ALGEBRA DE MATRICES

Def: Una matriz de m filas y n columnas es arreglo de números rectangular representado como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

c/elemento a_{ij} se le llama entrada o coeficiente (i,j) de A
$i \in \{1, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$A = ((a_{ij}))_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}, \quad A = ((a_{ij})), \quad A = (a_{ij})$$

Obs: Conjunto de todas las matrices m filas y n columnas con coeficientes $\in \mathbb{R}$ se denota:

$$\mathcal{M}_{m \times n}$$

Obs: $A = (a_{ij}), B(b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$

Decimos que $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i \in 1, \ldots, m$
$\forall j \in 1, \ldots, n$

(Coinciden coeficiente a coeficiente)

1. Matrices

1. Construir las siguientes matrices

   a) $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{3\times 4},\ a_{ij} = i + j$ *b)* $B = ((b_{ij})) \in \mathcal{M}_{3\times 3},\ b_{ij} = \begin{cases} i & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} \\ \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{6} \\ \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{6} & \boxed{7} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

SUMA DE MATRICES

Def: Dada $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

Se define $A+B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ como

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$$

Ej:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \pi & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}$

$B=\begin{pmatrix} 0 & 44 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}$

$\Rightarrow A+B \in \mathcal{M}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+44 \\ \pi-2 & -1+8 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A+B = \begin{pmatrix} 1 & 47 \\ \pi-2 & 7 \end{pmatrix}$

PROPIEDADES

1) CONMUTATIVA: $A+B=B+A$
2) ASOCIATIVA: $(A+B)+C=A+(B+C)$
3) $\exists$ NEUTRO: $\exists!$ matriz $0_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

   tq. $A+0_{m\times n}=A$
4) $\exists$ OPUESTO: $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ \exists!\ (-A) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

   tq. $A+(-A)=0_{m\times n}$

PRODUCTO MATRIZ - ESCALAR

Def: Dada $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

se define $\alpha \cdot A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$\alpha A = (\alpha \cdot a_{ij})$$

Ej:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg\} \longrightarrow \alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cdot 4 & \sqrt{2}\cdot 2 \\ \sqrt{2}\cdot 1 & \sqrt{2}\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \sqrt{2}$$

PROPIEDADES:

1) Asociativa: $(\alpha\beta)\cdot A = \alpha\cdot(\beta\cdot A)$
2) $\exists$ neutro: $1 \cdot A = A$
3) Distributiva (1): $(\alpha+\beta)\cdot A = \alpha\cdot A + \beta\cdot A$
4) Distributiva (2): $\alpha(A+B) = \alpha\cdot A + \alpha\cdot B$

PRODUCTO MATRICES

Def: Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$

Se define el producto entre A y B como:

$$AB = A\cdot B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

cuyos coeficientes son:

$$(AB)_{ij} = F_i(A)\cdot C_j(B) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\cdot b_{kj}$$

Ejemplo

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 2}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$

$\Rightarrow A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 0+0\cdot 3 & 1\cdot 6+0\cdot 8 & 1\cdot 1+0(-2) \\ -2\cdot 0+3\cdot 3 & -2\cdot 6+3\cdot 8 & -2\cdot 1+3(-2) \\ 5\cdot 0+4\cdot 3 & 5\cdot 6+4\cdot 8 & 5\cdot 1+4(-2) \\ 0\cdot 0+1\cdot 3 & 0\cdot 6+1\cdot 8 & 0\cdot 1+1(-2) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}$$

obs: B·A NO ESTÁ DEFINIDO!

$$\Rightarrow A\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 9 & 12 & -8 \\ 12 & 62 & -3 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}$$

obs: EL PRODUCTO <u>NO ES CONMUTATIVO</u>

PROPIEDADES

1) ASOCIATIVO: Si $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$$

2) DISTRIBUTIVA(1): si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow (A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$$

3) DISTRIBUTIVA(2): Si $A, B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow C\cdot(A+B) = C\cdot A + C\cdot B$$

4) $\exists$ IDENTIDAD: Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ entonces

$$\begin{cases} I_{m\times m}\cdot A = A \\ A\cdot I_{n\times n} = A \end{cases}$$

obs: La aplicación del prod. de matrices es representación de sistemas de ecuaciones lineales:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R}) \Rightarrow \boxed{A\cdot X = b}$$

2. Consideremos matrices A y B de dimensión 4×5 y matrices C, D y E de dimensiones 5×2, 4×2 y 5×4 respectivamente. Todas las matrices tienen sus entradas en el mismo conjunto numérico. Determine cuáles de las siguientes operaciones están definidas:

$$BA, \quad AC + D, \quad AE + B, \quad AB + B, \quad E(A + B), \quad EAC.$$

En caso de estarlo, indique las dimensiones de la matriz resultante.

$B \cdot A$ $\qquad A, B \in \mathcal{M}_{4\times 5} \Rightarrow$ NO ESTÁ DEFINIDO

$\# col(B) \neq \# fil(A)$

$A \cdot C + D$ $\qquad A \in \mathcal{M}_{4\times 5}$ $\quad \Rightarrow A \cdot C \in \mathcal{M}_{4\times 2}$

$C \in \mathcal{M}_{5\times 2}$ $\quad D \in \mathcal{M}_{4\times 2}$

$D \in \mathcal{M}_{4\times 2}$

$\Rightarrow A \cdot C + D$ tambien está definido

MATRIZ TRASPUESTA

Def: Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Se define $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \;/\; (A^t)_{ji} = a_{ij}$

Ej:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$$

PROP $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

1) PRESERVACIÓN SUMA: $(A+B)^t = A^t + B^t$

2) " PROD. ESCALAR: $(\alpha A)^t = \alpha \cdot A^t$

3) INVOLUCIÓN: $(A^t)^t = A$

PARA $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$:

4) INVERSIÓN ORDEN DEL PRODUCTO:

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

3. Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}4&-1\\2&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&4&2\\3&1&5\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-3&2&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}$$

Realizar las siguientes operaciones: AB, BC, $B+B^t$, AA^t, A^tA, $(AB)C$, $A(BC)$ y $DE-ED$.

$B+B^t$

$$\left.\begin{array}{l} B=\begin{pmatrix}4&-1\\2&1\end{pmatrix}\\ B^t=\begin{pmatrix}4&2\\-1&1\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow B+B^t=\begin{pmatrix}4+4&-1+2\\2-1&1+1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8&1\\1&2\end{pmatrix}$$

$A\cdot A^t$

$$\left.\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{pmatrix}\in M_{3\times2}\\ A^t=\begin{pmatrix}3&-1&1\\0&2&1\end{pmatrix}\in M_{2\times3}\end{array}\right\} \Rightarrow A\cdot A^t\in M_{3\times3}=\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&1\\0&2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\cdot3+0\cdot0 & 3(-1)+0\cdot2 & 3\cdot1+0\cdot1\\ -1(3)+2\cdot0 & -1(-1)+2\cdot2 & -1\cdot1+2\cdot1\\ 1\cdot3+1\cdot0 & 1(-1)+1\cdot2 & 1\cdot1+1\cdot1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AA^t=\begin{pmatrix}9&-3&3\\-3&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A\cdot A^t=(A\cdot A^t)^t}$$

2. **Traza de una matriz**

Sea A una matriz cuadrada. Se define la **traza** $tr(A)$ de la matriz A como la suma de todos los elementos de su diagonal. Entonces, si $A = ((a_{ij}))$ es una matriz $n \times n$ tendremos

$$tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

a) Probar que si A y B son matrices cuadradas $n \times n$:

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B), \qquad tr(\alpha A) = \alpha\, tr(A), \qquad tr(A) = tr(A^t)$$

b) Sabiendo que $tr(AB) = tr(BA)$, demostrar que no existen matrices cuadradas A y B $n \times n$ tales que $AB - BA = I_n$.

c) Sea A una matriz de $n \times n$. Probar que $tr(AA^t) \geq 0$ y $tr(AA^t) = 0$ si solo si $A = 0_n$.

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ \pi & 8 & 4 \\ -1 & 0 & 22 \end{pmatrix} \Rightarrow tr(A) = 1 + 8 + 22 = 31$

b) Demostrar por el absurdo!

Asumo que $\exists\, A, B \in M_{n \times n} \,/\, AB - BA = I_n$

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow tr(I_n) = n$

c) $A \in M_{n \times n} \Rightarrow$ Probar que $tr(AA^t) \geq 0$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$

$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \square & & & \\ & \square & & \\ & & \ddots & \\ & & & \square \end{bmatrix}$

$(A \cdot A^t)_{11} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + \cdots + a_{1n}^2 \geq 0$

$(A \cdot A^t)_{22} = a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + \cdots + a_{2n}^2 \geq 0$

$\Rightarrow tr(A \cdot A^t) = \sum_{i=1}^{n} (A \cdot A^t)_{ii} \geq 0$

y $tr(A \cdot A^t) = 0 \iff \forall a_{ij} \in A,\ a_{ij} = 0$

$\Rightarrow A = 0_{n \times n}$ ∎

SUMA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $A+B$ no está definida

PRODUCTO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ $A \cdot B$ NO ESTÁ DEFINIDO

$\#col(A) \neq \#filas(B)$