Universidad de la República
Facultad de Ingeniería - IMERL

Probabilidad y Estadística
Segundo semestre 2015

Primer parcial
Miércoles 7 de octubre de 2015

Número de Parcial	Cédula	Nombre y Apellido

Ejercicio 1. Un aficionado a la meteorología decide crear su propio modelo para predecir lluvias. El mismo asume que la probabilidad de que un cierto día llueva está determinada únicamente por lo sucedido el día anterior (si llovió o no). De este modo se tiene que sabiendo que un día llovió, la probabilidad de que al día siguiente llueva es de 0.55, mientras que dado que un día no llovió la probabilidad de que al día siguiente llueva es de 0.3.

1. (a) Sabiendo que un día llovió, hallar la probabilidad de que al día siguiente no llueva.
   (b) Sabiendo que un día no llovió, hallar la probabilidad de que al día siguiente no llueva.
2. De ahora en más sabemos también que en el día presente (día 0) no llovió.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que llueva en los días 1 y 2 (es decir, en ambos días)?
   (b) Calcular la probabilidad de tener una racha de k días lluviosos consecutivos.

Ejercicio 2. Sea X una variable aleatoria real cuya función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} ae^{2x} & \text{si } x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$ constante positiva.

1. (a) Hallar a para que X sea absolutamente continua. Hallar la función de densidad f_X.
   (b) Hallar a para que se cumpla $P(X < 0) = 1/4$.
2. Asumimos ahora que $a = \frac{1}{4}$:
   (a) Calcular $P(X = 0)$ y $P(X = 1)$.
   (b) Calcular $P(X \in [-2, 0])$ y $P(X > 2)$.

Total Ej.1	Total Ej.2	Total Ej. 3	Total Ej. 4	TOTAL

Ejercicio 3.

1. Una pareja decide tener hijos hasta tener una nena. La probabilidad de tener una nena es $1/2$ y es independiente del género del hijo anterior. Sea X el número de hijos de la pareja (nenas y varones).
   (a) Hallar la función de probabilidad de X, esto es $P(X = k)\ \forall\, k \in \mathcal{R}_X$.
   (b) Sabiendo que la pareja ya tuvo dos hijos varones, la probabilidad de que el próximo hijo sea nena ¿es mayor, menor o igual a la probabilidad de tener una nena en el primer intento? Comente en este caso la validez de la expresión "La tercera es la vencida". [1]
2. Luego de recapacitar, la pareja decide tener hijos hasta tener una nena o hasta tener 5 hijos.
   (a) En este caso, hallar $\mathcal{R}_X$ y la función de probabilidad de X.
   (b) Graficar F_X función de distribución de X.
   (c) Sea N el número de hijas de la pareja. Hallar $\mathcal{R}_N$ y la función de probabilidad de N.

Ejercicio 4.

1. Se asume que una línea de ómnibus tiene una frecuencia de 15 minutos empezando a las 7:00. Un pasajero de dicha línea llega a la parada en un tiempo T aleatorio y uniforme entre las 7:00 y las 7:30, esto es:
$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{s i} x \leq 7 \\ \frac{x-7}{0.30} & \text{si } 7 \leq x \leq 7.30, \\ 1 & \text{si } x \geq 7,30. \end{cases}$$
   Nota: aclaramos que en este ejercicio 1 minuto se interpreta como el valor 0.01.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el pasajero espere menos de 5 minutos?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el pasajero espere más de 10 minutos?
2. Se asume ahora que el número de ómnibus N_t que pasan en un intervalo $[0, t]$ es aleatorio y se distribuye según una distribución Poisson de parámetro λt, con $\lambda > 0$. Sea X el tiempo de espera de un pasajero que llega en un instante cualquiera (que podemos pensar como tiempo 0).
   (a) Calcular $P(X > t)$ para $t > 0$.
   (b) Deducir que X tiene distribución exponencial de parámetro λ.
   (c) En esta parte se asume que $\lambda = \frac{1}{15}$.
      i. Hallar la probabilidad de que el pasajero tenga que esperar menos de 5 minutos.
      ii. Sabiendo que un pasajero hace 10 minutos que espera, calcular la probabilidad de que tenga que esperar 5 minutos más.

[1] El comentario es por un punto extra