1 4/6

Test de Hipótesis

Situación: • Dos hipótesis H_0 y H_1
• Datos

Objetivo: Poder elegir la mejor hipótesis para los datos que tenemos.

Decisión \ Realidad	H_0	H_1
Rechazar H_0	"Falso"	"Verdadero"
No rechazar H_0	"Verdadero"	"Falso"

Def: Región crítica.

Tamaño de la muestra

$RC = \{$ "zona de rechazo de H_0" $\} \subset \mathbb{R}^n$

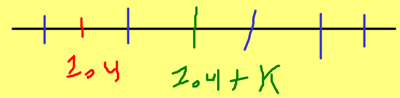
Ejercicio 1
La siguiente tabla registra los niveles de cloro en sangre de una muestra de 10 pacientes de una clínica, medido en milimoles por litro.

101,99	106,64	103,36	109,54	103,99
107,32	106,55	103,7	100,57	105,85

1. Asumiendo que los datos tienen distribución normal con media μ y desvío $\sigma = 2,5$, implemente la siguiente prueba de hipótesis:

$$\boxed{\begin{cases} H_0: & \mu = 104 \text{ mg/dl} \\ H_1: & \mu > 104 \text{ mg/dl.} \end{cases}}$$

Nota: Trabaje al nivel $\alpha = 0,05$



• LFGN: $\overline{X}_n \xrightarrow{c.s.} E(X) = \mu$

Para algún K

$RC = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \overline{x}_n > 104 + K\}$

Candidato.

Despejar el K

$$P_{H_0}\left(\{\overline{X}_n > 104 + K\}\right) = \overset{\alpha}{0{,}05}$$

Con esto puedo determinar la región crítica.

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \to \left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right)\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

El μ para H_0 es 104.

El $\sigma = 2{,}5$, y $n = 10$

$$P_{H_0}\left(\{\overline{X}_n \le 104 + K\}\right) = 0{,}95$$

Normalizar

$$P_{H_0}\left(\underbrace{\left(\frac{\overline{X}_n - 104}{2{,}5}\right)\sqrt{10}}_{Z \sim N(0,1)} \le \left(\frac{\cancel{104} + K - \cancel{104}}{2{,}5}\right)\sqrt{10}\right) = 0{,}95$$

$$P_{H_0}\left(Z \le K \frac{\sqrt{10}}{2{,}5}\right) = 0{,}95$$

$$\Phi(z_0) = P(Z \leq z_0)$$

Estamos buscando el $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi\left(K \frac{\sqrt{10}}{2,5}\right) = 0,95$$

$$K \frac{\sqrt{10}}{2,5} = \Phi^{-1}(0,95)$$

$$K = \frac{2,5}{\sqrt{10}} \Phi^{-1}(0,95) \Rightarrow K = \frac{2,5}{\sqrt{10}} \cdot (1,645) \approx 1,3$$

1,645

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706

$$RC = \{(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n : \bar{X}_n > \overbrace{104 + 1,3}^{105,3}\}$$

Si $(x_1, \ldots, x_n) \in RC \Rightarrow$ Rechazo H_0

- Con nuestra muestra tenemos que ver si está en RC o no.

101,99	106,64	103,36	109,54	103,99
107,32	106,55	103,7	100,57	105,85

$$\bar{X}_n = 104,9$$

$\hookrightarrow \bar{X}_n < 105,3$

entonces no rechazo H_0.

Def: $\alpha = \sup_{H_0} P((X_1, \ldots, X_n) \in RC)$ → Error de tipo 1

H_0 es cierta pero la rechazo.

$\beta = P_{H_1}((X_1, \ldots, X_n) \notin RC)$ → Error de tipo 2

H_1 es cierta pero la rechazo

(H_0 es falsa pero la acepto)

Def: La potencia de la prueba es:

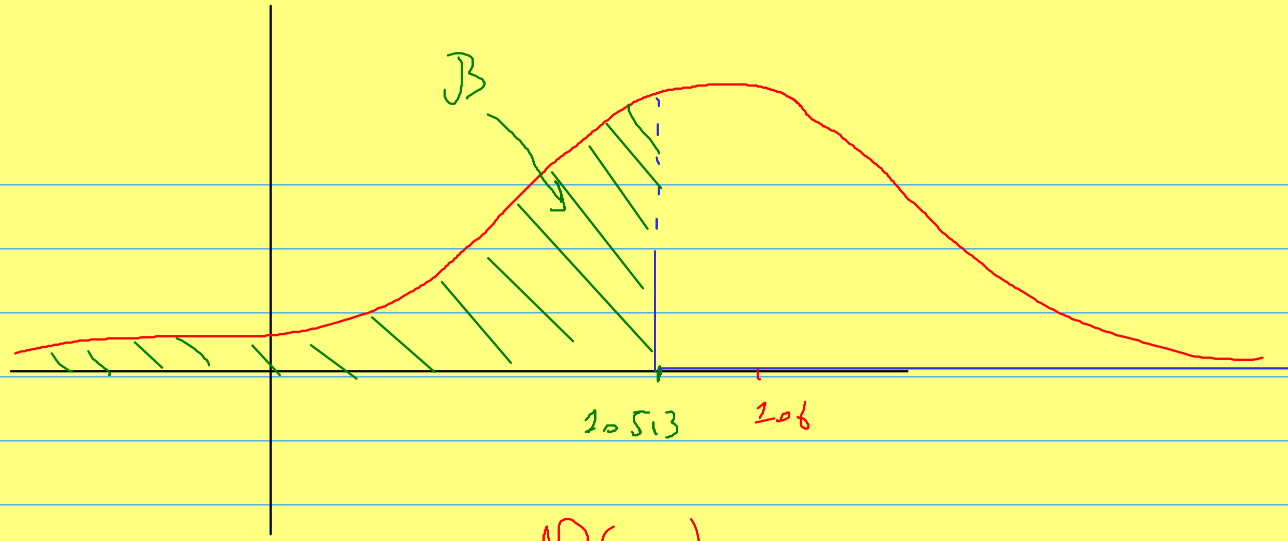
$$K = 1 - \beta$$
$$= P_{H_1}((X_1, \ldots, X_n) \in RC))$$

2. Sabiendo que el verdadero valor de μ es 106 mg/dl, calcular la potencia de la prueba.

$$RC = \{(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n : \bar{X}_n \geq 104 + \overset{k}{1,3}\}$$

$$\beta = P_{H_1}((X_1, \ldots, X_n) \notin RC), \quad \text{asumiendo } \mu = 106.$$

$$= P_{H_1}(\underbrace{\bar{X}_n}_{\sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})} < 105,3)$$

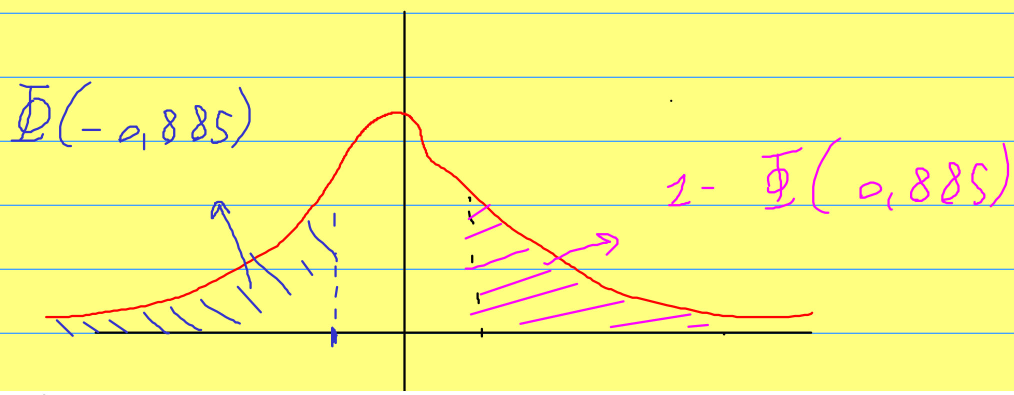


$$\sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\beta = P_{H_1}\left(\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right)\sqrt{n} < \left(\frac{105,3 - 106}{2,5}\right)\sqrt{10} \right)$$

$$\beta = \Phi\left(\frac{-0,7}{2,5} \cdot \sqrt{10} \right)$$

$$= \Phi(-0,885) = 0,188$$



0,885

z_α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985

$K = 1 - \beta$ → Potencia

$= 1 - 0,288$

$= 0,812$