Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2008
Examen, 24 de julio de 2008

Nº de Prueba	Cédula	Apellido y Nombre	Salón

Ejercicio 1. (33 puntos) Sean las variables aleatorias X e Y, cuya densidad conjunta es

$$f(x,y) = 2\varphi(x)\,\varphi(y), \quad \text{si} \quad xy > 0$$

y $f(x,y) = 0$ en otro caso (donde $\varphi(t)$ es la densidad normal típica, i.e. $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$).

1. Probar que la variable X tiene distribución normal y observar que, por la simetría de la definición, Y tiene la misma distribución que X.
2. ¿Son X e Y independientes?
3. Calcular $P\{Y \leq 1,5 | X > 1\}$.

Ejercicio 2. (33 puntos) Sean $X_1, ..., X_n$ $iid \sim F$, absolutamente continua con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\vartheta^2}x + \frac{2}{\vartheta} & \text{si } x \in [0, \vartheta] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\vartheta > 1$.

1. Calcular $E(X)$ en función de ϑ, donde X es una variable aleatoria absolutamente continua con densidad f.
2. Encontrar un estimador por el método de los momentos, de ϑ en función del promedio $\overline{X}_n$ y calcular la esperanza de dicho estimador.
3. Calcular $V(X)$ en función de ϑ, donde X es una variable aleatoria absolutamente continua con densidad f.
4. Encontrar un estimador de ϑ en función de s_n.
5. Sabiendo que en una muestra de tamaño 100 de la variable en cuestión, exactamente 62 observaciones están por encima del valor 1, dar un estimador de ϑ. (Conviene comenzar calculando $P\{X > 1\}$, para una variable X con densidad f).

Ejercicio 3. (34 puntos) Sea x:

1,69	-1,06	-1,10	0,34	1,07	-0,05	-0,31	0,96	-0,36	-1,18

una muestra de una distribución F con media μ_X y varianza σ_X^2. Considere también y:

1,60	0,14	-0,31	-0,93	-1,07	0,58

una muestra de una distribución G con media μ_Y y varianza σ_Y^2. Ambas muestras pueden considerarse independientes.

Nota: Para todas las pruebas de hipótesis considerar $\alpha = 0,10$. Escriba claramente, en cada caso, el resultado de la prueba efectuada.

1. Realizar una prueba de rachas hacia arriba y hacia abajo para la muestra x.
2. Realizar una prueba de correlación de rangos de Spearman para la muestra y.
3. Realizar una prueba de normalidad de D'Agostino para la muestra x.
4. ¿Se puede asumir que la muestra y tiene distribución normal?. Realizar la prueba de Lilliefors.
5. ¿Se puede asumir que $F = G$?