Primer Parcial - Probabilidad y Estadística

Lunes 30 de abril de 2012

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5

Cada problema vale 10 puntos. Cada múltiple opción correcta vale 4 puntos.
Las respuestas incorrectas restan 0,8 puntos.
Un total negativo en múltiple opción se considera de cero.
Rellenar con claridad la opción que considere correcta en las casillas superiores.
La duración total del parcial es de 4 horas.
Se permite el uso de cuadernos, textos, calculadora y lápices, exclusivamente.

Problema 1 (10 puntos)

a) Usted produce lotes de 1000 botellas de agua mineral cada uno, y dispone de una máquina que arroja el líquido automáticamente en las botellas. El volumen volcado por la máquina sigue una distribución normal con valor medio de 999 mililitros, y desviación estándar de 1 mililitro. Se sabe que la bebida es apta para su venta solamente si el volumen de líquido en la botella se ubica entre los 998 y 1002 mililitros (si hay menos el cliente se queja, y si hay más se desparrama el líquido al abrir la botella). Un inspector selecciona 10 botellas al azar de un lote. Si 2 de ellas (o más) no cumplen la especificación de calidad, el inspector desecha el lote por no considerarse apto para su venta. ¿Cuál es la probabilidad de que el inspector deseche un lote?

b) Usted va a llevar 1000 lotes a inspección, donde cada botella se vende a un dólar (cada lote tiene 1000 botellas). Se sabe que la ganancia neta de la empresa es del 40 por ciento de la venta (aquellos lotes desechados no generan ganancia). Calcular la ganancia esperada al llevar esos 1000 lotes a inspeccionar.

c) Un ingeniero mecánico le asegura que puede reducir la desviación estándar de la máquina a la mitad. Por contrapartida, le exige un monto de cien mil dólares. ¿Le conviene invertir en el trabajo del ingeniero para mejorar la máquina? Decida considerando únicamente la ganancia esperada.

d) Otro ingeniero no puede mejorar la desviación de la máquina, pero asegura que es capaz de centrar el valor medio de volcado de líquido de la máquina exactamente a 1000 mililitros. Si también cobra cien mil dólares, ¿es conveniente este contrato? Nuevamente, responda atendiendo ganancias esperadas únicamente.

e) La empresa evalúa si le conviene contratar a los dos ingenieros para corregir a la vez la media y el desvío de la cantidad de agua por botella. ¿Es conveniente contratar a ambos? Justifique su respuesta e indique su decisión final de contrato (si contrata a ambos, a uno de ellos o a ninguno, considerando la ganancia esperada).

Problema 2

Se considera la matriz M

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

donde sus entradas A, B, C, D son variables aleatorias iid $Ber(p)$.

a) Calcular la probabilidad de que M no sea invertible en función de p.

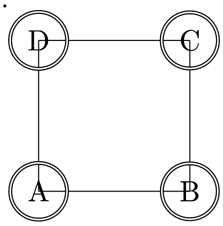
b) Mostrar que dicha probabilidad es siempre estrictamente positiva, y que no es 1 salvo en los casos en que $p = 0$ o $p = 1$.

c) Calcular la función de probabilidad de $X = det(M)$ si $p = 0,25$.

d) Se construyen de manera independiente 1500 matrices como la M anterior tomando $p = 0,25$. ¿Puede Ud. decir aproximadamente cuánto valdrá el promedio de los determinantes de las 1500 matrices? Justificar.

Múltiple Opción

(1) Una red está constituida por los terminales A, B, C y D que se conectan mediante enlaces conformando un cuadrado, como se ilustra en la Figura 1. Cada enlace funciona (o no) independientemente, con una probabilidad de operación p. Dos terminales están comunicados si se puede llegar de uno a otro por enlaces que funcionan. La probabilidad de que los terminales A y C estén comunicados es:



a) $2p^2$
b) $2p^2 - p^4$
c) $2p^2 + p^4$
d) p^4
e) $p(1-p)^3$
f) Ninguna de las anteriores es correcta.

(2) Una torta es cortada en ocho porciones idénticas. Tres niños seleccionan al azar y en forma independiente una porción cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que alguna porción sea elegida por más de un niño?

a) 11/32
b) 1/8
c) 3/8
d) 57/64
e) 511/512
f) Ninguna de las anteriores es correcta.

(3) Una emisora de tarjetas de crédito ha estudiado el comportamiento de sus clientes como para saber que:

- i) Un $0,1$ por ciento de las operaciones con sus tarjetas son fraudes.
- ii) Un $4,9$ por ciento de las operaciones se asocian con gastos no habituales, pero no son fraudes.
- iii) Un 95 por ciento son gastos habituales, y no son fraudes.

Llamemos B_1, B_2 y B_3 a los respectivos sucesos, por lo que $P(B_1) = 0,001$, $P(B_2) = 0,049$ y $P(B_3) = 0,95$. Sea $A =$ "El poseedor de la tarjeta paga con su tarjeta una compra mayor a mil dólares" Si $P(A/B_1) = 0,99$, $P(A/B_2) = 0,55$, $P(A/B_3) = 0,10$ y se tiene una persona que paga con su tarjeta una compra de más de mil dólares, ¿cuál es, aproximadamente, la probabilidad que sea un fraude?

a) $0,12$
b) $0,012$
c) $0,1$
d) $0,01$
e) $0,008$
f) Ninguna de las anteriores es correcta.

(4) Un jugador realiza 200 jugadas independientes de un juego en el que la probabilidad de ganar es p (no hay empates). El jugador debe pagar \$10 por cada apuesta. En caso de perder, pierde lo apostado. Cuando gana, se le paga \$30 (su ganancia neta es de \$20). Sabiendo que luego de jugar 200 veces, finaliza con una ganancia neta de 1000 pesos: ¿en cuánto estimaría la probabilidad de ganar p?

a) $p = 19/30$
b) $p = 2/3$
c) $p = 1/3$
d) $p = 11/30$
e) $p = 1/2$
f) $p = 1/4$

(5) En determinada central telefónica puede suponerse que la duración de las distintas llamadas son independientes. Sin embargo, el modelo aplicable a la variable aleatoria X que representa la duración de las llamadas es un poco más complejo que el clásico. En efecto, se considera una variable aleatoria λ tal que $P(\lambda = 1/10) = 3/20$, $P(\lambda = 1/5) = 11/20$, $P(\lambda = 1/2) = 6/20$. Cuando λ toma el valor $u \in \{1/10, 1/5, 1/2\}$, la duración de la llamada X tiene distribución Exponencial de parámetro u. La densidad $f_X(t)$ de la variable X para $t \geq 0$ es:

a) $f_X(t) = 3/20e^{-t/10} + 11/20e^{-t/5} + 0,3e^{-t/2}$
b) $f_X(t) = 4/129 \times (-43e^{-2t/3} + 33e^{-4t/11} + 10e^{-5t/3})$
c) $f_X(t) = 2/3 \times (-43e^{-2t/3} + 33e^{-4t/11} + 10e^{-5t/3})$
d) $f_X(t) = 1/10 \times 3/20e^{-t/10} + 1/5 \times 11/20e^{-t/5} + 1/2 \times 6/20e^{-t/2}$
e) $f_X(t) = 1/3(1/10e^{-t/10} + 1/5e^{-t/5} + 1/2e^{-t/2})$
f) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.