Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2009
Segundo Parcial, 30 de junio de 2009

RESUMEN DE LA SOLUCIÓN

Parte de Múltiple Opción (Total: 20 puntos)

Respuesta correcta: 4 puntos	**Respuesta incorrecta: -1 punto**	**Respuesta en blanco: 0 punto**

PREGUNTA	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
RESPUESTA	B	B	D	C	A

Parte de desarrollo (Total: 40 puntos)

(En esta parte no se penalizan los errores con puntajes negativos)

Ejercicio 1. (18 puntos)

a. (3 puntos) $E(X_1) = \int_0^1 x\, \alpha x^{\alpha-1}\, dx = \int_0^1 \alpha\, x^{\alpha}\, dx = \frac{\alpha}{\alpha+1}$.

b. (3 puntos) En virtud de la Ley Fuerte de los Grandes Números, $\bar{X}_n$ converge casi seguramente a $\frac{\alpha}{\alpha+1}$. Planteando la ecuación: $\bar{X}_n = \frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\alpha}_1 + 1}$ y despejando obtenemos que $\hat{\alpha}_1 = \frac{\bar{X}_n}{1-\bar{X}_n}$ es un estimador (por el método de los momentos) de α.

c. (3 puntos) $E(X_1^2) = \int_0^1 x^2\, \alpha x^{\alpha-1}\, dx = \int_0^1 \alpha\, x^{\alpha+1}\, dx = \frac{\alpha}{\alpha+2}$.

d. (3 puntos) En virtud de la Ley Fuerte de los Grandes Números, $\overline{X_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ converge casi seguramente a $\frac{\alpha}{\alpha+2}$. Planteando la ecuación: $\overline{X_n^2} = \frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_2+2}$ y despejando obtenemos que $\hat{\alpha}_1 = \frac{2\overline{X_n^2}}{1-\overline{X_n^2}}$ es un estimador (por el método de los momentos) de α.

d. (6 puntos) El Estimador de Máxima Verosimilitud ($\hat{\alpha}_3$) es el valor que maximiza la función logaritmo de la verosimilitud, dada por la expresión: $\ell(\alpha) = n\log(\alpha) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log(X_i)$. Derivando y estudiando el signo de la derivada, es fácil ver que ese máximo se da en el valor $\hat{\alpha}_3 = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\log(X_i)}$.

Ejercicio 2. (22 puntos)

a. (8 puntos) Rachas hacia arriba y hacia abajo: Estadístico: $R = 8$, p-valor$= 0,1671 > 0,1$, por lo tanto aceptamos la hipótesis de aleatoriedad.

Correlación de rangos (Spearman): Estadístico: $RS = -0,103$, p-valor$= 0,393 > 0,1$, por lo tanto aceptamos la hipótesis de aleatoriedad.

b. (7 puntos) Lilliefors: Estadístico:

$$D = \sup_{t \in R} |F_n(t) - (1 - e^{t/\bar{A}})| = 0,2348,$$

valor crítico de comparación= 0,295. Como $D < 0,295$ aceptamos la hipótesis nula. (p-valor $>$ 0,2)

En conclusión: la distribución subyacente a la muestra es exponencial.

c. (7 puntos) Kolmogorov-Smirnov para dos muestras: Estadístico:

$$KS2 = \sup_{t \in R} |F_n^A(t) - F_n^B(t)| = 0,80,$$

valor crítico de comparación= 0,60. Como $KS2 > 0,60$ rechazamos la hipótesis nula.

En conclusión: las muestras A y B no provienen de la misma distribución.