Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2015
Primer Parcial, 5 de mayo de 2015
Resumen de la solución

Parte de Múltiple Opción (Total: 20 puntos)

Respuesta correcta: 5 puntos	**Respuesta incorrecta: -1 punto**	**Respuesta en blanco: 0 punto**

PREGUNTA	**1**	**2**	**3**	**4**
RESPUESTA	A	C	A	B

Parte de desarrollo (Total: 20 puntos)

(En esta parte no se penalizan los errores con puntajes negativos)

Ejercicio 1. (8 puntos)

(a) $\lambda f_X(z) \geq 0, \forall z$ y $(1-\lambda)f_Y(z) \geq 0, \forall z$ por ser f_X y f_Y densidades y cumplirse $\lambda \geq 0$ y $(1-\lambda) \geq 0$.
Por lo tanto $f_Z(z) = \lambda f_X(z) + (1-\lambda)f_Y(z) \geq 0, \forall z$.

Por otra parte $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z)dz = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)dz + (1-\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z)dz = \lambda + 1 - \lambda = 1$.
De modo que f_Z cumple con las condiciones para ser una función de densidad.

(b) $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z), dz = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} z f_X(z)dz + (1-\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Y(z)dz = \lambda E(X) + (1-\lambda)E(Y)$.

(c) $V(Z) = E(Z^2) - E^2(Z)$. Por un lado

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_Z(z)dz = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z)dz + (1-\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_Y(z)dz = \lambda E(X^2) + (1-\lambda)E(Y^2).$$

Por otro lado

$$E^2(Z) = (\lambda E(X) + (1-\lambda)E(Y))^2 = \lambda^2 E^2(X) + (1-\lambda)^2 E^2(Y) + 2\lambda(1-\lambda)E(X)E(Y).$$

La diferencia de ambas expresiones da como resultado $\lambda V(X) + (1-\lambda)V(Y) + \lambda(1-\lambda)(E(X) - E(Y))^2$.

Ejercicio 2. (12 puntos) Sean las funciones

(a)

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} ye^{-2x} & \text{si } x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 2. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(b)

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } y < 0, \\ y^2(1-e^{-2x})/4 & \text{si } x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 2. \\ (1-e^{-2x}) & \text{si } x \geq 0,\ y > 2. \end{cases}$$

(c) $P\{X > 3, Y < 1\} = P\{X > 3\}P\{Y < 1\} = e^{-2\times 3} \times 1^2/4 = e^{-6}/4.$

(d)

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \begin{cases} \int_{z-2}^{z} e^{-2x}(z-x)dz & \text{si } z > 2. \\ \int_0^z e^{-2x}(z-x)dz & \text{si } 0 \leq z \leq 2. \\ 0 & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$f_{X+Y}(z) = \begin{cases} e^{-2z}/4 + 3e^{-2z+4}/4 & \text{si } z > 2. \\ e^{-2z}/4 - (-2z+1)/4 & \text{si } 0 \leq z \leq 2. \\ 0 & \text{si } z < 0. \end{cases}$$