Solución - Examen de Probabilidad y Estadística

Lunes 16 de diciembre de 2013

C	E	E	F	

Problema 1 (20 puntos)

(1) El mensaje se envía en cadena, y se requieren tres envíos. Cada envío responde a una variable aleatoria geométrica de parámetro $p = 1/2$, pues las monedas son justas. Como la cantidad de días entre envíos es independiente, resulta que la variable X es suma de tres variables geométricas independientes de parámetro $1/2$, es decir, binomial negativa: $X \sim BN(3, 1/2)$.

(2) Ahora los dos amigos del originario de la novedad van a recibir el mensaje en una cantidad geométrica de días, mientras que el último usuario, que no es amigo del destinatario, tendrá que esperar por el envío del primero de sus amigos. Sean $Z_1, Z_2, Z_3 \sim Geo(p)$, que corresponden con la cantidad de dás entre el recibo y envío del mensaje del originario (Z_1) y sus amigos (Z_1 y Z_2). Entonces el tiempo que tardará el último usuario de grupo en recibir el mensaje es $Y = Z_1 + \min\{Z_2, Z_3\} = \min\{Z_1 + Z_2, Z_1 + Z_3\}$, siendo tanto $Z_1 + Z_2$, $Z_1 + Z_3$ variables aleatorias binomiales negativas (no independientes).

(3) La esperanza de una variable aleatoria $BN(k, p)$ es k/p, por lo que $E(X) = 6$. Siguiendo la sugerencia se observa que $X = Z_1 + Z_2 + Z_3$ es igualdad válida en distribución, por lo que $X - Y = Z_2 + Z_3 - \min\{Z_2, Z_3\} = \max\{Z_2, Z_3\}$, siendo Z_2 y Z_3 variables iid geométricas de parámetro $1/2$. Luego, $F_{X-Y}(k) = F_{Z_2}(k)F_{Z_3}(k) = (1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k)^2$. Como $X - Y$ es variable positiva resulta que:

$$E(X - Y) = \sum_{k=1}^{+\infty}[1 - F_{X-Y}(k)] = \sum_{k=1}^{+\infty}[2(1/2)^k + (1/4)^k] = 2 + 1/3 = 7/3.$$

Luego $E(Y) = E(X) - E(X - Y) = 6 - 7/3 = 11/3$, y claramente $E(Y) < E(X)$, por lo que el segundo protocolo de comunicación es preferible.

Problema 2 (30 puntos)

(1) Aplicando el test de rachas para $N = 7$ y $R = 3$ tenemos el p-valor $\alpha^* = 0.1909 > 0.05$ con lo cual no se descarta la hipótesis nula bajo este test.
Para el test de correlación de rangos se obtiene el estadístico $r_s = 0.5357$ del cual se desprende $\alpha^* = 0.118 > 0.05$. Por lo tanto no se rechaza la hipótesis de aleatoriedad de la muestra.

(2) Estimando u mediante $\overline{X_n}$ y σ^2 por s_n^2, aplicamos el test de Lilliefors para normales, obteniendo el estadístico $L = 0.157 < 0.300$ (D_7 obtenido de la tabla). Por lo tanto no se descarta la hipótesis de normalidad.

(3) Aplicamos el test de Kolmogorov-Smirnov para decidir entre $H_0 : X \sim N(20, 2^2)$ y $H_1 : \textit{no}\ H_0$ siendo X una variable con distribución como la muestra. Obtenemos así el estadístico $KS = 0.4103 < 0.486$ (obtenido de la tabla del test K-S). Por lo tanto no se descarta la hipótesis nula. Entonces, no se descarta ni la normalidad a secas ni la normalidad con los parámetros propuestos.

Múltiple Opción 1

Se deduce de la definición que $E(X) = E(Y) = m_X = m_Y = 1/2$, y que $Var(X) = Var(Y) = 1/12$. Además siempre se cumple que $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, y en este caso se tiene que $E(X+Y) = 1$. Puesto que X, Y son independientes tenemos que $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 1/6$. Por simetría tenemos que $P(X+Y > 1) = P(X+Y < 1)$, y por lo tanto $m_{X+Y} = 1 = m_X + m_Y$, por lo que la opción correcta es la C.

Múltiple Opción 2

La región de Neyman y Pearson se deduce de tomar cociente de verosimilitudes, y es $R_{NP} = \{\overline{X}_n < \frac{p_0+p_1}{2}\}$. Calculemos β en forma aproximada, mediante el Teorema Central del Límite:

$$\begin{aligned}\beta = P_{H_1}(R_{NP}^C) &= P(\frac{\overline{X}_n - p_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\sqrt{n} > (\frac{p_0+p_1}{2} - p_1)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}) \\ &\approx 1 - \phi(\frac{p_0-p_1}{2}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}),\end{aligned}$$

luego $\pi = 1 - \beta$, y la opción correcta es la E.

Múltiple Opción 3

Por Ley Fuerte el promedio de variables aleatorias iid es consistente para la esperanza: $\overline{X_n} \to a$ casi seguramente. Es también insesgado, pues $E(\overline{X_n}) = E(X_1) = a$, y su error cuadrático medio coincide entonces con su varianza: $Var(\overline{X_n}) = Var(X_1)/n = 2^2/(12n) = 1/(3n)$. Luego, la opción correcta es la E.

Múltiple Opción 4

Se pide $P(det(A) \neq 0) = 1 - P(X^2 - Y^2 = 0) = 1 - P(X = Y) = 1 - p^2 - (1-p)^2 = -2p^2 + 2p = 2p(1-p)$. Luego, la opción correcta es la F.