

EXAMEN DICIEMBRE
LUNES 19 DE DICIEMBRE DE 2016.

Número de Parcial	Cédula	Nombre y Apellido

PARA USO DOCENTE			
Ej. 1	Ej. 2	Ej.3	TOTAL

Ejercicio 1. [20 puntos]

Cierto entrenador de baby fútbol tiene predilección por los niños zurdos. Si un niño es zurdo, juega en todas las fechas del campeonato. Si es diestro, tiene probabilidad $2/3$ de jugar en cualquier fecha dada, y no depende de cuántas veces haya jugado antes. Sabemos que $1/10$ de los niños del club son zurdos.

- Si Pedro juega en la primera fecha, ¿cuál es la probabilidad de que sea zurdo?
 - Si Pedro juega en las primeras tres fechas ¿cuál es la probabilidad de que sea zurdo?
- En este club, cada niño tiene una camiseta con su nombre en la espalda. Luis y Celso son dos mellizos que el entrenador es incapaz de distinguir. Luis es zurdo y Celso es diestro. Cada fin de semana estos dos niños tiran una moneda equilibrada, y si sale cara se intercambian las camisetas, engañando al entrenador.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que Celso juegue un determinado partido? ¿Y Luis?
 - Si el campeonato tiene doce fechas, ¿cuántas veces esperamos que juegue Luis? Justifique su respuesta.

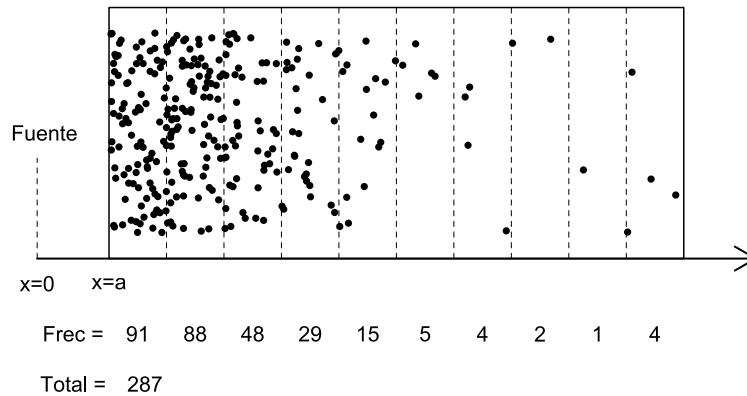
Ejercicio 2. [45 puntos]

Partículas inestables se emiten desde una fuente ubicada en la posición $x = 0$ como en la figura. Cada partícula viaja en línea recta horizontalmente y se desintegra a una distancia X de la fuente. Se asume que X tiene distribución exponencial de parámetro desconocido $\lambda > 0$.

Sin embargo, estos eventos de desintegración se pueden observar solamente si ocurren en una ventana $V = [a, \infty)$. Llamemos X_V a la distancia de desintegración de las partículas observadas en V . En la siguiente figura se muestran las partículas que se desintegran en la ventana V . La porción de la ventana donde se observan partículas desintegradas se ha dividido en 10 intervalos de longitud 10 cm, y se muestra la cantidad de partículas desintegradas en cada intervalo. El total de partículas en la ventana es 287.

- Hallar $p(\lambda, a)$ la probabilidad de que una partícula se desintegre fuera de la ventana V .
 - Suponiendo que la cantidad de partículas emitidas por la fuente es $N = 500$ y que $a = 10$ cm, hallar una estimación para λ .

Muestra del decaimiento de partículas



2. En esta parte suponemos que se desconoce la cantidad N de partículas emitidas por la fuente.

- (a) Probar que para todo $x \geq a$, la probabilidad condicional de $\{X \leq x\}$ dado que la partícula se desintegra en la ventana $\{X \in V\}$ está dada por

$$P(X \leq x | X \in V) = 1 - e^{-\lambda(x-a)}.$$

- (b) Denotamos por $F_V(x) = P(X \leq x | X \in V)$, $x \in \mathbb{R}$ a la función de distribución de X_V . Hallar la densidad y el valor esperado de X_V .
- (c) i. Sea X_V^1, \dots, X_V^n una muestra i.i.d. de distribución F_V . Hallar el estimador de máxima verosimilitud λ_{MV} de λ .
- ii. Sabiendo que $a = 10$ y $\sum_{i=1}^{i=287} X_V^i = 7399.711$, calcular λ_{MV} .
- iii. Con los mismos datos que antes y asumiendo que $\lambda = \lambda_{MV}$, dar una estimación para la cantidad N de partículas emitidas.

Ejercicio 3. [35 puntos]

El número de autos N que pasan por un peaje del Uruguay en un intervalo de 1 minuto, se puede describir mediante una variable aleatoria Poisson de parámetro λ . La siguiente tabla muestra los datos de la cantidad de autos contabilizados en 100 días durante el mismo minuto cada día:

Nro. de autos	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Frecuencia	2	1	2	7	7	12	14	17	8	13	5	6	3	3

1. Realizar un histograma de N . Indicar, primer cuartil, mediana, moda y tercer cuartil de los datos.
2. A partir de los datos, estimar la esperanza y la varianza de N .
3. Hallar un intervalo de confianza aproximado al nivel 0.9 para λ .
4. (a) Plantear un test de hipótesis aproximado para testear:

$$\begin{cases} H_0 : \lambda = 10 \\ H_1 : \lambda < 10 \end{cases}$$

- (b) ¿Cuál es la decisión para los niveles $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.1$ y $\alpha = 0.5$?
- (c) Hallar el p -valor.
- (d) Para la hipótesis alternativa $H_1 : \lambda = 9.99$ y $\alpha = 0.1$, hallar la probabilidad de error de tipo II.