Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2009
Examen, 21 de julio de 2009
Resumen de la solución

Ejercicio 1.

a. Para todo t se cumple:

$$P\{W \leq t\} = P\{X \leq t\}P\{Y > 0\} + P\{X \geq -tt\}P\{Y < 0\} =$$

$$\Phi(t)\frac{1}{2} + (1 - \Phi(-t))\frac{1}{2} = \Phi(t)\frac{1}{2} + \Phi(t)\frac{1}{2} = \Phi(t)$$

b.

$$cov(X, W) = E(XW) - E(X)E(W) = E(XW) = E(X^2)E(Y) = 0$$

ya que se cumple: $E(X) = E(W) = E(Y) = 0$.

c.

$$P\{X > 1, W > 1\} = P\{X > 1, Y = 1\} = P\{X > 1\}P\{Y = 1\} =$$

$$P\{X > 1\}/2 \neq (P\{X > 1\})^2 = P\{X > 1\}P\{Z > 1\}$$

Por lo tanto X e Y no son independientes.

Ejercicio 2.

a. $P\{X = 0\} = p/2$, $P\{X = 1\} = (2p + 1)/6$, $P\{X = i\} = (1 - p)/6$ para $i = 2, \cdots, 6$.

b. $E(X) = 7/2 - 3p$.

c. Estimador: $\hat{p} = 7/6 - \overline{X}_n/3$.

d. La función de verosimilitud vale:

$$\ell(p) = (p/2)^{18}((2p+1)/6)^{26}((1-p)/6)^{56}$$

derivando con respecto a p y simplificando obtenemos la ecuación cuadrática $-100p^2+7p+9=0$. Es fácil ver, estudiando el signo de $\ell'(p)$ que en la raíz positiva de esta ecuación $\tilde{p} = (7+\sqrt{49+400\times 9})/200$ se da el máximo de la función de verosimilitud. Por lo tanto, el estimador máximo verosímil vale $\tilde{p} = 0,337$. El estimador por el metodo de los momentos vale, según la parte **c**: $\hat{p} = 0,3433$.

Ejercicio 3.

a) Tests de aleatoriedad:

$$\begin{cases} H_0 : X_1,...,X_{10} \text{ son iid} \\ H_1 : \text{no } H_0 \end{cases}$$

Test de rachas: R=7, α^*= 0,4524 mayor que 0,10, por lo tanto se acepta H_0.

Test de Spearman:$R_s = -0,188$, $\alpha^* =$ 0,304 mayor que 0,10, por lo que se acepta H_0.

Como ambas pruebas aceptan H_0, se puede decir que los datos son iid.

b) Test de Lilliefors para normales:

$$\begin{cases} H_0 : X_1,...,X_{10} \text{ tiene distribución normal} \\ H_1 : \text{no } H_0 \end{cases}$$

$\widehat{\mu} = \overline{X_{10}} = -0{,}085$, $s_{10} = 0{,}425$, $D = 0,305 > 0,239$, por lo tanto el p-valor es $< 0,1$ y se rechaza H_0.

c) Test de Lilliefors para exponenciales:

$$\begin{cases} H_0 : |X_1|,...,|X_{10}| \text{ tiene distribución exponencial} \\ H_1 : \text{no } H_0 \end{cases}$$

$\widehat{\lambda} = 4{,}049$, $D = 0{,}241 < 0,295$, por lo tanto el p-valor es $> 0,1$ y se acepta H_0, es decir que se puede afirmar que la muestra $|X_1|$,...,$|X_{10}|$ tiene distribución exponencial.