**Universidad de la República** **Probabilidad y Estadística**
**Facultad de Ingeniería - IMERL** **Primer Semestre 2016**

PRIMER PARCIAL
SÁBADO 30 DE ABRIL DE 2016.

| Número de Parcial | Cédula | Nombre y Apellido |
|---|---|---|
| | | |

| PARA USO DOCENTE. | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ej. 1 | Ej. 2 | Ej. 3 | Ej.4 | TOTAL |
| | | | | |

**Ejercicio 1.** [**8 puntos**]
Un pueblo de 2000 habitantes sufre regularmente brotes epidémicos de una cierta enfermedad. De la experiencia de brotes anteriores se sabe que durante un brote la probabilidad de que un habitante deba ser internado es 0.1. Se supone que el pueblo se encuentra bajo un brote epidémico de la enfermedad.

1. Estimar la probabilidad de que exactamente 200 habitantes deban ser internados.
2. Estimar la probabilidad de que deban ser internados entre 185 y 215 habitantes inclusive.
3. Sea $s$ el número de camas disponibles en el hospital del pueblo. ¿Cuál es el mínimo valor de $s$ tal que la probabilidad de que se deba internar a más de $s$ habitantes sea menor que 0.1?

**Ejercicio 2.** [**10 puntos**]
El cartero de una gran ciudad dice ser capaz de identificar el género del remitente a partir de su caligrafía. Un colega escéptico le propone el siguiente test: toma 10 cartas de las cuáles sabe que en 5 el remitente es mujer y en 5 el remitente es un hombre y le pide que indique cuáles fueron las 5 cartas escritas por una mujer. El cartero acierta en 4 de las 5 cartas.

1. El colega no está convencido e insiste en que este resultado es producto del azar. Se supone entonces que el cartero elige las 5 cartas **al azar**:
   (a) Sea $X$ la variable aleatoria que cuenta el número de aciertos del cartero. Indicar $\mathcal{R}_X$ el recorrido de $X$. Hallar y graficar $p_X(x)$ la función de probabilidad puntual de $X$.
   (b) Hallar la probabilidad de que el número de aciertos sea mayor o igual que 4.
   (c) ¿Usted está de acuerdo con el escepticismo del colega? Jusifique su respuesta.
2. Para convencer a su colega, el cartero propone repetir el experimento pero con 100 cartas (50 escritas por una mujer y 50 por un hombre). En este caso el cartero acierta en 32 cartas. En la Figura 1 se indica algunos valores de la función de probabilidad puntual de $X$ en este caso que pueden ser de utilidad. ¿Cambia esto su opinión con respecto al escepticismo del colega? Justifique su respuesta.

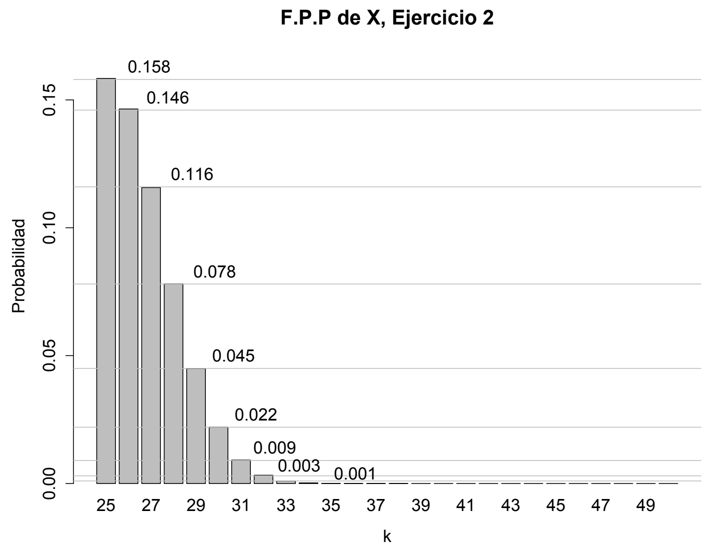


Figure 1: Esta figura muestra la función de probabilidad puntual de $X$ - para algunos valores significativos - del Ejercicio 2, parte 2. Los valores no indicados se estiman como iguales a cero.

**Ejercicio 3.** [**12 puntos**]
La siguiente tabla muestra los datos correspondientes a un estudio realizado con el objetivo de comprender la relación entre el diámetro de los granos de arena ($D$ en mm) y la pendiente de profundidad del agua ($P$ en grados) para $n = 9$ playas.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$ | 0.170 | 0.190 | 0.220 | 0.235 | 0.235 | 0.300 | 0.350 | 0.420 | 0.850 |
| $P$ | 0.63 | 0.70 | 0.82 | 0.88 | 1.15 | 1.50 | 4.40 | 7.30 | 11.30 |

Algunos datos que pueden ser de utilidad en el ejercicio: $\sum_{i=1}^{9}(D_i - \overline{D})^2 = 0.355$ y $\sum_{i=1}^{9}(P_i - \overline{P})^2 = 108.28$.

1. (a) Realizar un histograma de $D$ con ocho intervalos que cubran el rango de 0.1 mm a 0.9 mm.
   (b) Realizar un diagrama de cajas (boxplot) para $D$ (indicar en el diagrama todos los valores numéricos que son necesarios para construirlo). Estudiar la simetría de la distribución de $D$. Indicar si existen datos atípicos.
2. (a) Realizar y describir un diagrama de dispersión para $(D, P)$.
   (b) Calcular el coeficiente de correlación $r$. Indicar si la correlación es débil, moderada, o fuerte.
3. Explicar qué porcentaje de la variación de $P$ es explicada por la variación de $D$.
4. Hallar la ecuación de la recta de regresión. Calcular el error cuadrático medio de predicción.
5. Si el diámetro de los granos de arena de una playa es mayor que el de otra en 0.1 mm, ¿cuánto es la diferencia pronosticada entre las respectivas pendientes?

**Ejercicio 4.** [**10 puntos**]

1. Sea $X$ una variable aleatoria Poisson de parámetro $\lambda > 0$. Hallar la(s) moda(s) de X discutiendo según $\lambda$. Recordar quer $\theta$ es moda de $X$ si $P(X = \theta) \geq P(X = k)\ \forall\, k \in \mathcal{R}_X$.

2. Una pequeña empresa de alquiler de bicicletas tiene un stock de 12 bicicletas. La experiencia indica que la demanda diaria de bicicletas ($D$) es una variable aleatoria Poisson con parámetro $\lambda = 10$ (*en la tabla al final del ejercicio se presentan las probabilidades puntuales significativas de* $D$)

   (a) Hallar la probabilidad de que un día la demanda supere al stock.

   (b) Hallar la mayor moda $\theta$ de $D$ y calcular la probabilidad de que un día la demanda supere el valor $\theta$.

   (c) Hallar el mínimo número de bicicletas en stock necesarias para que la probabilidad de que la demanda supere al stock sea menor que 0.1.

   (d) Se considera una semana de 6 días laborables:

      i. Hallar la probabilidad de que ningún día de la semana la demanda supere al stock.

      ii. Hallar la probabilidad de que al menos dos días de la semana la demanda supere al stock.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(D = k)$ | 0.000 | 0.000 | 0.002 | 0.008 | 0.019 | 0.038 | 0.063 | 0.090 | 0.113 | 0.125 | 0.125 | 0.114 |
| $k$ | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| $P(D = k)$ | 0.095 | 0.073 | 0.052 | 0.035 | 0.022 | 0.013 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |