PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA - Facultad de Ingeniería

Examen 22 de Diciembre de 2007

Nombre y Apellido	Cédula

Para uso docente

1a	1b	1c	1d	1e	Total **1**	2a	2b	2c	2d	Total **2**	3ai	3aii	3aiii	3b	Total 3	**Total**

La duración del examen es de 4 horas.

El puntaje mínimo para aprobar es 50 puntos.

Publicación de resultados: viernes 4 de enero de 2008 hora 20:00**.**

Muestra de exámenes lunes 7 de enero de 2008 hora 14:00.

1. **(35 puntos)**
   Suponga que una persona llega a una casa de venta de comidas rápidas, se coloca en cola de espera y cuando llega su turno hace su pedido aguardando en ventanilla hasta que le entregan la comida.
   Sean:
   X el tiempo que demora un cliente desde que llega al local hasta que le entregan la comida (demora total).
   Y el tiempo que demora desde que hace el pedido hasta que le entregan la comida (demora en ventanilla).
   Z el tiempo que demora desde que llega al local hasta que hace el pedido (demora en cola).
   Se sabe que las variables X e Y tienen una distribución conjunta absolutamente continua con función de densidad:

$$f_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 e^{-x}}{2} & \text{si } 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   (a) Demuestre que efectivamente es una función de densidad.
   (b) Halle las densidades marginales de X e Y (f_X y f_Y).
   (c) Investigue la independencia de las variables X e Y.
   (d) Determine $E(Z)$ (valor esperado)
   (e) Calcule la probabilidad de que el tiempo de demora en ventanilla sea mayor que el tiempo de demora en cola.

2. **(35 puntos)**

Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ ($\lambda > 0$).

a. Se considera la variable $Y = [X] + 1$ (donde $[x]$ indica parte entera de x). Para $k \geq 1$, calcule $P(Y = k)$en función de λ y deduzca que Y tiene distribución geométrica de parámetro $p = 1 - e^{-\lambda}$.

b. Se dispone de una muestra $Y_1, \ldots.., Y_{500}$ de variables aleatorias, tales que $Y_i = [X_i] + 1$ donde $X_1, \ldots., X_{500}$ son variables aleatorias independientes, con distribución exponencial de parámetro λ. Sabiendo que $\sum_{i=1}^{500} Y_i = 527$ construya un estimador de λ.

c. A partir de los datos de la parte anterior, construya un intervalo de confianza al 95 % para p.

d. Usando la parte anterior construya un intervalo de confianza al 95% para λ.

3. **(30 puntos)**

Se tienen 12 mediciones correspondientes a la edad de un grupo de personas:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}
20,1	13,9	16,8	16,5	13,2	17,5	14,3	20,5	15	18,3	17,4	14,8

(a) i. Estudie la aleatoriedad de la muestra (realice 2 pruebas).

ii. Pruebe que es razonable suponer que los datos siguen una distribución normal (realice una prueba).

iii. Estime la media y varianza de las edades y encuentre para ambos parámetros intervalos de confianza al 99%.

(b) Se tiene otro grupo de mediciones correspondientes a las edades de 12 personas. Se supone que esta muestra también es aleatoria e independiente de la muestra anterior

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	Y_{11}	Y_{12}
20	14,3	14,7	10	15	16,4	17,3	21,9	14,5	19	19,7	11,8

Mediante la prueba de Kolmogorov-Smirnov compare ambas muestras.

En este ejercicio trabaje con el p-valor $\boldsymbol{\alpha^* = 0,1}$