Respuestas correctas

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Versión 1	F	B	E	B	B	X	E	A	B	C	C	E
Versión 2	B	F	B	E	B	X	A	E	C	B	E	C

Soluciones – la numeración es Versión 1 (Versión 2)

Ejercicio 1 (Ejercicio 2)

Para calcular el total de manos de bridge que tienen 5 espadas, 4 corazones, 3 diamantes y 1 trébol, podemos usar la regla del producto. Tenemos

- $\binom{13}{5}$ formas distintas de elegir las 5 espadas;
- $\binom{13}{4}$ formas distintas de elegir los 4 corazones;
- $\binom{13}{3}$ formas distintas de elegir los 3 diamantes;
- $\binom{13}{1}$ formas distintas de elegir el trébol.

Así, por la regla del producto la cantidad que buscamos es

$$\binom{13}{5}\cdot\binom{13}{4}\cdot\binom{13}{3}\cdot\binom{13}{1}.$$

Como en total hay $\binom{52}{13}$ manos de bridge, la probabilidad es

$$\frac{\binom{13}{5}\cdot\binom{13}{4}\cdot\binom{13}{3}\cdot\binom{13}{1}}{\binom{52}{13}} = 0.005388 = 5.388\times 10^{-3}.$$

Ejercicio 2 (Ejercicio 1)

Sea X el punto elegido al azar de manera uniforme en el intervalo $[-r,r]$. Si denotamos Y la longitud del segmento vertical que va desde X al semicírculo, por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$Y = \sqrt{r^2-X^2}.$$

Queremos que esta longitud sea menor que $r/2$, es decir

$$Y = \sqrt{r^2-X^2} < r/2 \Leftrightarrow r^2-X^2 < r^2/4 \Leftrightarrow 3r^2/4 < X^2 \Leftrightarrow \sqrt{3}r/2 < |X|.$$

De forma equivalente X debe caer en la unión de los intervalos $[-r,-\sqrt{3}r/2)\cup(\sqrt{3}r/2,r]$.

La probabilidad que buscamos es entonces

$$2\left(r-\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)/2r = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ejercicio 3 (Ejercicio 4)

Solución 1:

Por las leyes de De Morgan, si tomamos complementos obtenemos

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - 0.76 = 0.24, \quad P(A^c \cap B) = 0.13$$

Sumando obtenemos la probabilidad de A^c que es entonces igual a 0.37. De aquí resulta que $P(A) = 0.63$.

Solución 2:

Notar primero que $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$ y que $(A \cup B) \cup (A \cup B^c) = \Omega$ (si no lo ve fácilmente, haga un diagrama de Venn). Llamemos entonces

$$C = A \cup B, \quad D = A \cup B^c.$$

Lo anterior se traduce en $A = C \cap D$ y $C \cup D = \Omega$.

La letra nos dice que $P(C) = 0.76$ y $P(D) = 0.87$. Luego, por el principio de inclusión-exclusión tenemos

$$P(A) = P(C \cap D) = P(C) + P(D) - P(C \cup D) = 0.76 + 0.87 - 1 = 0.63$$

Ejercicio 4 (Ejercicio 3)

Solución 1:

Como el total de posibilidades es $\binom{4}{2} = 6$, podemos enumerarlas todas. Si llamamos n_1 y n_2 a las bolas naranjas, y a_1 y a_2 a las bolas azules, las extracciones posibles son

$$\begin{array}{cc} n_1\, n_2 & a_1\, a_2 \\ n_1\, a_1 & n_2\, a_1 \\ n_1\, a_2 & n_2\, a_2 \end{array}$$

Sabemos que al menos una de las bolas es naranja, lo cual excluye al caso $a_1\, a_2$. De las 5 posibilidades igualmente probables solo en una $n_1\, n_2$ las dos bolas son naranjas. Luego la probabilidad condicional que buscamos es $1/5$.

Solución 2:

Sean los eventos

$$N_1 = \text{1era es naranja} \quad N_2 = \text{2da es naranja}.$$

Queremos calcular la probabilidad condicional

$$P(N_1 \cap N_2 | N_1 \cup N_2) = \frac{P((N_1 \cap N_2) \cap (N_1 \cup N_2))}{P(N_1 \cup N_2)} = \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_1 \cup N_2)} = \frac{1/6}{5/6} = \frac{1}{5}.$$

Ejercicio 5 (Ejercicio 5)

Llamemos G al evento la semilla germina. Entonces

$$P(A|G) = \frac{P(G|A)P(A)}{P(G)} = \frac{(0.85)(0.4)}{(0.85)(0.4)+(0.75)(0.6)} = 0.43$$

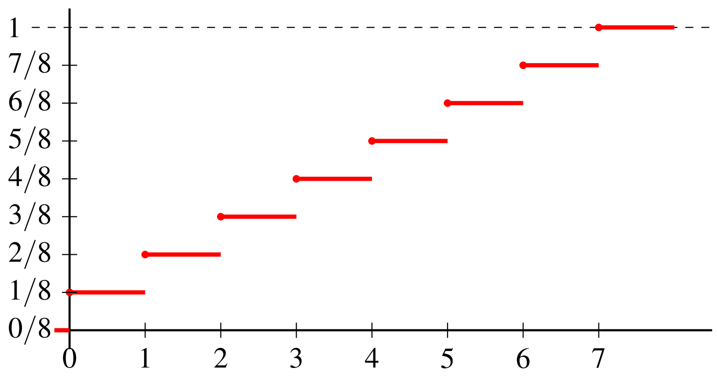
Ejercicio 6 (Ejercicio 6)

La siguiente tabla muestra los casos posibles para X:

	0	1	4	5
0	0	1	4	5
0	0	1	4	5
2	2	3	6	7
2	2	3	6	7

Vemos así que X tiene distribución uniforme en $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

El gráfico de su fda es entonces



Ejercicio 7 (Ejercicio 8)

Numeramos arbitrariamente a las parejas del 1 al 5. Para cada $1 \leq i \leq 5$, llamemos

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la pareja } i \text{ se sientan juntos} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Entonces X_i es una variable Bernoulli de parámetro p igual a la probabilidad de que una pareja se sienten juntos. Sea cual sea el lugar en el cual se sienta el 1er integrante de la pareja, el 2do tiene dos lugares (de los nueve que quedan libres) para sentarse a su lado. Luego, $p = 2/9$.

La cantidad de parejas que se sientan juntos es

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$$

y su valor esperado es $\mathrm{E}(X) = 5p = 10/9$.

Ejercicio 8 (Ejercicio 7)

Integrando

$$\int_0^1 x(1-x)^2 dx = 1/12$$

vemos que la constante c es igual a 12.

Luego, la esperanza es

$$\int_0^1 12x^2(1-x)^2 dx = 2/5$$

y en pesos el resultado es $\$40000$.

Ejercicio 9 (Ejercicio 10)

Llamemos P_i al peso de la i-ésima menta, para $1 \leq i \leq 15$.

Definimos

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } P_i \leq 19.8 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Estas son variables Bernoulli de parámetro

$$p = P(P_i \leq 19.8) = P\left(\frac{P_i - 20}{0.4} \leq \frac{19.8-20}{0.4}\right) = \Phi(-0.5) = 0.3085$$

Como $X = X_1 + \cdots + X_{15}$ tiene distribución binomial de parámetros $n = 15$ y $p = 0.3085$, tenemos

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= (1-p)^{15} + 15p(1-p)^{14} + 105p^2(1-p)^{13} = 0.113 \end{aligned}$$

Ejercicio 10 (Ejercicio 9)

Usaremos la fórmula de cambio de variable, teniendo en cuenta los diferentes rangos de y de acuerdo al número de pre-imágenes de la función $y = x^2$.

La derivada es $dy/dx = 2x$ con $x^2 = y$.

El recorrido de Y es el intervalo $(0,9)$.

Para $0 < y < 1$ tenemos dos preimágenes $\sqrt{y}$ y $-\sqrt{y}$, por lo que

$$p_Y(y) = \frac{1}{|2\sqrt{y}|} p_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{|-2\sqrt{y}|} p_X(-\sqrt{y}) = \frac{2}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4\sqrt{y}}$$

ya que $p_X(x) = 1/4$ en todo el intervalo $(-1,3)$.

Para $1 \leq y \leq 9$ hay una sola preimágen, por lo que el mismo cálculo da $p_Y(y) = \frac{1}{8\sqrt{y}}$.

Fuera de estos intervalos $p_Y(y) = 0$.

Es decir

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} & 0 < y \leq 1; \\ \frac{1}{8\sqrt{y}} & 1 \leq y \leq 9; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En particular, $p_Y(4) = 1/16$.

Ejercicio 11 (Ejercicio 12)

Llamemos T al triángulo. La densidad conjunta de (X,Y) es

$$p(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } (x,y) \in T; \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin T. \end{cases}$$

La esperanza es entonces

$$\mathrm{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^x 2xydydx = 2\int_0^1 x \int_0^x ydydx = \int_0^1 x^3 dx = 1/4.$$

Ejercicio 12 (Ejercicio 11)

La probabilidad que buscamos se puede re-escribir como

$$P(440 < S < 560) = P(-60 < S - 500 < 60) = P(|S - 500| < 60).$$

Por la desigualdad de Chebyshev, la probabilidad de su complemento está acotada superiormente por

$$P(|S - 500| \geq 60) \leq \frac{\mathrm{Var}(S)}{60^2} = \frac{100(4)}{60^2} = 0.11.$$

Luego $P(|S - 500| < 60) = 1 - P(|S - 500| \geq 60) \geq 1 - 0.11 = 0.89$.
