecha $P(t \geq c)$										
GdL	**.25**	**.20**	**.15**	**.10**	**.05**	**.025**	**.02**	**.01**	**.005**	**.0025**	**.001**
1	1.00	1.38	1.96	3.08	6.31	12.71	15.89	31.82	63.66	127.32	318.31
2	0.82	1.06	1.39	1.89	2.92	4.30	4.85	6.96	9.92	14.09	22.33
3	0.76	0.98	1.25	1.64	2.35	3.18	3.48	4.54	5.84	7.45	10.21
4	0.74	0.94	1.19	1.53	2.13	2.78	3.00	3.75	4.60	5.60	7.17
5	0.73	0.92	1.16	1.48	2.02	2.57	2.76	3.36	4.03	4.77	5.89
6	0.72	0.91	1.13	1.44	1.94	2.45	2.61	3.14	3.71	4.32	5.21
7	0.71	0.90	1.12	1.41	1.89	2.36	2.52	3.00	3.50	4.03	4.79
8	0.71	0.89	1.11	1.40	1.86	2.31	2.45	2.90	3.36	3.83	4.50
9	0.70	0.88	1.10	1.38	1.83	2.26	2.40	2.82	3.25	3.69	4.30
10	0.70	0.88	1.09	1.37	1.81	2.23	2.36	2.76	3.17	3.58	4.14

Ejercicio 1

Hay n estudiantes en una clase ($n \geq 4$). Algunos de los estudiantes reclamaron un error en sus notas en una determinada prueba. Las respuestas fueron revisadas y los puntajes de cuatro estudiantes aumentaron de 70 a 90.

¿Cómo afecta este cambio al puntaje promedio de la clase?

Solución:

Sea S la suma de notas de los estudiantes antes de que se corrigiera el error. Al corregir los 4 errores la nueva suma de notas es $S+80$ por lo cual el nuevo promedio es $\frac{S+80}{n} = \frac{S}{n} + \frac{80}{n}$. Es decir el promedio aumentó $\frac{80}{n}$.

Ejercicio 2

Se quiere verificar el funcionamiento correcto de una maquina de café a monedas. Para esto se mide la cantidad de café vertido en 9 ocasiones diferentes, obteniéndose que la media muestral del contenido de los vasos es 26.2 ml, y el desvío **muestral** 2 ml.

Asumiendo que los datos son independientes y tienen distribución normal, se desea realizar un test de hipótesis al nivel 5 % para la hipótesis nula: la cantidad media servida es 25 ml frente a la alternativa: la media es diferente de 25 ml.

El valor observado del estadístico T_{obs} y la región de rechazo para el test R son:

Solución:

El estadístico para el test t es $T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{S_n}$ donde en nuestro caso $n = 9$ y bajo la hipótesis nula $\mu = 25$. Se obtiene

$$T_{obs} = \frac{3(26.2 - 25)}{2} = 1.8.$$

Bajo la hipótesis nula T tiene distribución de student con 8 grados de libertad. Como la hipótesis alternativa es a dos colas obtenemos la región de rechazo

$$R = (-\infty, -2.31] \cup [2.31, +\infty).$$

Ejercicio 3

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en $[0,1]$. Hallar la esperanza $\mathrm{E}\left(X^3\right)$.

Solución:

Calculando directamente se obtiene:

$$\mathrm{E}\left(X^3\right) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

Ejercicio 4

Un dado equilibrado se lanza 6 veces. Se consideran los siguientes dos eventos:

$$A = \{\text{sale al menos un seis}\}$$
$$B = \{\text{ocurre al menos una coincidencia}\}$$

en donde una "coincidencia" se da en el i-ésimo lanzamiento cuando sale i en dicho lanzamiento.

Indicar la opción correcta: ...

Solución:

Fijemos A_i para el evento de que la i-ésima tirada salió 6. Observamos que los A_i son independientes entre sí, y todos tienen probabilidad $1/6$. Se obtiene

$$P(A) = P(A_1 \cup \cdots \cup A_6) = 1 - P(A_1^c \cap \cdots \cap A_6^c) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6.$$

Definiendo B_i como el evento de que la i-ésima tirada salió i. Los B_i son eventos independientes y tienen probabilidad $1/6$. Por lo tanto:

$$P(B) = P(A).$$

Ejercicio 5

Una urna contiene 3 bolas rojas y 2 azules. Una segunda urna contiene un número desconocido de bolas rojas y 4 bolas azules. Se extrae una bola de cada urna al azar, y la probabilidad de obtener dos bolas del mismo color es $17/35$.

¿Cuántas bolas rojas hay en la segunda urna?

Solución:

Sea N el número de bolillas rojas de la segunda urna. Si A es el evento "se extrajeron dos bolillas del mismo color" tenemos

$$P(A) = \frac{3}{5} \times \frac{N}{N+4} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{N+4} = \frac{17}{35}.$$

Se obtiene como solución a esta ecuación: $N = 3$.

Ejercicio 6

El puntaje de un estudiante en un examen de cálculo es una variable aleatoria con valores en [0,100], esperanza 50 y varianza 25. Se asume que los puntajes de los estudiantes son independientes.

Si una clase de 100 estudiantes toma el examen, usando el TCL aproximar la probabilidad de que el promedio de los puntajes de la clase caiga entre 50 y 51.

Solución:

Llamemos X el promedio. Se cumple $\mathrm{E}(X) = 50$ y $\mathrm{Var}(X) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. Por lo tanto $Z = 2(X - 50)$ tiene esperanza 0 y varianza 1. Aproximando Z por una variable normal estandard obtenemos

$$P(50 \leq X \leq 51) = P(0 \leq Z \leq 2) \approx \Phi(2) - \Phi(0) \approx 0.4772$$

Ejercicio 7

Un químico desea detectar una impureza en cierto compuesto que él mismo prepara. Dispone de una prueba que detecta la impureza si está en el compuesto con probabilidad 90 % e indica que hay una impureza cuando en realidad no la hay con probabilidad 5 %. Se sabe que el químico produce compuestos con la impureza presente el 20 % de las veces.

¿Cuál es la probabilidad de que un compuesto tenga realmente una impureza **dado** que el test indica que la tiene?

Solución:

Llamemos D al evento de que la prueba detecta una impureza, H al evento de que haya realmente una, y N al evento de que no haya. Calculamos

$$P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D|H)P(H) + P(D|N)P(N)} = \frac{0.9 \times 0.2}{0.9 \times 0.2 + 0.05 \times 0.8} = \frac{0.18}{0.22} = \frac{9}{11}.$$

Ejercicio 8

Se tiene dos urnas con tickets. La primera urna contiene 2/3 de los tickets con el número 1 escrito en ellos, y 1/3 con el número 2. La segunda urna contiene 1/3 de los tickets con el número 2 y 2/3 con el número 3.

Una moneda tiene probabilidad p de salir cara. Si al lanzarla sale cara, se extrae un ticket de la primera urna, si sale cruz se extrae un ticket de la segunda urna.

Este procedimiento se repite 10 veces y se observan los siguientes tickets:

$$2, 1, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 1, 3.$$

Calcular una estimación de p basada en el método de máxima verosimilitud.

Solución:

Sea X_i el resultado de la i-ésima extracción. Se obtiene

$$P(X_i = 1) = \frac{2p}{3}, P(X_i = 2) = \frac{1}{3}, P(X_i = 3) = \frac{2(1-p)}{3}.$$

Solución:

Como salió 2 veces el 1, 5 veces el 2, y 3 veces el 3 la función verosimilitud es:

$$L(p) = \left(\frac{2p}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2(1-p)}{3}\right)^3 = Cp^2(1-p)^3),$$

donde C es cierta constante.

Derivando e igualando a cero se obtiene

$$L'(p) = 2Cp(1-p)^3 - 3Cp^2(1-p)^2 = 0,$$

de donde el estimador de máxima verosimilitud cumple

$$2(1-p) = 3p$$

o

$$p = 2/5.$$

Ejercicio 9

Un estimador $\hat{\theta}$ de un parámetro θ tiene distribución normal. Se sabe además que

$$\operatorname{Var}\left(\hat{\theta}\right) = 4, \quad P\left(\hat{\theta} \leq \theta\right) = 0.9332.$$

Hallar el error cuadrático medio de $\hat{\theta}$.

Solución:

Usando la tabla normal obtenemos que θ está 1.5 desvíos por encima del valor medio esperado del estimador $\mathrm{E}\left(\hat{\theta}\right)$. Por lo tanto

$$\mathrm{ECM}(\hat{\theta}) = \operatorname{Var}(\hat{\theta}) + \operatorname{Sesgo}(\hat{\theta})^2 = 4 + 3^2 = 13.$$

Ejercicio 10

Se asume que las alturas (en pulgadas) de los estudiantes de una universidad tienen una distribución normal de varianza 25. Queremos construir un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población, y que tenga una precisión de 1 pulgada. (Recordar que la precisión es el largo del intervalo, es decir la diferencia entre el máximo y mínimo valor del mismo.)

El tamaño mínimo de muestra requerido es: ...

Solución:

Sea $\overline{X_n}$ el promedio de alturas para una muestra de tamaño n. Bajo el modelo $\overline{X_n}$ es una variable normal con media μ (el parámetro para el cuál queremos construir un intervalo de confianza) y varianza $25/n$.

Por lo tanto $Z_n = \sqrt{n}\frac{\overline{X_n}-\mu}{5}$ es una variable normal estandard y

$$P(-1.96 \leq Z_n \leq 1.96) = 0.95.$$

De ahí se obtiene que el intervalo $I_n = [\overline{X_n} \pm \frac{5}{\sqrt{n}}1.96]$ es de nivel 95 %.

Se requiere entonces $\frac{5}{\sqrt{n}}1.96 \leq 0.5$ de donde $385 \leq n$.

Ejercicio 11

A un grupo de estudiantes de inglés se les toma un examen al comienzo del curso y otro al final. Se asume que las notas tienen distribución normal bi-variada de parámetros:

	Media	Desvío
1er examen	50	15
2do examen	70	8
Correlación	0.5	

¿Qué porcentaje de estudiantes sacó en el segundo examen al menos 5 puntos más que en el primero?

Solución:

Sea (X,Y) una normal bi-variada donde X tiene media 50 y desvío 15, mientras que Y tiene media 70 y desvío 8, y la correlación es $\frac{1}{2}$.

El par (U,V) donde $U = \frac{X-50}{15}$ y $V = \frac{Y-70}{8}$ es normal estandard con correlación $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto existe Z normal estandard independiente de U tal que $V = \frac{1}{2}U + \frac{\sqrt{3}}{2}Z$.

Usando esto se obtiene

$$\begin{aligned}
P(X+5 \leq Y) &= P(15U+50+5 \leq 8V+70) \\
&= P(15U \leq 8V+15) \\
&= P\left(15U \leq 4U+4\sqrt{3}Z+15\right) \\
&= P\left(11U-4\sqrt{3}Z \leq 15\right)
\end{aligned}$$

La variable $W = 11U - 4\sqrt{3}Z$ es normal de esperanza 0 y varianza $169 = 13^2$. Obtenemos

$$P(W \leq 15) = P\left(\frac{W}{13} \leq 15/13\right) = \Phi(15/13) \approx 0.87.$$

Ejercicio 12

Con el objetivo de aproximar π se tiran 100 puntos al azar (ambas coordenadas independientes y con distribución uniforme) independientes en el cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$ utilizando como aproximación la variable aleatoria $Y = 4X/100$ donde X es el número de puntos que cayeron a distancia menor que 1 del punto $(0,0)$.

Calcular la varianza de Y.

Solución:

Fijemos $X = X_1 + \cdots + X_{100}$ donde X_i vale 1 si la i-ésima tirada cayo en el círculo y 0 si no. Cada X_i es Bernoulli de parámetro $p = \frac{\pi}{4}$ y por lo tanto tiene varianza $p(1-p)$.

Se obtiene

$$\operatorname{Var}(Y) = \frac{4^2}{100^2}\operatorname{Var}(X) = \frac{4^2}{100^2}100\operatorname{Var}(X_1) = \frac{4^2}{100}p(1-p) = \frac{4\pi(1-\pi/4)}{100}$$
