Segundo Parcial - Probabilidad y Estadística

Jueves 4 de julio del 2013

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4

Cada pregunta múltiple opción correcta vale 5 puntos, mientras que una respuesta equivocada resta 1 punto. Los problemas de desarrollo valen 20 puntos cada uno.
Rellenar con claridad y en mayúscula la opción que considere correcta.
Se permite el uso de cuadernos, textos, calculadora y lápices.

Problema 1

Se consideran dos reales a, b y una función f definida de la siguiente manera:

$$f(x) = ax + b \ \forall x \in [0,1]; \ f(x) = 0 \ \forall x \notin [0,1]$$

(1) Hallar a y b de modo que f sea una densidad y que si X es un variable aleatoria con densidad f, entonces $E(X) = \frac{25}{48}$

(2) Para la siguiente muestra de 8 datos, tomando $\alpha = 0,05$ verificar mediante DOS tests de hipótesis si puede suponerse que la misma es *iid*.

$$0.134, 0.189, 0.180, 0.097, 0.194, 0.234, 0.248, 0.103$$

(3) Calcular la función de distribución F_0 asociada a la densidad f (tomando para a y b los valores calculados en la parte (1).

(4) Para la muestra de 8 datos de la parte (2), tomando $\alpha = 0,05$ verificar mediante UN test de hipótesis si puede suponerse que la misma se ajusta a la distribución F_0 de la parte (3).

Problema 2

Se dice que $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ (distribución log-normal) si $\log X \sim N(\mu, \sigma^2)$

(1) Si $X_1, ..., X_n$ es una muestra iid de variables con distribución $LN(\mu, \sigma^2)$ hallar un intervalo de confianza exacto al nivel α para μ.

(2) Si $X_1, ..., X_n$ es una muestra iid de variables con distribución $LN(\mu, \sigma^2)$ hallar un intervalo de confianza exacto al nivel α para σ^2.

(3) A partir de esta parte en adelante puede suponer que los siguientes 8 datos constituyen una muestra *iid* con distribución $LN(\mu, \sigma^2)$

$$1.661, 10.859, 17.868, 15.012, 5.841, 10.154, 3.750, 26.638$$

Calcular el intervalo de confianza exacto al nivel $\alpha = 0,05$ para μ y decidir si es posible suponer que $\mu < 5$.

(4) Con los datos de la parte anterior, calcular el intervalo de confianza exacto al nivel $\alpha = 0,05$ para σ^2 y decidir si es posible suponer que $\sigma^2 > 36$.

Múltiple Opción 1

Sea $f : f(x) = \frac{1}{2\theta}\frac{1}{\sqrt{x}}$ si $x \in (0, \theta^2]$, y $f(x) = 0$ en otro caso.
Se desea estimar θ partiendo de una muestra $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con densidad f. Llamemos $\hat{\theta}$ al estimador por máxima verosimilitud, y $\overline{\theta}$ el obtenido por el método de los momentos. Entonces:

A): $\hat{\theta} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ y $\overline{\theta} = 3\overline{X}_n$.
B): $\hat{\theta} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ y $\overline{\theta} = \frac{\overline{X}_n}{3}$.
C): $\hat{\theta} = \sqrt{\min\{X_1, \ldots, X_n\}}$ y $\overline{\theta} = \overline{X}_n{}^{1/3}$.
D): $\hat{\theta} = \sqrt{\max\{X_1, \ldots, X_n\}}$ y $\overline{\theta} = (3\overline{X}_n)^{1/3}$.
E): $\hat{\theta} = \sqrt{\max\{X_1, \ldots, X_n\}}$ y $\overline{\theta} = \sqrt{3\overline{X}_n}$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 2

Se dispone de muestras $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. exponenciales de parámetro λ, y se propone la prueba de hipótesis simple: $H_0 : \lambda = \lambda_1$ contra $H_1 : \lambda = \lambda_2$ con $\lambda_2 > \lambda_1$, fijos, con región crítica $R = \{\min\{X_1, \ldots, X_n\} < k\}$ a nivel α. Entonces:

A): $k = -\frac{log(1-\alpha)}{\lambda_1}$.
B): $k = \frac{log(\alpha)}{n\lambda_1}$.
C): $k = \frac{log(1-\alpha)}{n\lambda_1}$.
D): $k = -\frac{log(1-\alpha)}{n\lambda_1}$.
E): $k = -\frac{log(\alpha)}{n\lambda_1}$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 3

Hallar el volumen del conjunto $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_i \leq 1, max\{x_1, x_2\} \leq x_3\}$. *Sugerencia: aplicar Monte Carlo para integrales.*

A): 1/4.
B): 1/3.
C): 3/4.
D): 2/3.
E): 1/5.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 4

Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. exponenciales de parámetro λ, y consideremos la sucesión $(Y_n)_{n\geq 1}$ dada por $Y_n = n \times \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Entonces:

A): $(Y_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias exponenciales i.i.d.
B): $(Y_n)_{n\geq 1}$ no son variables aleatorias igualmente distribuidas, y verifican que $E(Y_n) = \lambda$.
C): $(Y_n)_{n\geq 1}$ no son independientes, y además $E(Y_n) = n\lambda$.
D): $(Y_n)_{n\geq 1}$ son variables igualmente distribuidas, y verifican que $E(Y_n) = n\lambda$.
E): $(Y_n)_{n\geq 1}$ son variables igualmente distribuidas, y verifican que $E(Y_n) = n^2\lambda$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.