Universidad de la República
Facultad de Ingeniería - IMERL

Probabilidad y Estadística
Segundo Semestre 2016

Primer Parcial
Sábado 26 de noviembre de 2016.

Número de Parcial	Cédula	Nombre y Apellido

PARA USO DOCENTE			
Ej. 1	Ej. 2	Ej.3	TOTAL

Ejercicio 1. [**20 puntos**]

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio en $\mathbb{R}^2$ con densidad $f_{(X,Y)}$. Probar que la densidad marginal de X es $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y)dy$.

2. Sea (X, Y) un vector aleatorio en $\mathbb{R}^2$ con densidad $f_{(X,Y)}$ dada por:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x \in [0, 1], y \in [0, 1], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

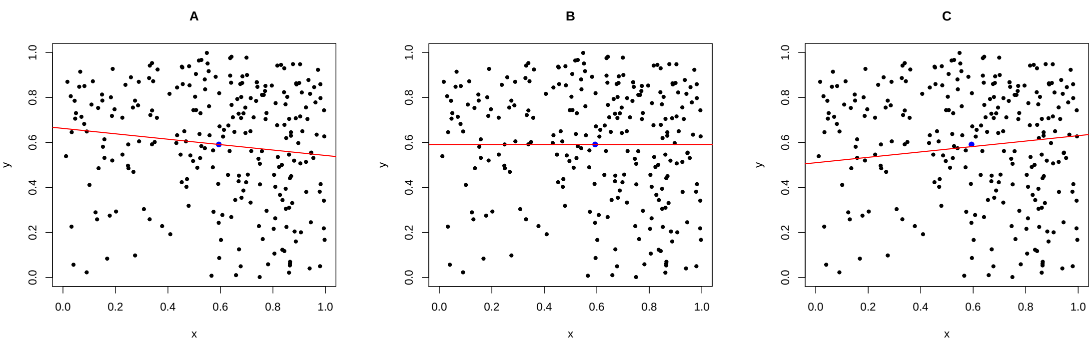
   (a) Hallar las densidades marginales de X e Y. Verificar que son densidades.

   (b) Hallar la probabilidad de que $X + Y$ sea menor o igual que $\frac{1}{2}$.

   (c) i. ¿Son X e Y independientes?

   ii. Hallar Cov(X, Y) la covarianza entre X e Y y el coeficiente de correlación r. Indicar si la correlación es leve, moderada o fuerte.

   (d) Se considera una muestra $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,...,n}$ con densidad conjunta $f_{(X,Y)}$ definida en la parte 2. A continuación se presentan tres posibles diagramas de dispersión con la recta de regresión asociada. Indica cuál diagrama se ajusta mejor a la densidad dada. Justifique su respuesta.



Ejercicio 2. [**16 puntos**]

1. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$ variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro λ. Se define $T = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$. Calcular valor esperado, mediana y varianza de T.
2. Un reconocido magnate inmobiliario de iniciales DT, desea testear a su proveedor de lamparitas. Para hacerlo encarga a su gerente de operaciones la tarea de estimar el tiempo medio de vida de las lamparitas que se utilizan en sus edificios. Puede asumirse que un edificio tiene 1000 lamparitas. Sin embargo, esperar a la rotura de las 1000 lamparitas para obtener su promedio no es viable pues llevaría demasiado tiempo. El gerente, conociendo la impaciencia de su jefe, decide cambiar la estrategia y considerar 100 edificios nuevos (de modo de que todas las lamparitas comienzan a funcionar todas al mismo tiempo) y registra el tiempo en que se rompe la primer lamparita de cada edificio. Se asume que el tiempo de vida de cada lamparita es una variable aleatoria exponencial de parámetro λ y que son independientes entre sí. Sea T_i el tiempo, medido en meses, en que se rompe la **primer** lamparita en el edificio i. Se tiene por tanto una muestra $T_1, T_2, \ldots, T_{100}$ de la cuál se presenta a continuación un resumen numérico:

m	$Q1$	m_T	Q_3	M
0.00006	0.026	0.061	0.122	0.890

donde $\mathrm{m} = \min\limits_i T_i$, $\mathrm{M} = \max_i T_i$, m_T es la mediana empírica y Q_1 y Q_3 son el primer y tercer cuartil de la muestra respectivamente. Además:

s_T^2	$\overline{T}$	σ_T^2
0.0083	0.0897	0.0081

A partir de la muestra anterior:

(a) Calcular el estimador de máxima verosimilitud de λ.
(b) Hallar dos estimadores diferentes al calculado en la parte anterior para el parámetro λ.
(c) Hallar un intervalo de confianza aproximado al nivel 0.95 para el parámetro λ.

Ejercicio 3. [**24 puntos**]

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra independiente e idénticamente distribuida, con distribución Normal con parámetros μ desconocido y $\sigma^2 = 4$, es decir $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 4)$.

1. Se define Z_1 tal que $2Z_1 = X_1 - \mu$. Hallar la función de distribución de Z_1. ¿Reconoce alguna distribución conocida?
2. Hallar el mínimo valor para el tamaño n de la muestra, tal que la probabilidad de que el promedio $\overline{X}_n$ difiera de μ en menos de 0.1, sea mayor que 0.9.
3. (a) Dado $\alpha < 0.5$, hallar ϵ en función de n y α tal que $P(\mu \in [\overline{X}_n, \overline{X}_n + \epsilon]) = \frac{1}{2} - \alpha$.
   (b) Hallar ϵ para $\alpha = 0.05$ y $n = 16$.
4. Se consideran los siguientes datos que corresponden a la muestra anterior:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}
4.97	1.6	−0.84	0.55	−0.95	−5.14	2.34	1.51	0.35	−3.6	0.01	0.38	−0.34	−0.78	1.71	2.2

Se plantea el siguiente test de hipótesis sobre el valor esperado:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 > 0. \end{cases}$$

(a) Probar que $\mathcal{R}_\alpha = \{\overline{X}_n \geq \frac{2z_\alpha}{\sqrt{n}}\}$ es una región crítica para el test planteado.
(b) ¿Cuál es la decisión para $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.1$ y $\alpha = 0.5$?
(c) Indicar cuál de las siguientes afirmaciones sobre el p-valor α^* es verdadera. Justifque su respuesta:

i. $\alpha^* < 0.1$ ii. $\alpha^* \in [0.1, 0.5]$ iii. $\alpha^* > 0.5$

(d) Asumiendo $\mu_1 = 0.5$ y $\alpha = 0.05$, hallar β la probabilidad de error tipo II.