

Práctico 2 – Ecuaciones diferenciales

1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables:

a) $y' = y^2 - 1$

b) $(1 + y^2)yy' + (1 + y^2) = 0$

c) $xe^{2y}y' - (1 + e^{2y}) = 0$

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales mediante el cambio de variables $u(x) = y(x)/x$, de forma de llevarlas a ecuaciones de variables separadas del tipo $u' = A(u)B(x)$:

a) $x^2y' + y(y - x) = 0$

b) $(x + y)y' = x - y$

3. a) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneas:

1) $y' + y \cos x = 0$

2) $x(x - 1)y' + (1 - 2x)y = 0$

3) $y' - (2/x)y = 0$

b) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden no homogéneas:

1) $y' + y \cos x = \cos x \sin x$

2) $x(x - 1)y' + (1 - 2x)y + x^2 = 0$

3) $y' - (2/x)y = x^4$

4. a) Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$

2) $y'' + y' = 0$

3) $y'' + 4y' + 5y = 0$

4) $y'' + 2y' + y = 0$

b) Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(1) = e^2$, $y'(1) = 3e^2$.

2) $y'' - 6y' + 5y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 11$.

3) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4) $y'' + 8y' - 9y = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$.

5. Hallar todos los valores reales de la constante a para que las ecuaciones $y'' + ay' - 2y = 0$ e $y'' - 2y' + ay = 0$ tengan soluciones en común además de $y(x) \equiv 0$. Resolver las ecuaciones obtenidas.

6. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que $y(x) = e^x$ sea una solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' - 2y = 0$. Hallar la solución general de dicha ecuación. Hallar la solución de la ecuación con datos iniciales $y(0) = y'(0) = 1$.

7. Hallar las constantes a y b reales para que $y(x) = e^{2x} \cos x$ sea solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$. Hallar la solución de la ecuación con datos iniciales $y(0) = y'(0) = 1$.

8. Hallar la solución de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, con las condiciones iniciales dadas:

a) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

b) $y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

c) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x) + \sin(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

- d) $y'' + y = 3x^2 - 5x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 e) $y'' + 4y' + 3y = 3e^x + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 f) $y'' + y = (1 + x)^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 g) $y'' + 2y' + y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
 h) $y'' + y = \cos(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores

1. (**Primer parcial segundo semestre 2023**) Sea $y(x)$ la solución a la ecuación diferencial

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = -2x^2 + 3$$

que cumple $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. Entonces:

- (A) $y(1) = e^2 - e^{-1}$
 (B) $y(1) = \frac{e^2 + e^{-1}}{2}$
 (C) $y(1) = e^{-1} - e^2 + 1$
 (D) $y(1) = \frac{e^2 - e^{-1}}{e^2 + e^{-1}}$
 (E) $y(1) = e^2 - 1$
2. (**Examen febrero 2023**) Consideremos la siguiente ecuación diferencial (E) dependiendo de una función $r(x)$:

$$y'' + 4y' + 4y = r(x)$$

y las siguientes afirmaciones:

- (I) Si $e^{-2x} + x^2$ es solución de (E) entonces $r(x) = 4x^2 + 8x + 2$.
 (II) Si $r(x) = x^2$ entonces $y(x) = e^{-2x} + 3xe^{-2x} + x^2$ es la única solución de (E) que verifica que $y(0) = y'(0) = 1$.
 (III) Si $r(x) = 0$ entonces todas las soluciones son de la forma $y(x) = ae^{-2x} + be^{-2x}x$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Entonces:

- (A) Todas las afirmaciones son verdaderas.
 (B) Solamente (III) es verdadera.
 (C) Solamente (I) es verdadera.
 (D) Solamente (I) y (III) son verdaderas.
3. (**Primer parcial segundo semestre 2022**) Sea $y(x)$ la solución a la ecuación diferencial

$$\frac{y'(x)e^{x^2}}{x} = -2(1 + y^2(x))$$

que cumple $y(0) = 0$. Entonces:

- (A) $y(\sqrt{2}) = -e$
 (B) $y(\sqrt{2}) = \tan(1 + e^2)$
 (C) $y(\sqrt{2}) = \tan(1)$
 (D) $y(\sqrt{2}) = 1$

(E) $y(\sqrt{2}) = \tan(e^{-2} - 1)$

4. (**Examen julio 2021**) Se considera la ecuación diferencial:

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 2e^{3x}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sabemos que

$$y(x) = x^2 e^{3x}$$

es solución de la ecuación. Entonces $\alpha + \beta$ vale:

- (A) 3
 (B) 0
 (C) 1
 (D) 2
 (E) 4
5. (**Primer parcial segundo semestre 2018**) Consideramos la siguiente ecuación diferencial con condición inicial:

$$\begin{cases} y' &= \frac{(y-2)^2}{(x+1)^2} \\ y(0) &= \frac{5}{2} \end{cases}$$

Entonces $y(1)$ vale:

- (A) 4
 (B) $\frac{9}{2}$
 (C) 2
 (D) $\frac{8}{3}$

Aplicaciones y Problemas Complementarios

- Se considera la ecuación $mv' = mg - kv$ que representa la velocidad $v(t)$ de caída de un cuerpo de masa m , donde g es la gravedad y $k < mg$ una constante de resistencia al aire.
 - Hallar $v(t)$ suponiendo conocida la velocidad inicial v_0 .
 - Hallar el límite de $v(t)$ cuando t tiende a $+\infty$, que se llamará v_∞ .
 - Calcule cuanto tiempo demora el cuerpo en alcanzar la velocidad $(v_\infty + v_0)/2$.
 - Suponga $v_0 = 0$ y calcule cual es la distancia recorrida por el cuerpo cuando su velocidad es $v_\infty/2$.
- Se considera la ecuación diferencial $x' = \alpha x(A - x)$ que representa la evolución de una población.
 - Mostrar que ninguna solución tiene extremos relativos.
 - Averiguar el límite cuando t tiende a $+\infty$ de la solución de la ecuación con condición inicial $x(0) = A/2$.
 - Determinar cuanto tiempo hay que esperar para que una población de $A/2$ pobladores se incremente en un cincuenta por ciento.
- La ecuación $u' = -2\lambda t u^2$ representa la cantidad $u(t)$ de agua en una represa, donde λ es una constante positiva a determinar con la apertura de los diques.
 - Hallar la solución de condición inicial $u(0) = u_0$, suponiendo $u_0 > 0$.
 - Hallar el límite de esa solución cuando t tiende a $+\infty$.

- c) Sea $u_1 < u_0$. Determinar (en función de u_0 y u_1) cuanto tiene que valer λ para que la cantidad de agua en la represa en el instante T sea igual a u_1 , es decir $u(T) = u_1$.
- d) Concretamos las magnitudes: el tiempo se mide en días, u se mide en millones de hectolitros. Hallar λ de la parte anterior suponiendo que $u_0 = 2$ millones de hectolitros, $u_1 = 1,5$ y que $T = 5$ días. Respuesta: $1/150$

4. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(I) \quad y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (II) \quad y'' + 4y' + 4y = 0 \quad ; \quad (III) \quad 2y'' + 2y' + y = 0$$

a) Encontrar las soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ para las que se cumple los siguientes datos iniciales:

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$$

y demostrar que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes en el espacio vectorial de todas las funciones $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

- b) Dadas las constantes a y b reales, hallar la solución $y(x)$ tal que $\begin{cases} y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$ y probar que se cumple $y(x) = ay_1(x) + by_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- c) Deducir que las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forman una base del espacio vectorial de todas las soluciones de la ecuación diferencial, y concluir que ese espacio tiene dimensión dos.