PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
SOLUCIÓN PRIMER PARCIAL 2006

Problema 1

1. Sea $\mathbf{Y}$ = cantidad de piezas defectuosas en la muestra del lote. Como la muestra se elige sin reposición y el tamaño es 20% del lote (es decir 4) se tiene que $Y \sim \mathcal{H}(4, 20, 4)$. Entonces la probabilidad de la empresa acepte el lote es la probabilidad de que no haya defectuosos, es decir $\mathbf{P}(\mathbf{Y} = 0) = \mathrm{C}_4^{16}/\mathrm{C}_4^{20} = 364/969 \approx 0.3756$. También se puede pensar directamente como casos favorables sobre casos posibles, dado que lo que se pide es que no haya defectuosos.

2. (a) La probabilidad de que la empresa acepte los dos lotes es igual a la probabilidad que no haya ninguna pieza defectuosa en la muestra que toma del lote que tiene las 4 piezas defectuosas. Sea Y la cantidad de piezas defectuosas en dicho lote. Como la muestra se elige sin reposición y el tamaño es 20% del lote (es decir 2) se tiene que $Y \sim \mathcal{H}(2, 10, 4)$. Entonces, la probabilidad pedida es $P(A|B_4) = \mathbf{P}(\mathbf{Y} = 0) = \mathrm{C}_2^6/\mathrm{C}_2^{10} = 1/3 \approx 0.3333$.

   (b) Para que los dos lotes sean aceptados, no debe encontrarse ninguna pieza defectuosa en ninguno de los lotes. Sea Y_1 la cantidad de defectuosos en la muestra tomada del lote 1 que contiene 1 defectuoso y sea Y_2 la cantidad de defectuosos en la muestra tomada del lote 2 que contiene 3 defectuosos. Con el mismo razonamiento que antes se tiene que $Y_1 \sim \mathcal{H}(2, 10, 3)$ e $Y_2 \sim \mathcal{H}(2, 10, 1)$. Entonces la probabilidad de que la empresa acepte los dos lotes es $P(A|B_3) = \mathbf{P}(\mathbf{Y}_1 = 0)\mathbf{P}(\mathbf{Y}_2 = 0) = \mathrm{C}_2^7\mathrm{C}_2^9/(\mathrm{C}_2^{10})^2 = 28/75 \approx 0.3733$.

   (c) Como antes para que los dos lotes sean aceptados, no debe encontrarse ninguna pieza defectuosa en ninguno de los lotes. Como ambos lotes tienen la misma cantidad de defectuosos sea Y la cantidad de defectuosos en la muestra tomada de un lote que contiene 2 defectuoso. Se tiene que $Y \sim \mathcal{H}(2, 10, 2)$. Entonces la probabilidad de que la empresa acepte los dos lotes es $P(A|B_2) = \mathbf{P}^2(\mathbf{Y} = 0) = (\mathrm{C}_2^8/\mathrm{C}_2^{10})^2 = 784/2025 \approx 0.3872$.

   Observación: Como en la primera parte, todos los cálculos pueden hacerse sin identificar la distribución hipergeómetrica, calculando las probabilidades como casos favorables sobre casos posibles

   La probabilidad de aceptación máxima se tiene con la estrategia de dividir en dos lotes y colocar dos piezas defectuosas en cada uno de ellos.

3. Sea Y la cantidad de defectuosos en el primer lote. Entonces se tiene que $P(B_i) = P(Y = 0)$ donde $Y \sim \mathcal{H}(2, 10, i)$. Entonces:
   $\mathbf{P}(B_0) = \mathrm{C}_{10}^{16}/\mathrm{C}_{10}^{20} = 14/323 \approx 0.0433$;
   $\mathbf{P}(B_1) = \mathrm{C}_9^{16}\mathrm{C}_1^4/\mathrm{C}_{10}^{20} = 80/323 \approx 0.2477$;
   $\mathbf{P}(B_2) = \mathrm{C}_8^{16}\mathrm{C}_2^4/\mathrm{C}_{10}^{20} = 135/323 \approx 0.4180$;
   $\mathbf{P}(B_3) = \mathrm{C}_7^{16}\mathrm{C}_3^4/\mathrm{C}_{10}^{20} \approx 0.2477$.
   $\mathbf{P}(B_4) = \mathrm{C}_6^{16}/\mathrm{C}_{10}^{20} \approx 0.0433$.

   Por Bayes se tiene que:

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{\sum\limits_{i=0}^{4} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Se tiene que $P(A) = \sum\limits_{i=0}^{4} P(A|B_i)P(B_i) = 364/969 \approx 0.3756$ y por lo tanto $P(B_2|A) = 28/65 \approx 0,4308$.

Observación: Otra forma de hallar $P(A)$ es observar que la probabilidad de que la empresa acepte ambos lotes es la misma que si se entrega un sólo lote es decir $P(A) = \mathrm{C}_4^{16}/\mathrm{C}_4^{20} = 364/969 \approx 0.3756$.

(a) **Problema 2**

1. Observemos previamente que

$$[V \leq x] \Leftrightarrow [X_1 \leq x, X_2 \leq x]$$

luego

$$\begin{aligned} F_V(x) &= P(V \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x) = \text{(por la independencia)} \\ &= P(X_1 \leq x)\, P(X_2 \leq x) = F_{X_1}(x) F_{X_2}(x) \end{aligned}$$

Observemos previamente que

$$[U > x] \Leftrightarrow [X_1 > x, X_2 > x]$$

luego

$$\begin{aligned} F_U(x) &= P(U \leq x) = 1 - P(U > x) = \\ &= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x) = \text{(por la independencia)} \\ &= 1 - P(X_1 > x)\, P(X_2 > x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))\,(1 - F_{X_2}(x)) \end{aligned}$$

2. (a) Basta reconocer que $X_1 \sim \text{Geo}(1/6)$ y $X_2 \sim \text{Geo}(1/2)$. Entonces $p_{x_1}(k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ y $p_{X_2}(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ $k = 1, 2, \ldots$

   (b) Sea $[x]$ la parte entera de x.

   $$\text{Para } k \geq 1,\ F_{X_1}(k) = P(X_1 \leq k) = \sum_{i=1}^{[k]} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} = \frac{1}{6}\,\frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{[k]}}{1 - \frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{[k]}$$

   Para $k < 1$, $F_{X_1}(k) = 0$.

   Análogamente, Para $k < 1$, $F_{X_2}(k) = 0$. En caso contrario, $F_{X_2}(k) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{[k]}$.

   (c) Basta sustituir las funciones de distribución halladas en la parte anterior en el resultado obtenido de la parte 1, es decir:

   $$F_U(x) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{[x]}\left(\frac{1}{2}\right)^{[x]} = 1 - \left(\frac{5}{12}\right)^{[x]} \quad \text{si } x \geq 1; 0 \text{ en caso contrario.}$$

   $$F_V(x) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{[x]}\right)\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{[x]}\right) \quad \text{si } x \geq 1; 0 \text{ en caso contrario.}$$

(d) Para $k = 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{X}+\mathbf{Y}=k) &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}(\mathbf{X}=i)\mathbf{P}(Y=k-i) = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-i-1} \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{3}{5}\right)^i = \frac{1}{10}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]\end{aligned}$$

Problema 3

1. (a)

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\infty dx \int_0^\infty k e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 y}\,dy = \frac{k}{\lambda_1\lambda_2}$$

de donde $k = \lambda_1\lambda_2$.

(b)

$$E(XY) = \int_0^\infty \int_0^\infty xy\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 y}\,dx\,dy = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}$$

2. (a) $f_X(x) = 0$ si $x \leq 0$ En caso contrario:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$$

Análogamente $f_Y(y) = 0$ si $y \leq 0$ En caso contrario: $f_Y(y) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}$

(b)

$$E(X) = \int_0^\infty x e^{-\lambda_1 x}\,dx = (1/\lambda_1)\int_0^\infty e^{-\lambda_1 x}\,dx = 1/\lambda_1 \qquad \text{(aplicar partes)}$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda_1 x}\,dx = (2/\lambda_1^2)\int_0^\infty e^{-\lambda_1 x}\,dx = 2/\lambda_1^2 \qquad \text{(aplicar partes dos veces)}$$

La varianza es $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1/\lambda_1^2$. Análogamente, $E(Y) = 1/\lambda_2$ y $\mathrm{Var}(Y) = 1/\lambda_2^2$.

(c) Son independientes porque la densidad conjunta es igual al producto de las densidades marginales.

3. Como $X \geq 0$ e $Y \geq 0$ c.s., resulta que $0 \leq X/(X+Y) \leq 1$ c.s. por lo que $F_{X/(X+Y)}(k) = 0$ si $k \leq 0$ y $F_{X/(X+Y)}(k) = 1$ si $k \geq 1$. Si k está entre 0 y uno, entonces:

$$F_{X/(X+Y)}(k) = P(Y \geq X((1-k)/k)) = \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx \int_{x((1-k)/k)}^\infty e^{-\lambda y}\,dy = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x/k}\,dx = k$$

Entonces, $F_{X/(X+Y)}(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ k & \text{si } 0 \leq k \leq 1 \\ 1 & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$ que corresponde a una distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$.