Clase 2: Probabilidades geométricas

Matías Carrasco

29 de junio de 2019

Índice

Resumen Estudiamos experimentos aleatorios que tienen un continuo de posibilidades, como por ejemplo elegir al azar un punto en un segmento. Para esto precisamos agregar una regla más a las probabilidades: la propiedad de continuidad. Luego vemos un ejemplo de cómo esta regla no es tan inofensiva como parece a primera vista. Al final, mostramos con un modelo mecánico cómo las probabilidades geométricas pueden explicar la aleatoriedad en el lanzamiento de una moneda.

Un continuo de posibilidades

En esta clase nos centraremos en algunos problemas del cálculo de probabilidades que involucran experimentos cuyos posibles resultados pueden ser representados por los puntos de un segmento, o de alguna figura plana, o de cuerpo sólido. En tales casos, no se puede hablar del número de posibilidades en los que ocurre un evento determinado; sin embargo, a menudo se puede definir la probabilidad del evento de una manera natural y calcularlo por consideraciones geométricas.[1]

[1] Lamentablemente no hay casi material en español sobre probabilidades geométricas. Sin embargo, los estudiantes que quieran ver más ejemplos de problemas de este tipo, pueden consultar la página web

`http://lya.fciencias.unam.mx/lars/0625/`

Contiene varios videos de un curso elemental de probabilidad de la Universidad Nacional Autónoma de México. Allí pueden encontrar un video específico de probabilidades geométricas.

Ejemplo 1 Una barra de longitud L se rompe en un punto elegido al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la menor de las dos piezas tenga una longitud mayor que $L/4$?

Los posibles resultados del experimento corresponden a los diferentes puntos en los que se puede romper la barra, es decir, el espacio muestral Ω se puede representar por un segmento AB de longitud L.

Ahora, ¿qué significa exactamente decir que la barra se rompe en un punto "elegido al azar"? Si estipulamos que todos los puntos de AB tienen la misma probabilidad p de ser elegidos, entonces debemos tener $p = 0$ ya que hay infinitos puntos en el segmento.[2]

[2] Este punto es un poco delicado, y para justificar correctamente que $p = 0$ se debe hacer un paso al límite. Pero para poder pasar al límite es necesario que las probabilidades sean "continuas" en algún sentido. Esto lo discutiremos más adelante.

Esto no proporciona mucha información para calcular la probabilidad requerida por el problema. Lo que debemos hacer es asociar a cada intervalo CD de AB un número $P(CD)$, la probabilidad de que el punto de ruptura se encuentre entre C y D. Dado que $P(CD)$ debe interpretarse como una probabilidad, debe satisfacer las desigualdades

$$0 \leq P(CD) \leq 1.$$

Como es seguro que el punto de quiebre está entre A y B, debemos tener

$$P(AB) = 1$$

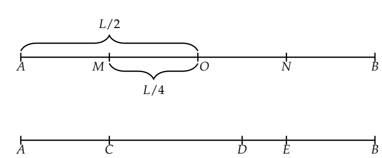


Figura 1: La probabilidad de que el punto caiga en el segmento CE es igual a la suma de la probabilidad de que caiga en CD más la de que caiga en DE.

Si C, D y E son tres puntos en el segmento como en la Figura 1, requeriremos que

$$P(CE) = P(CD) + P(DE).$$

Ahora podemos definir la frase "al azar" con precisión; usaremos este término para indicar que la probabilidad $P(CD)$ depende solo de la longitud de CD y no de su ubicación en la barra.

En este caso, podemos escribir $p(x)$ en lugar de $P(CD)$, donde x denota la longitud del segmento CD. La función $p(x)$ está definida para todo $0 < x < L$. Las propiedades anteriores ahora se pueden escribir en la forma

(1) $0 \leq p(x) \leq 1$
(2) $p(L) = 1$
(3) $p(x+y) = p(x) + p(y)$ si $x + y \leq L$.

¿Qué funciones cumplen con estas propiedades?

Teorema

La única función $p(x)$ que cumple las tres propiedades (1), (2) y (3) mencionadas arriba es $p(x) = x/L$ para $0 \leq x \leq L$.

Demostración. Primero notamos que la propiedad (3) puede generalizarse a

$$(4)\ p(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_n)$$

si $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq L$. Si en (4) ponemos $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = L/n$, entonces $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = L$, y así por (2), $p(x_1 + \cdots + x_n) = 1$. Por lo tanto (4) se convierte en $1 = np(L/n)$, o $p(L/n) = 1/n$.

Sean $m,\ n$ enteros positivos con $m < n$. Por (4) de nuevo, tenemos

$$\begin{aligned} p\left(\frac{m}{n}L\right) &= p\Big(\overbrace{\frac{L}{n} + \frac{L}{n} + \cdots + \frac{L}{n}}^{m \text{ términos}}\Big) \\ &= p\left(\frac{L}{n}\right) + p\left(\frac{L}{n}\right) + \cdots + p\left(\frac{L}{n}\right) \\ &= mp\left(\frac{L}{n}\right) = \frac{m}{n} \end{aligned}$$

Esto significa que $p(x) = x/L$ siempre que x/L sea racional.

Para tratar el caso en el que x/L es irracional, primero observar que si $0 \leq x \leq y \leq L$, entonces

$$p(y) = p(x) + p(y - x) \geq p(x),$$

ya que $p(y - x) > 0$ por la propiedad (1). Así, la función $p(x)$ es monótona no decreciente. Ahora, si x/L es irracional, y n es un entero positivo, podemos elegir los números racionales a/L y b/L de modo que $a < x < b$ y tal que $b/L - a/L < 1/n$ (esto se debe a que los números racionales son densos, de modo que cualquier número irracional se puede aproximar mediante números racionales). Luego obtenemos

$$\frac{a}{L} = p(a) \leq p(x) \leq p(b) = \frac{b}{L},$$

de lo cual se deduce que $|p(x) - x/L| < 1/n$. Como esto vale para todo n, vemos que $p(x) = x/L$. $\square$

Por lo tanto, cuando la barra AB se rompe al azar, la probabilidad de que el punto de ruptura se encuentre en un intervalo CD es igual a la longitud de CD dividida por la longitud de AB:

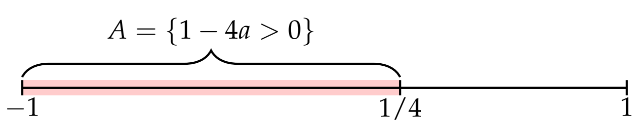
$$P(CD) = \frac{\text{long(CD)}}{\text{long(AB)}} \tag{1}$$

Para pensar: comparar la fórmula (1) con la de casos favorables sobre casos posibles.

es decir, igual a la fracción de la longitud total que representa el intervalo CD.

Para volver al problema original, observamos que la longitud de la pieza más pequeña en la que se rompe la barra será mayor que $L/4$ si, y solo si, el punto de ruptura se encuentra dentro del segmento MN (ver la primer figura) cuya longitud es $L/2$, y cuyos puntos finales se encuentran a una distancia $L/4$ de los extremos de la barra. Por lo tanto, la probabilidad requerida es $(L/2)/L = 1/2$. ■

Ejemplo 2 Se escoge un número a al azar dentro del intervalo $(-1, 1)$. ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación cuadrática $ax^2 + x + 1 = 0$ tenga dos raíces reales?



El espacio muestral es en este caso $\Omega = (-1, 1)$ que tiene longitud $\text{long}(\Omega) = 2$. Estamos interesados en la probabilidad del evento

$$A = \{a \in \Omega : ax^2 + x + 1 = 0 \text{ tiene 2 soluciones reales}\}.$$

Observar que A ocurre si, y solo si, el discriminante de la ecuación $1 - 4a > 0$, es decir, si $a < 1/4$. Por lo tanto, $A = (-1, 1/4)$ tiene longitud $5/4$, y

$$P(A) = \frac{\text{long(A)}}{\text{long}(\Omega)} = \frac{5/4}{2} = \frac{5}{8}.$$

■

Los anteriores son los primeros ejemplos en los cuales el espacio de resultados es continuo. Representan de forma más general el experimento de elegir al azar un punto en un intervalo. Aunque el modelo de probabilidades geométricas tiene sentido en curvas muy generales, nosotros nos limitaremos al intervalo (un segmento de recta) y al círculo.[3]

[3] En el caso del círculo, se puede pensar que el modelo representa el experimento de rodar una rueda de la fortuna infinita, que tiene un premio por cada punto del borde de la rueda.

Punto al azar en un intervalo o círculo

Cuando decimos que elegimos un punto al azar en un intervalo $[a, b]$ de los reales (resp. en un círculo), lo que queremos decir es que el espacio muestral Ω es el intervalo (resp. el círculo), y la probabilidad de cualquier sub-intervalo A de Ω es

$$P(A) = \frac{\text{long(A)}}{\text{long}(\Omega)}. \tag{2}$$

Lo más importante desde el punto de vista teórico es que la definición (2) respeta las tres reglas básicas del "credo" probabilístico:

- $P(A) \geq 0$ para todo evento A.
- $P(\Omega) = 1$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A y B son incompatibles.

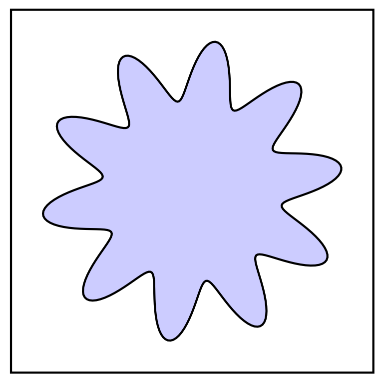
Espacios muestrales continuos: Observar que la probabilidad de cada punto es nula, i.e. $P(x) = 0$ para todo x en el segmento. Esto es así en todos los espacios muestrales continuos.

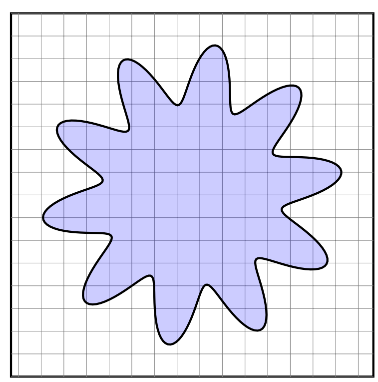
Para pensar: que $P(x) = 0$, ¿implica que x no puede ocurrir nunca?

Experimentos en 2D

Existen experimentos en donde el espacio muestral es una región del plano.

Ejemplo 3 Un tablero inusual de tiro al blanco se muestra en la figura al margen. Es un cuadrado de lado L. Al ver lanzar los dardos a un jugador inexperiente, parece que el dardo diera en un punto al azar del tablero. ¿Cuál es la probabilidad de que el dardo caiga dentro de la región azul dibujada en la figura?





Llamemos A a dicha región. Si dividimos los lados del tablero en $n = 2^k$ segmentos iguales, el tablero queda dividido en n^2 cuadrados de lado L/n. Si el dardo cae al azar en el tablero, por simetría la probabilidad de que caiga en cada uno de los cuadrados pequeños es la misma. Para que la probabilidad total sea 1, la probabilidad de cada cuadrado debe ser $1/n^2$.

Podemos así aproximar la probabilidad de la región A considerando los cuadrados que están incluidos en ella. Llamemos A_k a la unión de todos aquellos cuadrados que están incluídos en A. Entonces la probabilidad de A_k es

$$\begin{aligned} P(A_k) &= (\#\text{ cuadrados de } A_k) \cdot (\text{probabilidad de c/ cuadrado}) \\ &= C_k \cdot \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Tratemos de relacionar está probabilidad con el área de A_k. Cada cuadrado tiene área L^2/n^2, y el área de A_k es la suma de las áreas de los cuadrados que lo forman. Como todos ellos tienen la misma área, vemos que $\text{Area}(A_k) = C_k \cdot L^2/n^2$. Entonces

$$P(A_k) = \frac{\text{Area}(A_k)}{L^2} = \frac{\text{Area}(A_k)}{\text{Area}(\Omega)}.$$

Cuando hacemos tender k a infinito, el área de A_k tiende al área de A, y resulta natural que

$$P(A) = \frac{\text{Area}(A)}{\text{Area}(\Omega)}. \tag{3}$$

Esta es la fórmula análoga a (2) pero en dimensión 2. ■

La fórmula anterior para la probabilidad de A esconde una sutileza. La sucesión de eventos $\{A_k\}$ es creciente, en el sentido de que $A_k \subset A_{k+1}$, y aproxima a A en el sentido de que $\bigcup_k A_k = A$.

Límite de una sucesión creciente de eventos

Si $\{A_k\}$ es una sucesión creciente de eventos, denotamos por A_∞ su límite que por definición es

$$A_\infty = \lim_{k\to\infty} A_k := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Para que el pasaje al límite en la probabilidad de A_k tenga como resultado (3), se debe cumplir también

$$P(A) = \lim_{k\to+\infty} P(A_k).$$

El problema es que por el momento no hemos enunciado ninguna regla que garantice este pasaje al límite. Pero agregar reglas es gratis, así que:[4]

[4] Eso parece, pero más adelante veremos cuál es el precio a pagar por esta nueva regla.

Regla 4: continuidad de la probabilidad

Si $\{A_k\}$ es una sucesión creciente de eventos y $A_\infty = \lim_k A_k$, entonces

$$P(A_\infty) = \lim_{k\to+\infty} P(A_k).$$

Veamos un par de ejemplos de probabilidades continuas en 2D.

Ejemplo 4 Los duelos en la ciudad de Los Apurados rara vez son fatales. Allí, cada contendiente llega en un momento aleatorio entre las 5 a.m. y 6 a.m. en el día pactado y sale exactamente 5 minutos más tarde, honor servido, a menos que su oponente llegue dentro de ese intervalo de tiempo y peleen. ¿Qué fracción de duelos terminan en violencia?

Llamemos T_1 y T_2 los tiempos de llegada de los contendientes. Entonces, T_1 y T_2 son números al azar en el intervalo $[5,6]$. Más aún, si miramos el punto de coordenadas (T_1, T_2) en el cuadrado $[5,6] \times [5,6]$, es un punto al azar que corresponde al modelo uniforme en dimensión dos que vimos arriba. Es decir, las probabilidades se resuelven calculando áreas.

Llamemos V al evento "el duelo termina en violencia". Notar que los dos contendientes se encontrarán si, y solo si la diferencia de tiempos $|T_1 - T_2| \leq 1/12$ (1/12 corresponde a 5 minutos en la escala horas). Entonces

$$V = \left\{(T_1, T_2) \in [5,6]^2 : |T_1 - T_2| \leq 1/12\right\}.$$

Este evento se muestra en la Figura 2.

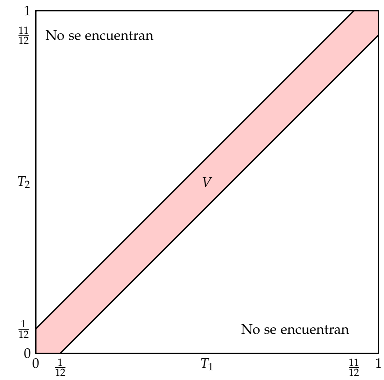


Figura 2: El evento V es la franja diagonal sombreada en rojo.

La probabilidad de V es por definición

$$P(V) = \frac{\text{Area}(V)}{\text{Area}(\Omega)} = \text{Area}(V),$$

ya que el área de Ω es 1. De la figura vemos que el área de V^c es $(11/12)^2$, por lo que $P(V) = 1 - (11/12)^2 \approx 1/6$. ■

Ejemplo 5 Imaginar un triángulo cualquiera: ¿es agudo u obtuso? Recordar que un triángulo es agudo si sus tres ángulos son todos menores que un ángulo recto. Es muy probable que el triángulo que imaginaron sea agudo. Pero ¿qué hay más: triángulos agudos u obtusos?

Una forma de responder a esta pregunta es eligiendo un triángulo al azar y ver cuál es la probabilidad de que sea agudo. Ahora, ¿cómo hacemos para elegir un triángulo al azar?

Usando homotécias podemos siempre suponer que los vértices del triángulo están sobre la circunferencia de un círculo de radio 1. Así que basta con elegir tres puntos al azar sobre un círculo. ¿Cuál es la probabilidad de que el triángulo que forman sea agudo?

Sean A, B y C los tres puntos. Podemos fijar uno de ellos, digamos C, ya que podemos girar el círculo para que C caiga siempre en el mismo lugar sin alterar las probabilidades. Los otros dos son aleatorios.

Comenzando desde C, y en sentido antihorario, puede pasar que aparezca primero A y luego B, o al revés. Pero haciendo una simetría podemos suponer que A es el primero.

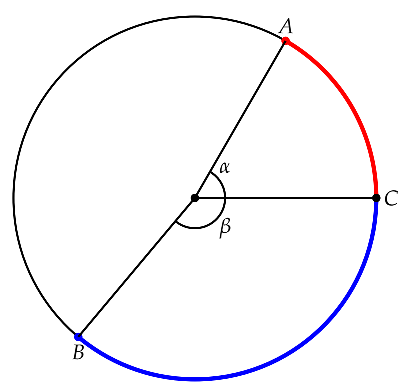


Figura 3: Los puntos A y B quedan determinados por los arcos de longitud α y β respectivamente.

Sea F el evento "el triángulo es agudo". Vamos a calcular $P(F)$. Las posiciones de A y B quedan determinadas por arcos de círculo de longitud α y β respectivamente, siendo α un arco en el semi-círculo superior como se muestra en la Figura 3.

Notar que la suma de las longitudes de los dos arcos debe ser menor que la longitud de la circunferencia. Es decir $\alpha + \beta \leq 2\pi$. ¿Qué otras restricciones hay para α y β?

Miremos primero el ángulo en C. Llamemos A' el punto diametralmente opuesto de A. Si B es exactamente igual a A', el ángulo en C es $\pi/2$. Si B está más cerca de C que A', el ángulo en C es mayor que $\pi/2$. Y si B está más lejos de C que A', el ángulo en C es menor que $\pi/2$. Ver la Figura 4.

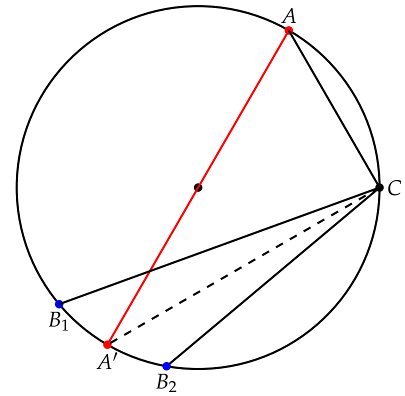


Figura 4: Para que el ángulo en C sea agudo debemos tener $\alpha + \beta > \pi$.

Por lo tanto, para que el ángulo en C sea agudo debemos tener $\alpha + \beta > \pi$. De la misma forma se puede ver que $\beta < \pi$ para que el ángulo en A sea agudo, y $\alpha < \pi$ para que el ángulo en B sea agudo.

De hecho estas son todas las restricciones. En un plano de coordenadas α y β, el espacio muestral consiste del triángulo recto que pasa por los puntos $(2\pi, 0)$ y $(0, 2\pi)$.

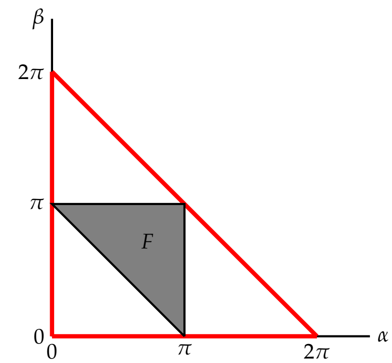


Figura 5: El espacio muestral de triángulos y el evento F.

En la Figura 5 también se muestra el evento F, y vemos que la probabilidad de F es entonces $P(F) = 1/4$. En conclusión, hay tres veces más triángulos obtusos que agudos, aunque siempre lo imaginemos al revés.[5] ■

[5] *Para pensar*: ¿Se te ocurre cómo usar este problema para probar que la probabilidad de que tres puntos elegidos al azar en un círculo caigan todos en un semicírculo es igual a $3/4$?

Una regla en apariencia inofensiva

Hasta ahora los eventos que hemos considerado son todos bastante "lindos", en el sentido de que están representados por figuras geométricas para las cuales no hay duda de como calcular su longitud, área o volumen. De hecho, en la práctica esto siempre es así, y nunca tenemos que lidiar con eventos "feos" para los cuales no esté muy claro lo que quiere decir su longitud o área.

Sin embargo, estos eventos "feos" existen. La Regla 4 que agregamos en esta clase a nuestro credo probabilístico tiene un precio, y es que debemos excluir estos conjuntos feos de la teoría. Es por esta razón que en los modelos continuos debemos restringir la definición de probabilidad a eventos "lindos". Es decir, no cualquier subconjunto de Ω tiene una probabilidad bien definida.

En esta sección veremos un ejemplo de un tal conjunto "feo". Nuestro objetivo es solamente mostrar que estos eventos existen, pero no trataremos de hacer una teoría rigurosa al respecto[6].

[6] Quien sienta curiosidad por estos temas puede consultar el libro *Probability and Measure* de P. Billingsley. También existe un curso de maestría en FIng que se llama *Topología y Medida* en el cual estos asuntos se estudian rigurosamente.

La siguiente construcción la hizo un matemático italiano del siglo XX que se llamaba Vitali. Por eso el evento "feo" que vamos a construir se llama *conjunto de Vitali*.

Consideremos el experimento que consiste en elegir un punto al azar en un círculo de radio 1. Imaginemos que cada punto del círculo representa una persona de una determinada población infinita, por lo que queremos elegir una persona de esta población al azar. Como el círculo tiene radio 1, la longitud total de la circunferencia es $L = 2\pi$.

Vamos a dividir a la población en *familias* de parientes. Decimos que dos puntos p y q del círculo son *parientes* si podemos ir de un punto al otro dando pasos de longitud 1 a lo largo de la circunferencia del círculo. Con esto queremos decir que cada paso nos mueve un ángulo de 1 radian en la circunferencia, y está permitido ir dando vueltas alrededor del círculo en ambas direcciones. Ver la Figura 6.

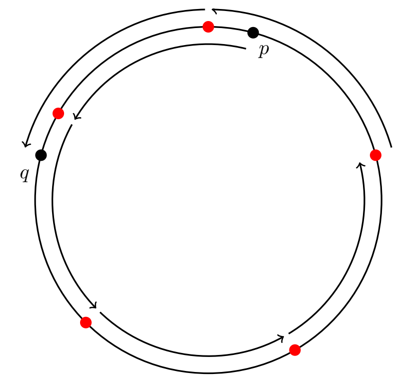


Figura 6: Dos puntos p y q que son parientes.

Supongamos que cada familia elige uno de sus miembros para que sea el *jefe de familia*. He aquí la pregunta: llamemos J al conjunto "la persona elegida es un jefe de familia", ¿cuál es la probabilidad de J? Resulta que esta pregunta no tiene respuesta.

La primer cosa a notar es que cada familia tiene un número infinito de miembros[7]. Como la longitud de la circunferencia es $L = 2\pi$, uno no puede volver al punto de partida dando vueltas alrededor del círculo con pasos de longitud 1. Si fuera posible empezar en un punto p y volver a él dando n pasos en sentido antihorario y completando m vueltas al círculo, tendríamos que $mL = n$. Pero esto es equivalente a que $\pi = n/2m$, lo cual es imposible pues π es irracional.

Podría parecer que la probabilidad de J es 0 ó 1, pero veremos que ninguna respuesta es correcta. Ni siquiera depende en cómo son elegidos los jefes de familia.

[7] ¡Lo que será esa Navidad!

Para cada $i \geq 1$ entero, consideremos el conjunto A_i de que "la persona elegida está a i pasos en sentido antihorario del jefe de su familia". Sea también H_i el conjunto de que "la persona elegida está a i pasos en sentido horario del jefe de su familia".

El conjunto A_i se obtiene del conjunto J rotándolo un ángulo i en sentido antihorario. Como las probabilidades sólo dependen de las longitudes, y las rotaciones preservan las longitudes de los conjuntos, vemos que $P(A_i) = P(A)$ para todo $i \geq 1$. Del mismo modo deducimos que $P(H_i) = P(A)$.

Cada persona está en alguno de los $A_i's$ o $B_i's$, pues toda familia tiene un jefe de familia. Además, estos conjuntos son disjuntos, pues una persona no puede estar a i pasos (horario o antihorario) y a j pasos a la vez.

Entonces, necesariamente se debe cumplir

$$1 = P(J) + \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) + P(B_i).$$

Pero si $x = P(J)$, obtenemos que

$$1 = x + \sum_{i=1}^{\infty} 2x,$$

que no tiene solución para $0 \leq x \leq 1$.

Esto significa que es imposible calcular $P(J)$, y la respuesta no es ni 0 ni 1, ni cualquier otro número entre 0 y 1. El conjunto J se conoce como un *conjunto no-medible*, ya que no podemos medir su probabilidad de forma consistente.

El lanzamiento de una moneda

En el lanzamiento de una moneda equilibrada, ¿de dónde viene el azar?

Empecemos por hacer un modelo mecánico. Supondremos que la moneda es un segmento y que se mueve en un plano vertical. Vamos a denotar por v_0 la velocidad vertical inicial del centro de masa de la moneda y r el número de vueltas por segundo (respecto al centro de masa) que da la moneda a lo largo de su trayectoria. Ver la Figura 7.

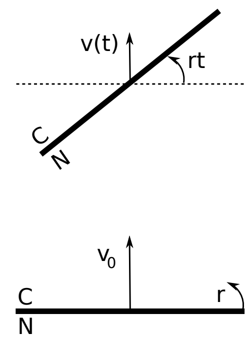


Figura 7: Modelo mecánico del experimento que consiste en tirar una moneda. El centro de masa de la moneda sale con velocidad inicial vertical v_0 y dando r vueltas por segundo. Un lado de la moneda dice C y el otro dice N.

El instante inicial es $t = 0$ y denotemos por g la aceleración de la gravedad. La velocidad vertical del centro de masa de la moneda luego de un tiempo t es

$$v(t) = v_0 - gt,$$

y el número de vueltas que la moneda ha dado es $N(t) = rt$.

Como la moneda demora en subir y bajar un tiempo igual a $t = 2v_0/g$, el número total de vueltas que da es

$$N_{\text{Tot}} = \frac{2v_0 r}{g}.$$

La moneda tiene grabado de un lado la letra C y del otro la letra N. Cuando la moneda vuelve a la altura inicial desde donde se la lanzó llega en una posición tal que si la miramos desde arriba vemos solo una de sus dos caras. La única excepción es cuando la moneda llega en la posición vertical (de canto).

Por ejemplo,

- Si N_{Tot} es un entero, el resultado es C.
- Si N_{Tot} es $\frac{1}{2}$ + un entero, el resultado es N.
- Si N_{Tot} es $\frac{1}{4} + \frac{\text{un entero}}{2}$, la moneda cae de canto.

En general, la moneda mostrará C o N según si

$$N_{\text{Tot}} \in \begin{cases} \left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \text{el resultado es } C; \\ \left(k + \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}\right) \Rightarrow \text{el resultado es } N. \end{cases}$$

Y caerá de canto si

$$N_{\text{Tot}} = \frac{1}{4} + \frac{k}{2} \Rightarrow \text{la moneda cae de canto.}$$

Aquí, k es cualquier entero mayor o igual a cero.

En este modelo, si conocemos v_0 y r exactamente podremos predecir con igual exactitud el resultado del lanzamiento de la moneda. Ver la Figura 8. Sin embargo, cuando lanzamos una moneda no somos capaces de elegir v_0 y r con absoluta precisión, sino que lo mejor que podemos hacer es elegirlos en un cierto rango de valores.

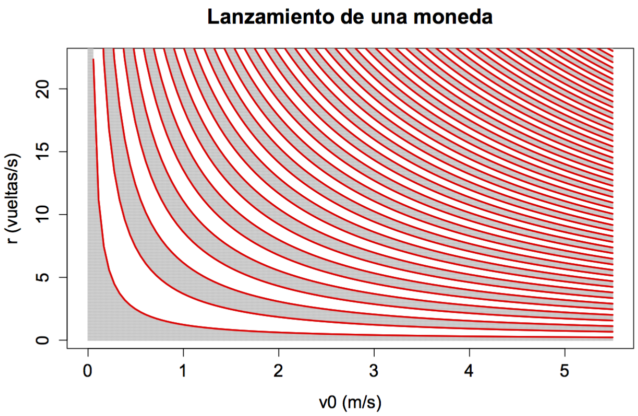


Figura 8: Las zonas indican, en función de las condiciones iniciales v_0 y r, si la moneda muestra C (gris), N (blanco), o si cae de canto (rojo).

Imaginemos que nuestra precisión es

$$v_0 \in [4.21, 4.65] \text{ y } r \in [7, 13] .$$

La precisión en v_0 corresponde a una precisión en la altura a la cual tiramos la moneda de $1\,m \pm 0.1\,m$. La Figura 9 muestra los resultados para estos valores de v_0 y r. Notar que prácticamente la mitad del rectángulo es gris y la otra es blanca.

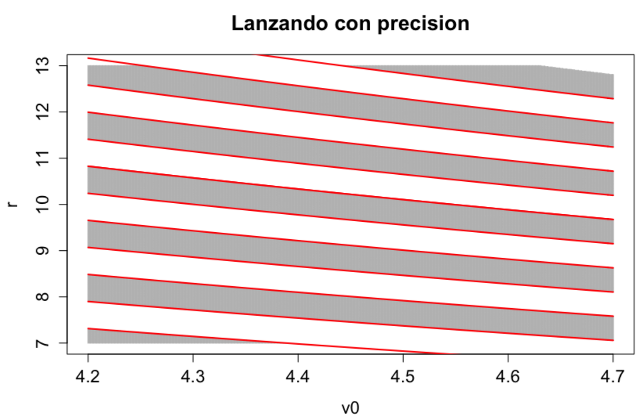


Figura 9: Se muestra lo mismo que en la Figura 8 pero para valores de v_0 en $[4.21, 4.65]$ y de r en $[7, 13]$.

La condición inicial (v_0, r) podría ser cualquier punto del gráfico. Como el área de la zona gris es casi igual al área de la zona blanca, y el área de las zonas rojas es cero, vemos que

$$P(C) \approx P(N) \approx \frac{1}{2}.$$

De hecho, podríamos imaginarnos modelos más complicados aún, que tengan en cuenta las tres dimensiones, las condiciones atmosféricas, y una cantidad enorme de otras variables físicas. Sin embargo, todos estos modelos son en un sentido equivalentes a este modelo simple.