Señales Aleatorias y Modulación

Práctico 0
Repaso de Probabilidad

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como 10.1 que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers,* John A. Gubner.

✦ Ejercicio 1

Sea X una variable aleatoria de media m y varianza σ^2 . Encontrar la constante c que mejor aproxima a X en el sentido que c minimiza el error cuarático medio $E[(X-c)^2]$.

✦ Ejercicio 2

Sea θ una variable aleatoria con distribución uniforme, $\theta \sim U[-\pi, \pi]$ y sea $X = \cos\theta$ y $Y = \sin\theta$.

(a) Hallar las cdf: $F_X(x)$ y $F_Y(y)$.

(b) Hallar las pdf: $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

★ Ejercicio 3

Sea $X = \cos\theta$ y $Y = \sin\theta$, con $\theta \sim U[-\pi, \pi]$. En este ejercicio veremos un ejemplo de variables aleatorias no correlacionadas pero no independientes.

(a) Hallar $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$ y $Cov(X, Y)$.

(b) Considerar el conjunto $S := \{(x, y) : |x| \leq 1/2, \text{ y } |y| \leq 1/2\})$ y calcular $P((X, Y) \in S)$.

(c) Mostrar que X e Y no son independientes. Para ello, comparar la probabilidad $P((X, Y) \in S)$ en caso de que se asuma la independencia entre X e Y con el obtenido en la parte anterior. (Sugerencia: si X e Y son independientes, entonces $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$)

✦ Ejercicio 4

Sean $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con media m y varianza σ^2 . Mostrar que

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - m}{\sigma}$$

tiene media nula y varianza unitaria.